CHUYÊN ĐỀ 9

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Các bài toán về tọa độ trong không gian thường có các yêu cầu xác định tọa độ của điểm, vectơ, độ dài đoạn thẳng, tính góc 2 vectơ, các vấn đề về mặt phẳng và đường thẳng trong không gian (phương trình, vị trí tương đối, song song, vuông góc, số đo góc, khoảng cách,...). Tùy theo từng trường hợp ta cần lưu ý vận dụng các kiến thức cơ bản sau đây :

I. Toạ độ điểm. Toạ độ vectơ

Trong không gian tọa độ vuông góc Oxyz có 3 vectơ đơn vị trên ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

* Cho M(x, y, z) thì $\overrightarrow{OM} = x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2 + z.\vec{e}_3$.

* Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ thì $\vec{a} = a_1.\vec{e}_1 + a_2.\vec{e}_2 + a_3.\vec{e}_3$.

II. Các phép toán trên tọa độ điểm, vectơ

1. Các phép toán trên tọa độ điểm

Cho hai điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$. Ta có nhóm công thức tính tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$, khoảng cách giữa hai điểm A, B và tọa độ điểm M là chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$

* $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

* $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

* $\left(x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1-k},\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1-k},\ z = \dfrac{z_1 - kz_2}{1-k} \right)$

2. Các phép toán trên tọa độ vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Với α và β là 2 số thực ta có các công thức tính và công thức quan hệ sau :

a) Công thức tính toán

$$\alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} = (\alpha.a_1 + \beta.b_1,\ \alpha.a_2 + \beta.b_2,\ \alpha.a_3 + \beta.b_3)$$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

b) Công thức quan hệ

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \left(\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} \right)$ $(b_1, b_2, b_3 \neq 0)$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

Chú ý :

Góc hai đường thẳng chéo nhau trong không gian là góc nhọn tạo bởi hai vectơ chỉ phương của 2 đường thẳng đó.

MẶT PHẲNG

I. Phương trình mặt phẳng

1.* Phương trình tham số của mặt phẳng α qua $M(x_0, y_0, z_0)$ có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ viết là :

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1a_1 + t_2b_1 \\ y = y_0 + t_1a_2 + t_2b_2 \\ z = z_0 + t_1a_3 + t_2b_3 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in R$$

2.* Phương trình tổng quát của mặt phẳng α là :

$Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$

Mặt phẳng α có : pháp vectơ : $\vec{n} = (A, B, C)$

3.* Phương trình mặt phẳng qua $M(x_0, y_0, z_0)$ và vuông góc với vectơ

$\vec{n} = (A, B, C)$ viết là : $(x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C = 0$

4.* Phương trình mặt phẳng qua $M(x_0, y_0, z_0)$ và nhận 2 vectơ chỉ phương

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ viết là

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0.$$

5.* Phương trình mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại $A(a, 0, 0)$;

$B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$ với $a.b.c \neq 0$ viết là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

II. Toán trên mặt phẳng

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ $M(x_0, y_0, z_0)$ đến

α : Ax + By + Cz + D = 0 là :

$$MH = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng α, β có 2 pháp vectơ lần lượt là $\vec{n}$ = (A, B, C), $\vec{n}_1$ = (A_1, B_1, C_1)

Vị trí giữa hai mặt phẳng α, β là vị trí giữa 2 pháp vectơ $\vec{n}$, $\vec{n}_1$:

$\alpha \,//\, \beta \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \,//\, \vec{n}_1$

$\alpha \perp \beta \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \perp \vec{n}_1$

α cắt β $\quad \Leftrightarrow \quad$ $\vec{n}$ khác phương $\vec{n}_1$

ĐƯỜNG THẲNG

I. Phương trình đường thẳng

1.* Phương trình tham số của đường thẳng Δ qua

M(x_0, y_0, z_0) có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ = (a_1, a_2, a_3) viết là

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} ,t \in R \text{ (Hệ I).}$$

Nếu $a_1.a_2.a_3 \neq 0$ ta có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

2.* Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ xác định bởi giao tuyến 2 mặt phẳng α và β viết là :

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 & (\alpha) \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\beta) \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Ghi chú:

Cho phương trình đường thẳng Δ xác định bởi hệ (II). Để viết thành phương trình tham số của đường thẳng ta có thể đặt z = t và tính x, y theo t từ hệ (II) và nhờ hệ (I) ta có được vectơ chỉ phương và điểm của Δ (hoặc x = t,

hoặc y = t, nên chọn lựa ẩn phụ t để phép tính hai biến còn lại theo t được đơn giản).

3.*Phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Có dạng : $m(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ (*) với m, n không đồng thời bằng 0. Phương trình (*) gọi là phương trình của chùm mặt phẳng xác định bởi đường thẳng (d).

Chú ý :Nếu m= 0 thì n khác 0, chia hai vế của (*) cho n ta có

(*) thành $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Nếu m khác 0 *chia hai vế của (*) cho m ta có:*

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + h\,(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ với $h = \dfrac{n}{m}$.

Vậy chùm mặt phẳng chứa đường thẳng (d) có dạng:

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + h\,(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$.

hay $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Vấn đề 1
TÌM PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

➢ **Phương pháp :**

Thông thường ta có 3 cách sau :

- Cách 1 : Tìm một điểm và một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng.
- Cách 2 : Tìm một điểm và một pháp vectơ của mặt phẳng.
- Cách 3 : Dùng phương trình chùm mặt phẳng.

Vấn đề 2 :
TÌM PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

➢ **Phương pháp :**

Thông thường ta có 2 cách sau :

- Cách 1 : Tìm một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng.
- Cách 2 : Tìm phương trình tổng quát của 2 mặt phẳng phân biệt cùng chứa đường thẳng cần tìm.
- Ghi chú : Trong 2 cách, thực chất của việc tìm phương trình đường thẳng là tìm phương trình 2 mặt phẳng cùng chứa đường thẳng ấy. Cái khó là phải xác định được 2 mặt phẳng phân biệt nào cùng chứa đường thẳng cần tìm. Thông thường ta hay gặp 3 giả thuyết sau :

+ Đường thẳng (Δ) đi qua điểm A và cắt đường thẳng d : Khi đó đường thẳng (Δ) nằm trong mặt phẳng đi qua A và chứa d.

+ Đường thẳng (Δ) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d : Khi đó đường thẳng (Δ) nằm trong mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d.

+ Đường thẳng (Δ) song song với d_1 và cắt d_2 : Khi đó đường thẳng (Δ) nằm trong mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1.

Chẳng hạn :

1. Lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng a và cắt đường thẳng ấy.

✎ Cách giải :

- (Δ) đi qua A và vuông góc với d nên (Δ) nằm trong mặt phẳng α đi qua A và vuông góc với d.
- (Δ) đi qua A và cắt d nên (Δ) nằm trong mặt phẳng β đi qua A và chứa d. Khi đó (Δ) chính là giao tuyến của α và β.

2. Lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm A và cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

✎ Cách giải :

- (Δ) đi qua A và cắt d_1 nên (Δ) nằm trong mặt phẳng α đi qua A và chứa d_1.

- (Δ) đi qua A và cắt d_2 nên (Δ) nằm trong mặt phẳng β đi qua A và chứa d_2.
Khi đó (Δ) chính là giao tuyến của α và β.

3. Lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng α, vuông góc với d và nằm trong α.

✎ Cách giải :
- Từ giả thuyết ta đã có $(\Delta) \subset \alpha$.
- (Δ) qua A và vuông góc với d nên (Δ) nằm trong mặt phẳng β đi qua A và vuông góc với d.
Khi đó (Δ) chính là giao tuyến của α và β.

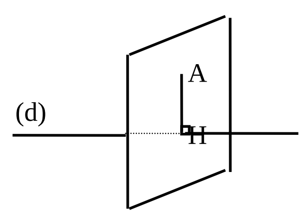
4. Lập phương trình đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng (D) và cắt 2 đường thẳng d_1 và d_2.

✎ Cách giải :
- (Δ) song song với (D) và cắt d_1 nên (Δ) nằm trong mặt phẳng α chứa d_1 và song song với (D).
- (Δ) song song với (D) và cắt d_2 nên (Δ) nằm trong mặt phẳng β chứa d_2 và song song với (D).
Khi đó (Δ) chính là giao tuyến của α và β.

<u>Vấn đề 3</u>
HÌNH CHIẾU

<u>Bài toán 1</u> : Tìm hình chiếu vuông góc H của điểm A trên đường thẳng (d)

➢ **<u>Phương pháp</u> :**



- <u>Cách 1</u> : (d) cho bởi phương trình tham số :
+ H ∈ (d) suy ra dạng tọa độ của điểm H phụ thuộc vào tham số t.
+ Tìm tham số t nhờ điều kiện $\vec{AH} \perp \vec{a_d}$
- <u>Cách 2</u> : (d) cho bởi phương trình chính tắc, gọi H(x, y, z)
+ $\vec{AH} \perp \vec{a_d}$ (*)
+ H ∈ (d) : Biến đổi tỉ lệ thức này để dùng điều kiện (*), từ đó tìm được x, y, z.
- <u>Cách 3</u> : (d) cho bởi phương trình tổng quát :
+ Tìm phương trình mặt phẳng α đi qua A và vuông góc với đường thẳng (d).
+ Giao điểm của (d) và (α) chính là hình chiếu H của A trên (d).

<u>Bài toán 2</u> : Tìm hình chiếu vuông góc H của điểm A trên mặt phẳng (α)
- <u>Cách 1</u> : Gọi H(x, y, z)
+ H ∈ α (*)
+ $\vec{AH}$ cùng phương với $\vec{n_\alpha}$: Biến đổi tỉ lệ thức này để dùng điều kiện (*), từ đó tìm được x, y, z.
- <u>Cách 2</u> :
+ Tìm phương trình đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α).
+ Giao điểm của (d) và (α) chính là hình chiếu H của A trên mặt phẳng (α).

Bài toán 3 : Tìm hình chiếu vuông góc (Δ) của đường thẳng (d) xuống mặt phẳng α.

- Tìm phương trình mặt phẳng β chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng α.
- Hình chiếu (Δ) của d xuống mặt phẳng α chính là giao tuyến của α và β.

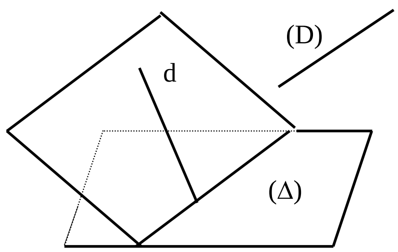
Bài toán 4 : Tìm hình chiếu H của A theo phương đường thẳng (d) lên mặt phẳng (α).

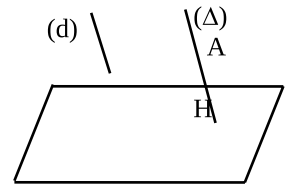
➢ **Phương pháp :**

- Tìm phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A và song song với (d).
- Hình chiếu H chính là giao điểm của (Δ) và (α).

Bài toán 5 : Tìm hình chiếu (Δ) của đường thẳng (d) theo phương của đường thẳng (D) lên mặt phẳng (α).

➢ **Phương pháp :**





- Tìm phương trình mặt phẳng (β) chứa (d) và song song với (D)
- Hình chiếu (Δ) chính là giao tuyến của (α) và (β)

Vấn đề4
ĐỐI XỨNG

Bài toán 1 : Tìm điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng d.

➢ **Phương pháp :**

- Tìm hình chiếu H của A trên d.
- H là trung điểm AA'.

Bài toán 2 : Tìm điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng α.

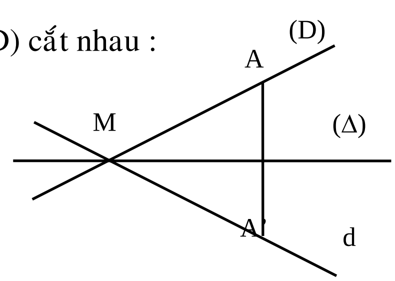
➢ **Phương pháp :**

- Tìm hình chiếu H của A trên α.
- H là trung điểm AA'.

Bài toán 3 : Tìm phương trình đường thẳng d đối xứng với đường thẳng (D) qua đường thẳng (Δ)

➢ **Phương pháp :**

- Trường hợp 1 : (Δ) và (D) cắt nhau :

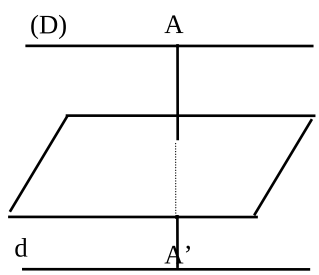


+ Tìm giao điểm M của (D) và (Δ).
+ Tìm một điểm A trên (D) khác với điểm M.
+ Tìm điểm A' đối xứng với A qua (Δ)
+ d chính là đường thẳng đi qua 2 điểm A' và M.

- Trường hợp 2 : (Δ) và (D) song song :
+ Tìm một điểm A trên (D)
+ Tìm điểm A’ đối xứng với A qua (Δ)
+ d chính là đường thẳng qua A’ và song song với (Δ)
- Trường hợp 3 : (Δ) và (D) chéo nhau :
+ Tìm 2 điểm phân biệt A, B trên (D)
+ Tìm điểm A’, B’ lần lượt là điểm đối xứng của A, B qua (Δ)
+ d chính là đường thẳng đi qua 2 điểm A’, B’.

<u>Bài toán 4</u> : Tìm phương trình đường thẳng d đối xứng với đường thẳng (D) qua mặt phẳng α.

➢ **<u>Phương pháp</u> :**
- Trường hợp 1 : (D) cắt α
+ Tìm giao điểm M của (D) và (α)
+ Tìm một điểm A trên (D)
+ Tìm điểm A’ đối xứng với A qua mặt phẳng α .
+ d chính là đường thẳng đi qua hai điểm A’ và M .
- Trường hợp 2 : (D) song song với α.



- Tìm một điểm A trên (D)
- Tìm điểm A’ đối xứng với A qua mặt phẳng α.
- d chính là đường thẳng qua A’ và song song với (D)

<u>*Vấn đề 5*</u>
KHOẢNG CÁCH

<u>Bài toán 1</u> : Tính khoảng cách từ điểm M(x_0, y_0, z_0) đến mặt phẳng α :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

➢ **<u>Phương pháp</u> :**

$$d(M,\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

<u>Bài toán 2</u> : Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ)

➢ **<u>Phương pháp</u> :**
- Tìm hình chiếu H của M trên (Δ)
- Khoảng cách từ M đến (Δ) chính là độ dài đoạn MH.

<u>Bài toán 3</u> : Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng song song d_1 và d_2.

➢ **<u>Phương pháp</u> :**

- Tìm một điểm A trên d_1.
- Khoảng cách giữa d_1 và d_2 chính là khoảng cách từ điểm A đến d_2.

<u>Bài toán 4</u> : Tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song α :

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

Và β : $Ax + By + Cz + D_2 = 0$

➢ **<u>Phương pháp</u> :**

Khoảng cách giữa α và β được cho bởi công thức : $d(\alpha,\beta) = \dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

<u>Bài toán 5</u> : Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2

➢ **<u>Phương pháp</u> :**

- <u>Cách 1</u> :

+ Tìm phương trình mặt phẳng α chứa d_1 và song song với d_2.
+ Tìm một điểm A trên d_2.
+ Khi đó $d(d_1, d_2) = d(A, \alpha)$

- <u>Cách 2</u> :

+ Tìm phương trình mặt phẳng α chứa d_1 và song song với d_2.
+ Tìm phương trình mặt phẳng β chứa d_2 và song song với d_1.
+ Khi đó $d(d_1, d_2) = d(\alpha, \beta)$

Ghi chú :

Mặt phẳng α và β chính là 2 mặt phẳng song song với nhau và lần lượt chứa d_1 và d_2.

- <u>Cách 3</u> :

+ Viết dưới dạng phương trình tham số theo t.
+ Viết d_2 dưới dạng phương trình tham số theo t_2.
+ Xem $A \in d_1 \Rightarrow$ dạng tọa độ A theo t_1.
+ Xem $B \in d_2 \Rightarrow$ dạng tọa độ B theo t_2.
+ Tìm vectơ chỉ phương $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ lần lượt của d_1 và d_2.
+ AB là đoạn vuông góc chung d_1, d_2. $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB} \perp \vec{a_1} \\ \vec{AB} \perp \vec{a_2} \end{cases}$ tìm được t_1 và t_2
+ Khi đó $d(d_1, d_2) = AB$

<u>Vấn đề 6</u>
GÓC

Cho 2 đường thẳng d và d' có phương trình :

d : $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ d' : $\dfrac{x - x_0}{a'} = \dfrac{y - y_0}{b'} = \dfrac{z - z_0}{c'}$

Cho 2 mặt phẳng α và β có phương trình :

α : $Ax + By + Cz + D = 0$ β : $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

1. Góc giữa hai đường thẳng d và d' :

$$\cos\varphi = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

2. Góc giữa hai mặt phẳng α và β :

$$\cos\varphi = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

3. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng α :

$$\sin\varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Chú ý : - $d \perp d'$ $\Leftrightarrow$ aa' + bb' + cc' = 0

- $\alpha \perp \beta$ $\Leftrightarrow$ AA' + BB' + CC' = 0
- d song song (hoặc nằm trên) mặt phẳng $\alpha \Leftrightarrow$ aA + bB + cC = 0

<u>Vấn đề 7</u>
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

Cho hai mặt phẳng α và β có phương trình :

$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Gọi $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1), \vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ lần lượt là pháp vectơ của 2 mặt phẳng trên và M là một điểm trên mặt phẳng α.

- α cắt β $\Leftrightarrow$ $\vec{n_1}$ và $\vec{n_2}$ không cùng phương.
- α song song β $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n_1} \text{ và } \vec{n_2} \text{ cùng phương} \\ M \notin \beta \end{cases}$
- α trùng β $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n_1} \text{ và } \vec{n_2} \text{ cùng phương} \\ M \in \beta \end{cases}$

Nếu $A_2, B_2, C_2, D_2 \neq 0$ thì ta có cách khác :

- α cắt β $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$
- α song song β $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
- α trùng β $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

<u>Vấn đề 8</u>
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA 2 ĐƯỜNG THẲNG

- <u>Cách 1</u> : Xét hệ phương trình tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

+ Hệ có một nghiệm duy nhất : d_1 cắt d_2.

+ Hệ có vô số nghiệm : d_1 và d_2 trùng nhau.

+ Hệ vô nghiệm :

$\vec{a_{d_1}}$ và $\vec{a_{d_2}}$ cùng phương : $d_1 // d_2$.

$\vec{a_{d_1}}$ và $\vec{a_{d_2}}$ không cùng phương : d_1 và d_2 chéo nhau.

- <u>Cách 2</u> :

+ Tìm vectơ chỉ phương $\vec{a_{d_1}}, \vec{a_{d_2}}$ của d_1 và d_2.

+ Tìm điểm $A \in d_1$ và $B \in d_2$.

a) $\vec{a_{d_1}}$ và $\vec{a_{d_2}}$ cùng phương $\left\langle \begin{array}{l} A \in d_2 : d_1 \equiv d_2 \\ A \notin d_2 : d_1 // d_2 \end{array} \right.$

b) $\vec{a}_{d_1}$ và $\vec{a}_{d_2}$ không cùng phương ta có:

i) nếu $\left[\vec{a}_{d_1},\vec{a}_{d_2}\right].\overrightarrow{AB}=0$ thì d_1,d_2 cắt nhau.

ii) nếu $\left[\vec{a}_{d_1},\vec{a}_{d_2}\right].\overrightarrow{AB}\neq 0$ thì d_1,d_2 chéo nhau.

Vấn đề 9

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

- Cách 1 :

Xét hệ phương trình tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng α.

+ Hệ vô nghiệm : d // α.

+ Hệ có nghiệm duy nhất : d cắt α

+ Hệ vô số nghiệm : $d \subset \alpha$

- Cách 2 :

Tìm vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của d, pháp vectơ $\vec{n}$ của α và tìm điểm A ∈ d.

+ $\vec{a}.\vec{n}\neq 0$ ($\vec{a}$ không vuông góc $\vec{n}$) : d cắt α.

+ $\vec{a}.\vec{n}=0$ ($\vec{a}\perp\vec{n}$) $\left\langle \begin{array}{l} A\notin\alpha : d//\alpha \\ A\in\alpha : d\subset\alpha \end{array}\right.$

Ví dụ 1:

Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (D)

$$\begin{cases} x-2z=0 \\ 3x-2y+z-3=0 \end{cases}$$

và vuông góc với mặt phẳng (P) : x – 2y + z + 5 = 0

Giải

Phương trình tham số của (D) viết

$$\begin{cases} x=2t \\ y=\dfrac{7}{2}t-\dfrac{3}{2} \\ z=t \end{cases}$$

Mặt phẳng (Q) chứa (D) và vuông góc (P) sẽ đi qua điểm $M\left(0,-\dfrac{3}{2},0\right)\in$ (D) và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a}=\left(2,\dfrac{7}{2},1\right)$ (vectơ chỉ phương của (D) và $\vec{n}$ = (1, –2, 1) (pháp vectơ của (P)).

Do đó, một pháp véctơ của (Q) là $\vec{n}_1=2\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ \frac{7}{2} & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & \frac{7}{2}\end{vmatrix}\right)=$

$$=(-11,2,\ 15)$$

Vậy phương trình (Q) viết

$$-11x + 2\left(y + \frac{3}{2}\right) + 15z = 0 \Leftrightarrow 11x - 2y - 15z - 3 = 0.$$

Cách khác:

Pt mặt phẳng (Q) chứa (D) và vuông góc (P) có dạng:

$x-2z = 0$ (loại) hay $m(x-2z) +3x -2y+z -3= 0$.

Vậy pt (Q) có dạng: $(m+3)x -2y +(1 -2m)z - 3 = 0$.

(Q) vuông góc với (P) nên ta có: $m + 3 + 4 + 1- 2m= 0$

$$\Rightarrow m = 8.$$

Vậy pt mp (Q) là: $11x - 2y - 15z - 3 = 0$.

<u>Ví dụ 2:</u>

Xác định các tham số m và n để mặt phẳng $5x + ny + 4z + m = 0$ thuộc chùm mặt phẳng có phương trình :

$$\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0$$

Giải

Chùm mặt phẳng có phương trình

$$\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0$$

chứa đường thẳng (D) có phương trình :

$$\begin{cases} 3x - 7y + z - 3 = 0 \\ x - 9y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

Để mặt phẳng (P) : $5x + ny + 4z + m = 0$ thuộc chùm mặt phẳng trên thì (P) chứa (D) nghĩa là chứa 2 điểm $A\left(\frac{1}{7}, 0, \frac{18}{7}\right), B\left(\frac{31}{10}, \frac{9}{10}, 0\right) \in (D)$. Điều kiện để (P) chứa A, B thì m, n thỏa hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{5}{7} + 4.\frac{18}{7} + m = 0 \\ 5.\frac{31}{10} + \frac{9}{10}.n + m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -11 \\ n = -5 \end{cases}$$

<u>Ví dụ 3: (ĐH KHỐI A-2002)</u> Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2.

b) Cho điểm M (2; 1; 4). Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

BÀI GIẢI:

a) (P) chứa Δ_1 và // Δ_2

$\overrightarrow{a_{\Delta_1}} = (2, 3, 4)$; $\overrightarrow{a_{\Delta 2}} = (1, 1, 2)$; Δ_1 qua M (0, −2, 0)

Mặt phẳng (P) có pvt $\left[\overrightarrow{a_{\Delta_1}}, \overrightarrow{a_{\Delta_2}}\right] = (2, 0, -1)$

(P) : $2x - z = 0$

b) M (2, 1, 4); $H \in \Delta_2$; MH min $\Leftrightarrow MH \perp \Delta_2$

C1 : Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và vuông góc với Δ_2.

Pt (Q) : $x + y + 2z - 11 = 0$; $\{H\} = (Q) \cap \Delta_2 \Rightarrow H (2, 3, 3)$

C2 : $\overrightarrow{MH} = (-1 + t, 1 + t, -3 + 2t)$, với $H \in \Delta_2$

Do $\overrightarrow{MH} . \overrightarrow{a_{\Delta 2}} = 0 \Rightarrow t = 1$. Vậy điểm H (2, 3, 3).

Ví dụ 4: (ĐH KHỐI B-2002) Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.

a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D .

b) Gọi M,N,P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB_1, CD,A_1D_1 .Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N .

BÀI GIẢI:

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho ta có :

A (0, 0, 0); A_1 (0, 0, a); B (a, 0, 0); B_1 (a, 0, a)

C (a, a, 0); C_1 (a, a, a); D (0, a, 0); D_1 (0, a, a)

Suy ra M $(a, 0, a/2)$; N $(a/2, a, 0)$; P $(0, a/2, a)$

a) $\overrightarrow{A_1B} = (a, 0, -a)$ $\overrightarrow{B_1D} = (-a, a, -a)$

Gọi (P) là mp qua B_1D và (P) // A_1B

$\Rightarrow$ (P) có pháp vectơ $\vec{n} = (1, 2, 1)$

$\Rightarrow$ Pt (P) : $x + 2y + z - 2a = 0$

$\Rightarrow d (A_1B, B_1D) = d (B, (P)) = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

b) $\overrightarrow{MP} = (-a, a/2, a/2)$. $\overrightarrow{C_1N} = (-a/2, 0, -a)$

Ta có : $\overrightarrow{MP} . \overrightarrow{C_1N} = 0 \Rightarrow MP \perp C_1N$.

Vậy góc giữa MP và C_1N là 90^0.

Ví dụ5 (ĐH KHỐI D-2002): Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng d_m :

$$\begin{cases}(2m+1)x + (1-m)y + m - 1 = 0\\ mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0\end{cases} \text{ (m là tham số)}$$

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

BÀI GIẢI:

1 vectơ chỉ phương của (d_m) là :

$\vec{a} = (-2m^2 + m + 1, -(2m+1)^2, -m(1-m))$

1 pvt của (P) là $\vec{n} = (2, -1, 0)$

ycbt $\Leftrightarrow \vec{a} . \vec{n} = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 2 + (4m^2 + 4m + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 6m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 6 (ĐH KHỐI A-2003): Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, B(a;0;0),
D(0; a; 0), A'(0; 0; b) ($a>0, b>0$). Gọi M là trung điểm CC'.

a. Tính thể tích khối tứ diện BDA'M theo a và b.

b. Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD) vuông góc với nhau.

BÀI GIẢI: A (0, 0, 0); B (a, 0, 0); C (a, a, 0); D (0, a, 0)

A' (0, 0, b); C' (a, a, b); M (a, a, $\frac{b}{2}$)

a) $\overrightarrow{BD}=(-a,a,0)$; $\overrightarrow{BA'}=(-a,0,b)$; $\overrightarrow{BM}=(0,a,\frac{b}{2})$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA'}\right]=(ab,ab,a^2)$

$\Rightarrow V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA'}\right].\overrightarrow{BM}\right|=\frac{1}{6}(a^2b+\frac{a^2b}{2})=\frac{3a^2b}{12}=\frac{a^2b}{4}$ (đvtt)

b) (A'BD) có vectơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA'}\right]=(ab,ab,a^2)$ hay $\overrightarrow{n}=(b,b,a)$

(MBD) có vectơ pháp tuyến

$\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right]=(\frac{ab}{2},\frac{ab}{2},-a^2)$ hay $\overrightarrow{m}=(b,b,-2a)$

Ta có : (A'BD) $\perp$ (MBD) $\Leftrightarrow \overrightarrow{m}.\overrightarrow{n}=0$

$\Leftrightarrow \mathbf{b^2+b^2-2a^2=0 \Leftrightarrow a=b\ (a, b>0)} \Leftrightarrow \frac{a}{b}=1$

Ví dụ 7 (ĐH KHỐI B-2003): Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho hai điểm A(2;0;0), B(0;0;8) và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC}=(0;6;0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

BÀI GIẢI: A (2; 0; 0); B (0; 0; 8).

$\overrightarrow{AC}=(0;6;0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=2 \\ y_C=6 \\ z_C=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ C (2; 6; 0). I trung điểm BC $\Rightarrow$ I (1; 3; 4)

Pt tham số OA : $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

(α) qua I $\perp \overrightarrow{OA}=(2;0;0)$: $2(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=0$

Tọa độ {H} = OA $\cap$ (α) thỏa :

$\begin{cases} x=t, y=0, z=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$. Vậy H (1; 0; 0).

d(I, OA) = IH = $\sqrt{(1-1)^2+(0-3)^2+(0-4)^2}=5$.

Ví dụ 8 (ĐH KHỐI D-2003): Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho đường thẳng d_k : $\begin{cases} x+3ky-z+2=0 \\ kx-y+z+1=0 \end{cases}$

Tìm k để đường thẳng d_k vuông góc với mặt phẳng

(P): $x-y-2z+5=0$

BÀI GIẢI: $\overrightarrow{n_1}=(1, 3k, -1)$; $\overrightarrow{n_2}=(k, -1, 1)$

$\overrightarrow{a_d} = (3k - 1, -k - 1, -1 - 3k^2)$

$\overrightarrow{n_P} = (1, -1, -2)$

$d_k \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{a_d}$ cùng phương $\overrightarrow{n_P}$

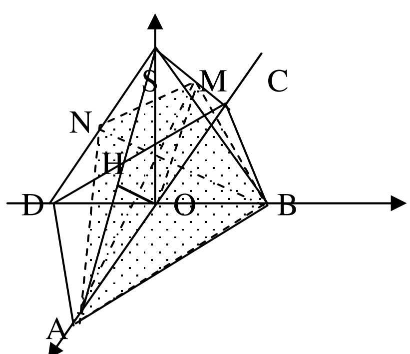
$\Leftrightarrow \dfrac{3k-1}{1} = \dfrac{-k-1}{-1} = \dfrac{-1-3k^2}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \vee k = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$

Ví dụ9 (ĐH KHỐI A-2004): Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), S(0; 0; $2\sqrt{2}$). Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tính góc và khoảng cách hai đường thẳng SA, BM.

b) Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

BÀI GIẢI: Cách 1:



GT $\Rightarrow$ SO $\perp$ (ABCD); SA = SC = $2\sqrt{3}$

a) Ta có OM // SA $\Rightarrow$ Góc (SA, MB) là $\widehat{OMB}$

OB $\perp$ (SAC) $\Rightarrow$ OB $\perp$ OM $\qquad$ ΔOBM có tg $\widehat{OMB} = \dfrac{OB}{OM}$

$\Rightarrow \text{tg}\widehat{OMB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{OMB} = 30^0$

Vẽ OH $\perp$ SA $\Rightarrow$ OH $\perp$ OM và OH $\perp$ OB $\Rightarrow$ OH $\perp$ (OMB)

Vì SA // OM $\Rightarrow$ SA // (OMB)

$\Rightarrow$ d (SA, MB) = d(H, (OMB)) = OH = $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

b) (ABM) $\cap$ SD = N $\Rightarrow$ N là trung điểm SD

Ta có: $\dfrac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}} = \dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{SMNB} = \dfrac{1}{4}V_{SBCD} = \dfrac{1}{8}V_{SABCD}$

Tương tự: $V_{SABN} = \dfrac{1}{4}V_{SABCD}$

Vậy: $V_{SABMN} = V_{SMNB} + V_{SABN} = \dfrac{3}{8}V_{SABCD}$

$= \dfrac{3}{8}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}AC.BD.SO = \dfrac{1}{16}.4.2.2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ (đvtt)

Cách 2: a) O là trung điểm BD $\Rightarrow$ D (0; –1; 0)

O là trung điểm AC $\Rightarrow$ C (–2; 0; 0)

M là trung điểm SC $\Rightarrow$ M $(-1; 0; \sqrt{2})$

$\overrightarrow{SA}$ =(2; 0;- $2\sqrt{2}$); $\overrightarrow{BM} = (-1;-1;\sqrt{2})$

Gọi φ là góc nhọn tạo bởi SA và BM

$\cos\varphi = \dfrac{|-2+0-4|}{\sqrt{4+8}\sqrt{1+1+2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^0$

Gọi (α) là mp chứa SA và // BM

$\Rightarrow$ PT (α) : $\sqrt{2}x + z - 2\sqrt{2} = 0$

Ta có d(SA, BM) = d(B, α) = $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

b) Pt mp(ABM): $\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 3z - 2\sqrt{2} = 0$

Pt tham số SD: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + t \quad (t \in R). \\ z = 2\sqrt{2}t \end{cases}$

N là giao điểm của SD và mp (ABM) $\Rightarrow N(0;-\dfrac{1}{2};\sqrt{2})$

$\overrightarrow{BS} = (0;-1;2\sqrt{2})$; $\overrightarrow{BA} = (2;-1;0)$

$\overrightarrow{BN} = (0;-\dfrac{3}{2};\sqrt{2})$; $\overrightarrow{BM} = (-1;-1;\sqrt{2})$

$\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BN}\right] = (2\sqrt{2};0;0)$; $\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BN}\right].\overrightarrow{BA} = 4\sqrt{2}$

$\left[\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{BN}\right].\overrightarrow{BM} = -2\sqrt{2}$

V_{SABMN}= V_{SABN} + V_{SBNM} = $\dfrac{1}{6}.4\sqrt{2} + \dfrac{1}{6}.2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ (đvtt)

<u>Ví dụ 10 (ĐH KHỐI D -2004):</u> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$. Biết A(a;0;0); B(–a;0;0); C (0; 1; 0); B_1(–a; 0; b)

a > 0, b > 0.

a) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng B_1C và AC_1 theo a, b.

b) Cho a, b thay đổi nhưng luôn thỏa mãn a + b = 4. Tìm a, b để khoảng cách giữa 2 đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất.

<u>BÀI GIẢI:</u> a) C_1 (0; 1; b)

Gọi (α) là mặt phẳng chứa B_1C và song song với AC_1

$\overrightarrow{B_1C} = (a;1;-b)$; $\overrightarrow{C_1A} = (a;-1;-b)$

Suy ra: $\left[\overrightarrow{B_1C},\overrightarrow{C_1A}\right] = (-2b;0;-2a)$

Suy ra ptrình (α): $b(x-0) + 0(y-1) + a(z-0) = 0$.

$\Leftrightarrow$ bx + az = 0.

Ta có: d=d(B_1C, AC_1)=d(A, α)=$\dfrac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b) <u>Cách</u> 1:

Ta có: d=$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \le \dfrac{ab}{\sqrt{2ab}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \le \dfrac{a+b}{2\sqrt{2}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Max d $\Leftrightarrow d = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 4 \\ a > 0, b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ a = b = 2

Cách 2: d = $\dfrac{ab}{\sqrt{16-2ab}}$, đặt x = ab, đk $0 < x \le 4$.

vì $x = ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = 4$

Xét f(x) = $\dfrac{x}{\sqrt{16-2x}}$ f'(x) = $\dfrac{16-x}{\sqrt{(16-2x)^3}} > 0\ \forall x \in (0; 4]$

$\Rightarrow$ d đạt max khi x = ab = 4 $\Rightarrow$ a = b = 2 (vì a + b = 4)

Ví dụ 11 (ĐH KHỐI B-2004): Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm

A (-4; -2; 4) và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3+2t \\ y = 1-t \\ z = -1+4t \end{cases}$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

BÀI GIẢI: Cách 1: A (–4; –2; 4)

(d) : $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 1-t \\ z = -1+4t \end{cases}$

Lấy M (–3+2t; 1 – t; –1 + 4t) $\in$ (d)

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1 + 2t; 3 - t; -5 + 4t)$

Ta có: AM $\perp$ (d) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{a_d} = 0$ (với $\overrightarrow{a_d}$ =(2; –1; 4)).

$\Leftrightarrow$ 2 + 4t – 3 + t – 20 + 16t = 0 $\Leftrightarrow$ 21t = 21 $\Leftrightarrow$ t = 1.

Vậy đường thẳng cần tìm là đt AM qua A có VTCP $\overrightarrow{AM}$ =(3;2;–1)

$\Rightarrow$ phương trình (Δ) : $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

Cách 2: Gọi (α) là mp qua A chứa d ,Gọi (β) là mp qua A và $\perp$ d $\Rightarrow$ d qua B (–3; 1; –1); $\overrightarrow{a_d}$ = (2; –1; 4)

(α) qua A (–4; –2; 4) (α) có 1 cặp VTCP :

$\begin{cases} \overrightarrow{a_d} = (2;-1;4) \\ \overrightarrow{AB} = (1;3;-5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{(\alpha)}}$ = (–7; 14; 7) = –7(1; –2; –1)

Pt mp (α) : x – 2y – z + 4 = 0

$\begin{cases} (\beta) \text{ qua A } (-4; -2; 4) \\ (\beta) \perp (d) \to \overrightarrow{n_{(\beta)}} = \overrightarrow{a_d} = (2;-1;4) \end{cases}$

Pt (β) : 2x – y + 4z – 10 = 0 Pt (Δ) : $\begin{cases} x-2y-z+4=0 \\ 2x-y+4z-10=0 \end{cases}$

Ví dụ 12 (ĐH KHỐI A-2005): Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng:

d : $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P) : 2x + y – 2z + 9 = 0

a) Tìm tọa độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2.

b) Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), biết Δ đi qua A và vuông góc với d.

BÀI GIẢI: a) Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = 1-t \\ y = -3+2t \quad (t \in \mathbf{R}) \\ z = 3+t \end{cases}$

$I \in d \Leftrightarrow I\ (1-t\ ;\ -3+2t\ ;\ 3+t)$

Ta có : d (I, (P)) = 2 $\Leftrightarrow \dfrac{|2-2t-3+2t-6-2t+9|}{\sqrt{4+1+4}} = 2$

$\Leftrightarrow |1-t| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=4 \end{array}\right.$ Suy ra : I (3 ; -7 ; 1) hay I (-3 ; 5 ; 7).

b) Thế phương trình d vào phương trình (P) ta được t = 1.

Thế t = 1 vào phương trình d, ta được x = 0; y = -1; z = 4

Suy ra A (0; -1 ; 4)

Vectơ chỉ phương của d : $\vec{a} = (-1;2;1)$

Vectơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = (2;1;-2)$

Suy ra vectơ chỉ phương của Δ : $[\vec{a},\vec{n}] = (-5;\ 0;\ -5)$ hay $(1;\ 0;\ 1)$

Mặt khác Δ đi qua A nên phương trình tham số của Δ là :

$$\begin{cases} x = t' \\ y = -1 \\ z = 4 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbf{R})$$

<u>Ví dụ 13 (ĐH KHỐI B-2005):</u> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với A(0; -3; 0), B(4; 0; 0), C(0; 3; 0), B_1(4; 0; 4).

a) Tìm tọa độ các đỉnh A_1, C_1. Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1).

b) Gọi M là trung điểm của A_1B_1 . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC_1. Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm N. Tính độ dài MN.

<u>BÀI GIẢI:</u> a) Hình chiếu của A_1 xuống mp (Oxy) là A $\Rightarrow A_1(0;\ -3;\ 4)$

Hình chiếu của C_1 xuống mp (Oxy) là C $\Rightarrow C_1(0;\ 3;\ 4)$

Cặp véc tơ chỉ phương của (BCC_1B_1) là : $\overrightarrow{BC} = (-4;3;0)$

$\overrightarrow{BB_1} = (0;0;4)$

Suy ra véc tơ pháp tuyến của (BCC_1B_1) là :

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}\right] = (12;\ 16;\ 0)$ hay $\vec{m} = (3;\ 4;\ 0)$

Mặt khác (BCC_1B_1) qua B nên có phương trình:

$3(x-4) + 4y + 0z = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$

Bán kính mặt cầu là :

$R = d\ (A, (BCC_1B_1)) = \dfrac{|0-12-12|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{24}{5}$

Suy ra phương trình mặt cầu là : $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = \dfrac{576}{25}$

b) M là trung điểm của $A_1B_1 \Rightarrow M\ (2;\ -\dfrac{3}{2};\ 4)$

Mp (P) có cặp véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AM} = (2;\dfrac{3}{2};4)$ và $\overrightarrow{BC_1} = (-4;3;4)$ $\Rightarrow$ véc tơ pháp tuyến của mp (P):

$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BC_1}\right] = (-6;\ -24;\ 12)$ hay $(1;\ 4;\ -2)$

Mặt khác (P) đi qua A nên có phương trình : $x + 4(y+3) - 2z = 0$

$\Leftrightarrow x + 4y - 2z + 12 = 0$

A_1C_1 đi qua A_1 và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{A_1C_1} = (0;\ 6;0)$ hay $(0;\ 1;\ 0)$

nên có phương trình : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \quad (t \in \mathbf{R}) \\ z = 4 \end{cases}$

Thế phương trình A_1C_1 vào phương trình (P) ta được t = 2

Thế t = 2 vào phương trình (A_1C_1) ta được x = 0, y = –1, z = 4

$\Rightarrow$ N (0; –1; 4)

$$\textbf{và MN} = \sqrt{(0-2)^2+(-1+\frac{3}{2})^2+(4-4)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

<u>Ví dụ 14 (ĐH KHỐI D-2005):</u> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng :

d_1 : $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{2}$ và d_2: $\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+3y-12=0 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

b) Mặt phẳng tọa độ Oxz cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại các điểm A, B. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

<u>BÀI GIẢI:</u> a) d_1 qua N (1; –2; –1) và có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a}$ =(3; –1; 2)

d_2 qua B (12; 0; 10) và có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{b}$ =(3; –1; 2)

Ta có : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{NB}$ = (11, 2, 11) không cùng phương với $\overrightarrow{a}$.

Vậy $d_1 // d_2$

Mp (P) qua N và có pháp vectơ : $\overrightarrow{n}$ =[$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{NB}$] = (–15; –11; 17)

Phương trình (P) là: –15(x–1) – 11(y+2) + 17(z+1) = 0

$\Leftrightarrow$ 15x + 11y – 17z – 10 = 0

b) A(–5, 0, –5); B (12, 0, 10) $\Rightarrow \left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]$ = (0, –10, 0)

$\Rightarrow$ Diện tích (ΔOAB) = $\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|$ = 5 (đvdt).

* * *