

## MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ Ở BẬC PHỔ THÔNG

**Trần Quang Thuận**

Aspvietnam\_netuk@yahoo.com

**Khoa Toán-ĐHSPHN**

091.5657.952

**091.5657.952**

### **A-Cần biết!**

1.Nếu hàm  $f(x)$  luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến thì:

a.Phương trình  $f(x) = m$  có không quá một nghiệm!

b.Phương trình  $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ .

2.Nếu  $\begin{cases} f(x) \leq a \\ g(x) \geq a \end{cases} \quad \forall x$  thì  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$

3.Nếu  $f(x)$  là hàm lồi(lõm) thì đồ thị cắt đường thẳng  $y=\alpha.x + \beta$  không quá hai điểm.

### **B-Các ví dụ:**

1.Dạng  $a^x + b^x = c^x$ .

**VD1:** Giải phương trình:  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^x \quad (1.1)$

Giải

TXĐ:R

Đặt  $x = -2u$ .

Phương trình đã cho trở thành:  $3^u + 4^u = 5^u \quad (1.2)$

Dễ dàng nhận thấy  $u=2$  là một nghiệm của phương trình (1.2).

Ta sẽ chứng minh  $u=2$  là nghiệm duy nhất của phương trình (1.2).

Thật vậy, phương trình (1.2) tương đương với ptr:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^u + \left(\frac{4}{5}\right)^u = 1$$

VT là tổng hai hàm mũ nghịch biến nên nghịch biến, VP là đường thẳng  $y=1$ . Vì vậy chúng chỉ cắt nhau tại đúng một điểm  $u=2 \Rightarrow x = -4$ .

**VD2:**  $(4 + \sqrt{15})^x + (5 - \sqrt{21})^x = (6 + \sqrt{35})^x \quad (2.1)$

Học mà không suy nghĩ thì vô ích. Suy nghĩ mà không học là nguy hiểm.

Ta có:

$$4 + \sqrt{15} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2.$$

$$5 - \sqrt{21} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$$

$$6 + \sqrt{35} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{5})^2$$

$$(2.1) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^{2x}}{2^x} + \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^{2x}}{2^x} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})^{2x}}{2^x}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{5} + \sqrt{3})^{2x} + (\sqrt{7} - \sqrt{3})^{2x} = (\sqrt{7} + \sqrt{5})^{2x}$$

Đặt  $u = 2x$  và nhận thấy  $u=1$  là nghiệm, chứng minh sự duy nhất của nghiệm tương tự như ví dụ 1!!!!

$$\text{VD3: } (3 + \sqrt{5})^x + (3 - \sqrt{5})^x = 4^x \quad (3.1)$$

Nhận xét:  $(3 + \sqrt{5}) > 4$  và  $(3 - \sqrt{5}) < 4$ .

Ta sẽ chứng minh ptr trên vô nghiệm.

Dạng tổng quát:  $\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x = 1$  (\*) trong đó  $\frac{a}{c} > 1$  và  $\frac{b}{c} < 1$ .

- Xét  $x \geq 0$  (trường hợp  $x < 0$  được xét tương tự)  $\Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^x \geq \left(\frac{a}{c}\right)^0 = 1$  (do tính đồng biến của hàm số).

$$\text{Hiển nhiên } \left(\frac{b}{c}\right)^x > 0.$$

Do đó ptr (\*) vô nghiệm.

®®® Tóm lại: Với phương trình dạng  $a^x + b^x = c^x$  thì

\*.Nếu  $a, b > c$  (nghiêm dương) hoặc  $a, b < c$  (nghiêm âm) thì chỉ ra nghiệm  $x_0$  và chứng minh sự duy nhất.

\*.Nếu  $\begin{cases} a > c \\ b < c \end{cases}$  thì phương trình vô nghiệm.

\*\*\*.Phương trình trên còn được mở rộng cho nhiều lũy thừa và có thêm hệ số.

$$\text{Ví dụ: Giải phương trình: } 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x = 6^x - 6 \quad (4.1)$$

$$(4.1) \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x + 6 \cdot 1^x = 6^x$$

Chia hai vế cho  $6^x$ .....(bạn đọc tự giải).

Dạng 2:  $f(x) = g(x)$ ; trong đó  $f(x)$  là hàm đa thức,  $g(x)$  là hàm mũ.

**Ví dụ 4:** Giải phương trình:  $2^{2x-1} - 2^{x^2} = (x-1)^2$ . (4.1)

Với những pt trình dạng đặc biệt như thế này ta phải nghĩ ngay tới việc so sánh???

Cách 1:

Ta có  $2x - 1 \leq x^2 \quad \forall x$   
 $\Rightarrow 2^{2x-1} \leq 2^{x^2}$

Nghĩa là VT  $\leq 0$ . Mà VP  $\geq 0$ .....(bạn đọc tự giải)

Cách 2:

(4.1) tương đương với phương trình:  $2^{2x-1} - 2^{x^2} = x^2 - (2x-1)$ . (4.2)

Đặt  $\begin{cases} 2x-1 = t_1 \\ x^2 = t_2 \end{cases}$

Từ (4.2) suy ra  $2^{t_1} - 2^{t_2} = t_2 - t_1$  (4.3)

Nhận thấy  $t_1 = t_2$  thoả mãn (4.3).

Nếu  $t_1 > t_2 \Rightarrow \begin{cases} VT(4.3) > 0 \\ VP(4.3) < 0 \end{cases}$

Tương tự với trường hợp  $t_1 < t_2$ .....

Cách 3: Dạng khác của (4.3):  $2^{t_1} + t_1 = 2^{t_2} + t_2$  (4.4)

Xét  $f(t) = 2^t + t$  là tổng hai hàm đồng biến nên đồng biến.

Do đó  $f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$

Chú ý: Nếu VP có dạng  $(ax+b)^a$  ( $a \geq 2$ ) thì dùng Cách 1.

**Note:** Nếu chuyển  $t_2 - t_1$  từ cách 2 thành  $t_1 - t_2$  thì phải dùng cách 3.

**Bài tập đề nghị:**

Giải phương trình:

1.  $2^{4x-1} - 2^{x^2} = x^2 - 4x - 1$

(gợi ý: Sử dụng C<sub>2</sub>)

2.  $3^{x^2+2x+5} - 3^{x^2-2x+5} = 4x$

(gợi ý: Sử dụng C<sub>3</sub>).

3.  $8^{\cos x} - 16^{\cos^3 x} = \cos 3x$ .

---

Biên học mệnh môn lấy chuyên cần làm bản  
Mây xanh không lối lấy chí cả dựng nên  
**Biên học mệnh môn lấy chuyên cần làm bản**  
**Mây xanh không lối lấy chí cả dựng nên**