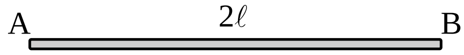
Câu 1 (5,0 điểm):

Một thanh cứng AB, có tiết diện đều và nhỏ, chiều dài của thanh $AB = 2\ell$ như hình 1.1. Biết mật độ khối lượng dài của thanh tăng tuyến tính dọc theo thanh từ A đến B, mật độ khối lượng dài tại A và B lần lượt là λ_0 và $2\lambda_0$.



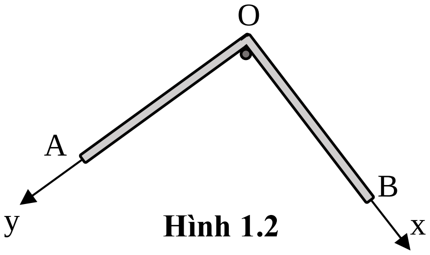
Hình 1.1

1. Hãy xác định:

a. Khối lượng m của thanh theo λ_0 và ℓ.

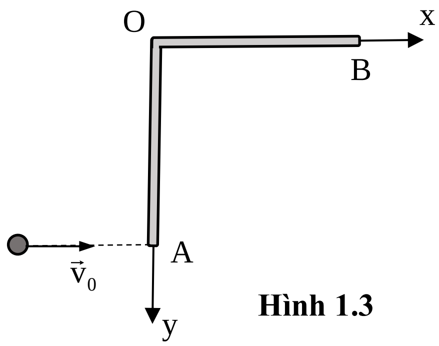
b. Vị trí khối tâm của thanh AB.

2. Thanh AB nói trên được uốn thành một góc vuông tại trung điểm O của AB tạo ra một khung chắc chắn sau đó treo khung lên 1 cái đinh tại góc O sao cho nó có thể dao động quanh trục quay này không ma sát như hình 1.2. Kích thích nhẹ cho khung dao động. Chứng tỏ rằng khung dao động điều hòa. Tìm tần số dao động của khung.

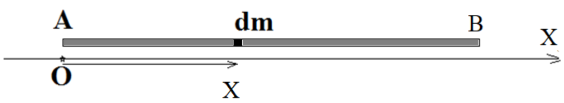


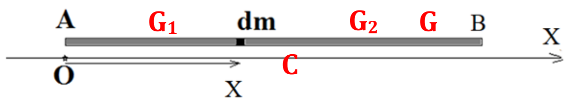
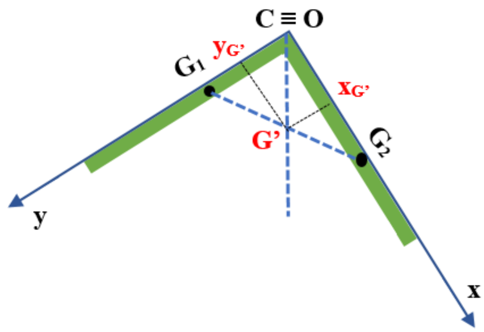
Hình 1.2

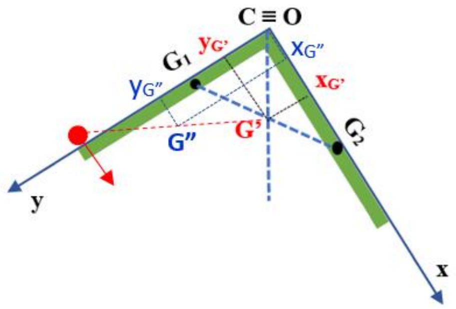
3. Bây giờ lại đặt khung nằm yên trên mặt phẳng ngang nhẵn như hình 1.3. Một viên bi nhỏ cũng có khối lượng m coi là chất điểm, chuyển động với vận tốc $\vec{v}_0$ vuông góc với cạnh AO, trượt không ma sát trên mặt phẳng ngang và va chạm mềm với khung tại A. Sau va chạm bi dính chặt vào khung. Hãy tìm vận tốc khối tâm của hệ hai vật (bi và khung) và tốc độ góc của hệ ngay sau va chạm.



Hình 1.3

Câu 1 (5,0đ)	Nội dung	Điểm
1. 1,0 đ	$\lambda_x = \lambda_0 + \dfrac{x(2\lambda_0 - \lambda_0)}{2l} = \lambda_0(1 + \dfrac{x}{2l})$	0,25 đ
	Nên $dm = \lambda_x dx = \lambda_0(1 + \dfrac{x}{2l})\mathrm{d}x$ (1.2) 	
	$m = \int_0^{2l} \lambda_0(1 + \dfrac{x}{2l})\mathrm{d}x = \lambda_0(x + \dfrac{x^2}{4l})\Big\vert_0^{2l} = 3l\lambda_0$	0,25 đ
	Vị trí khối tâm: $x_G = \dfrac{\int_0^{2l} xdm}{m}$ …………………………………………………..	0,25 đ
	$= \dfrac{\int_0^{2l} x.\lambda_0(1 + \dfrac{x}{2l})\mathrm{d}x}{m} = \dfrac{\lambda_0}{m}\int_0^{2l}(x + \dfrac{x^2}{2l})\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3l}(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6l})\Big\vert_0^{2l}$	

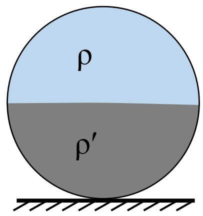
	$x_G = \frac{1}{3l}\left(\frac{4l^2}{2} + \frac{8l^3}{6l}\right) = \frac{10l}{9}$ …………………………………………………..	0,25 đ
2. 2,0 đ	Gọi C là trung điểm của AB  * moment quán tính của thanh đối với trục quay tại C: I_C vì chỉ phụ thuộc khoảng cách từ C tới điểm cần tính nên: $dI_C = dm(x-l)^2 \rightarrow I_C = \int_0^{2l} \lambda_0\left(1+\frac{x}{2l}\right)(x-l)^2\,dx = \lambda_0 l^3$ ………………… Khối lượng mỗi bên: Mà $m_{AC} = \int_0^l \lambda_0\left(1+\frac{x}{2l}\right)dx = \lambda_0\left(x+\frac{x^2}{4l}\right)\Big\|_0^l = \frac{5l\lambda_0}{4} \Rightarrow m_{CB} = m - m_{AC} = \frac{7l\lambda_0}{4}$ * Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của AC và CB. $\begin{cases} CG_1 = l - x_{G_1} = l - \dfrac{\int_0^l xdm}{m_{AC}} = l - \dfrac{\int_0^l x\lambda_0\left(1+\frac{x}{2l}\right)dx}{m_{AC}} = l - \dfrac{2\lambda_0 l^2}{3m_{AC}} = \dfrac{7}{15}l \text{........} \\ CG_2 = x_{G_2} - l = \dfrac{\int_l^{2l} xdm}{m_{CB}} - l = \dfrac{\int_l^{2l} x\lambda_0\left(1+\frac{x}{2l}\right)dx}{m_{CB}} - l = \dfrac{8\lambda_0 l^2}{3m_{CB}} - l = \dfrac{11}{21}l \text{..........} \end{cases}$ * Gọi G’ là khối tâm mới sau khi thanh bị uốn, chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ:  $\begin{cases} x_{G'} = \dfrac{m_{AC}x_{G1} + m_{CB}x_{G2}}{m} = \dfrac{0 + \left(\frac{7l\lambda_0}{4}\right)\left(\frac{11l}{21}\right)}{3l\lambda_0} = \dfrac{11}{36}l \text{...........} \\ y_{G'} = \dfrac{m_{AC}y_{G1} + m_{CB}y_{G2}}{m} = \dfrac{\left(\frac{5l\lambda_0}{4}\right)\left(\frac{7l}{15}\right) + 0}{3l\lambda_0} = \dfrac{7}{36}l \text{..........} \end{cases}$ $\Rightarrow d = \sqrt{x_{G'}^2 + y_{G'}^2} = \frac{\sqrt{170}}{36}l$ …………………………………………………………..	 0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Khi OG lệch khỏi phương thẳng đứng góc α thì chỉ có trọng lực gây ra momen quay. Phương trình momen quay:
$-mgdsin\alpha = I_C\alpha'' \to -mgd.\alpha = I_C\alpha'' \to \alpha'' + \frac{mgd}{I_C}\alpha = 0$ ……………………………..
Vậy khung dao động điều hòa với tần số: $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_C}} = \sqrt{\frac{3l\lambda_0 g\frac{\sqrt{170}}{36}l}{\lambda_0 l^3}} = \sqrt{\frac{\sqrt{170}}{12}\frac{g}{l}}$</td>
<td>0,25đ
0,25đ
0,25đ
0,25đ</td>
</tr>
<tr>
<td>3.
2,0 đ</td>
<td>Theo ĐLBT động lượng: $m\vec{v}_o + 0 = (m+m)\vec{V} \to \vec{V} = \frac{\vec{v}_o}{2}$ …………………
Gọi G” là khối tâm của hệ (khung + bi)
Theo ĐL BT momen động lượng đối với G”: $mv_0(l - y_{G''}) = I_{G''}.\omega$ ………..


Với
$\begin{cases} x_{G''} = \frac{m_{AB}x_{G'} + m_{bi}x}{m_{AB} + m_{bi}} = \frac{m\left(\frac{11l}{36}\right) + 0}{2m} = \frac{11}{72}l \\ y_{G''} = \frac{m_{AB}y_{G'} + m_{bi}y}{m_{AB} + m_{bi}} = \frac{m\left(\frac{7l}{36}\right) + ml}{2m} = \frac{43}{72}l \end{cases}$
(Hoặc tính nhanh do mAB = mbi = m nên G” là trung điểm của AG’)
$\Rightarrow \begin{cases} x_{G''} = \frac{1}{2}x_{G'} = \frac{11}{72}l \\ y_{G''} = \frac{1}{2}(l + y_{G'}) = \frac{43}{72}l \end{cases}$
$I_{G''} = I_{G'} + m_{AB}(G'G'')^2 + m_{bi}(AG'')^2 = \left[I_C - m(CG')^2\right] + 2m_{AB}(G'G'')^2$
$= \left[\lambda_0 l^3 - m\left(x_{G'}^2 + y_{G'}^2\right)\right] + 2m\left[(x_{G'} - x_{G''})^2 + (y_{G'} - y_{G''})^2\right]$
$= \lambda_0 l^3 - 3\lambda_0 l^3\left[\left(\frac{11}{36}\right)^2 + \left(\frac{7}{36}\right)^2\right] + 6\lambda_0 l^3\left[\left(\frac{11}{36} - \frac{11}{72}\right)^2 + \left(\frac{7}{36} - \frac{43}{72}\right)^2\right]$
$= \lambda_0 l^3 - 3\lambda_0 l^3\frac{85}{648} + 6\lambda_0 l^3\frac{481}{2592} = \boxed{\frac{743}{432}\lambda_0 l^3}$ ………………………………………
Suy ra $\omega = \frac{mv_0(l - y_{G''})}{I_{G''}} = \frac{(3\lambda_0 l)v_0\left(l - \frac{43}{72}l\right)}{\frac{743}{432}\lambda_0 l^3} = \boxed{\frac{522v_0}{743l}}$ ………………………</td>
<td>0,5đ
0,25đ
0,25đ
0,25đ
0,5đ
0,25đ</td>
</tr>
</table>

Câu 2 (5,0 điểm):

1. Một khối cầu gồm hai nửa là hai khối bán cầu phân cách bởi mặt phẳng đi qua một đường kính của khối cầu, mỗi nửa có bán kính R, có khối lượng riêng khác nhau là ρ và ρ′ > ρ (Hình 2.a) . Khối cầu được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang. Hệ số ma sát giữa mặt cầu và mặt phẳng ngang đủ lớn khối cầu lăn không trượt trên mặt phẳng ngang.

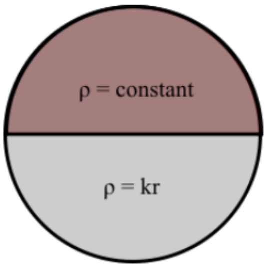


Hình 2.a

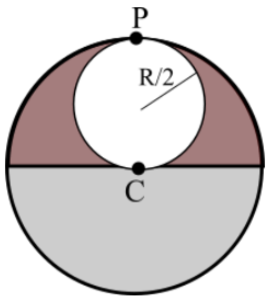
a. Xác định vị trí khối tâm của hai bán cầu và khối tâm của cả khối cầu.

b. Từ vị trí như hình 2.a trên mặt phẳng ngang, kích thích cho khối cầu dao động bé. Tính tần số góc của dao động.

2. Xét một đĩa tròn có khối lượng M và bán kính R, nửa trên của đĩa có khối lượng riêng không đổi ρ_1 và khối lượng M/2, trong khi nửa dưới có khối lượng riêng $\rho_2 = kr$ và khối lượng M/2 (Hình 2.b.). Đĩa được treo lên tường thông qua điểm P; sau đó người ta khoét một lỗ tròn bán kính R/2 ở nửa trên của đĩa, lỗ tròn đi qua cả hai điểm P và tâm C của đĩa (Hình 2.c.).



Hình 2.b



Hình 2.c

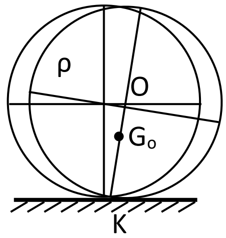
Xác định tần số góc dao động bé của đĩa bị khoét một lỗ tròn quanh điểm P.

Câu 2 5,0đ	Nội dung	Điểm
1a (1,0đ)	Xác định khối tâm của mỗi mỗi bán cầu (G và G' lần lượt là khối tâm của bán cầu trên và dưới) $$OG = \frac{\int xdm}{m}; m = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho; dm = \rho(\pi(R^2 - x^2))dx$$ $$\Rightarrow OG = \int_0^R \frac{x\rho(\pi(R^2 - x^2))}{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho}dx = \frac{3R}{8}$$ **Tương tự** $OG' = \frac{3R}{8}$ Khối tâm của cả khối cầu là G_o ở dưới O (do ρ'>ρ), cách O một khoảng $$OG_o = \frac{m'OG' - mOG}{(m+m')} = \frac{3R}{8}\frac{m'-m}{m'+m} = \frac{3R}{8}\frac{\rho'-\rho}{\rho'+\rho}$$	0,5đ 0,25đ 0,25đ

1b

(1,5đ)

Tại vị trí trục OG_o quay một góc φ nhỏ so với phương thẳng đứng, do độ cao của O so với mặt đất luôn bằng R, nên G_o được nâng lên độ cao $OG_o(1-\cos\varphi)$ so với vị trí cân bằng, với K là tâm quay tức thời, phương trình cơ năng của vật:



$$W = \frac{1}{2}I_K(\varphi')^2 + (m+m')gOG_o(1-\cos\varphi)$$

$$\approx \frac{1}{2}I_K(\varphi')^2 + \frac{1}{2}(m+m')gOG_o\varphi^2$$

= hằng số.

Đạo hàm hai vế:

$$I_K\varphi'' + (m+m')gOG_o\varphi = 0$$

⇒Vật dao động điều hòa với tần số góc: $\omega = \sqrt{\dfrac{(m+m')gOG_o}{I_K}}$ — 0,25đ

Xác định I_K:

$$I_K = I_{G_o} + (m+m')KG_o{}^2 \ (1)$$

$$KG_o = R - OG_o = R - \frac{3R}{8}\frac{\rho'-\rho}{\rho'+\rho} = R - \frac{3R}{8}\frac{m'-m}{m'+m} \ (2)$$

$$I_{G_o} = I_{m/G} + mGG_o{}^2 + I_{m'/G'} + m'G'G_o{}^2 \ \ (3)$$ — 0,25đ

Trong đó: $I_{m/G}$ là mô men quán tính của bán cầu m so với khối tâm G của nó được xác định như sau:

$$I_{m/O} = I_{m/G} + mOG^2$$

$$I_{m/O} = \frac{1}{2}I_{2m/O} = \frac{1}{2}\frac{2(2m)R^2}{5} = \frac{2mR^2}{5}$$

(mô men quán tính của bán cầu khối lượng m so với tâm O bằng mô men quán tính của khối cầu khối lượng 2m so với tâm O)

$$\Rightarrow I_{m/G} = \frac{2mR^2}{5} - m\left(\frac{3R}{8}\right)^2 = \frac{83mR^2}{320} \ (4)$$

Tương tự: $I_{m'/G'} = \dfrac{83m'R^2}{320}$ (5) — 0,25đ

Xét:

$$mGG_o{}^2 + m'G'G_o{}^2 = m(OG + OG_o)^2 + m'(OG' - OG_o)^2$$

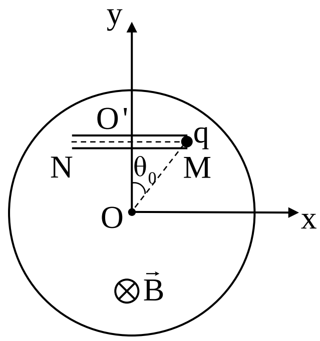
$$mGG_o{}^2 + m'G'G_o{}^2 = \frac{9R^2}{16}\frac{m.m'}{m+m'} \ (6)$$ — 0,25đ

	Thay (6), (5), (4) vào (3) ta có: $$I_{G_o}=\frac{83mR^2}{320}+\frac{83m'R^2}{320}+\frac{9R^2}{16}\frac{m.m'}{m+m'}\ (7)$$ Thay (7), (2) vào (1) $$I_K=\frac{83mR^2}{320}+\frac{83m'R^2}{320}+\frac{9R^2}{16}\frac{m.m'}{m+m'}+(m+m')\left[R-\frac{3R}{8}\frac{m'-m}{m'+m}\right]^2$$ Biến đổi ta được $$I_K=\frac{R^2\left(43m^2+56mm'+13m'^2\right)}{20\left(m+m'\right)}\ (8)$$	0,25đ 0,25đ
2 **(2,5đ)**	Ta có: $\frac{M}{2}=\int_0^R\rho_1\pi r dr=\rho_1\frac{\pi R^2}{2}\Rightarrow\rho_1=\frac{M}{\pi R^2}$ $$\frac{M}{2}=\int_0^R\rho_2\pi r dr=k\frac{\pi R^3}{3}\Rightarrow k=\frac{3M}{2\pi R^3}$$ Mômen quán tính của nửa đĩa trên khi chưa bị khoét lỗ tròn đối với C: $$I_{t/C}=\int_0^R\rho_1\pi r.\left(r^2\right)dr=\frac{MR^2}{4}$$ Mômen quán tính của nửa đĩa dưới đối với C: $$I_{d/C}=\int_0^R\rho_2\pi r.\left(r^2\right)dr=\frac{3}{10}MR^2$$ Để tính mômen quán tính của lỗ tròn, chúng ta có thể chồng một đĩa có khối lượng âm −M/4. Định lý trục song song: $$I_{tr/C}=-\frac{1}{2}\frac{M}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2=-\frac{3}{32}MR^2$$ Mômen quán tính của hệ đối với C: $$I_C=I_{t/C}+I_{d/C}+I_{tr/C}=\frac{73}{160}MR^2$$ Vị trí khối tâm của nửa đĩa trên khi chưa bị khoét lỗ tròn đối với C: $$y_{t/C}=\frac{\int_0^R\rho_1r^2dr\int_0^\pi\sin\varphi d\varphi}{\frac{M}{2}}=\frac{4R}{3\pi}$$ Vị trí khối tâm của nửa đĩa dưới đối với C: $$y_{d/C}=\frac{\int_0^R\rho_2r^2dr\int_0^\pi\sin\varphi d\varphi}{\frac{M}{2}}=\frac{3R}{2\pi}$$ Vị trí khối tâm của hệ đối với C: $$y_G=\frac{\frac{4R}{3\pi}.\frac{M}{2}-\frac{3R}{2\pi}.\frac{M}{2}-\frac{R}{2}.\frac{M}{4}}{\frac{M}{2}+\frac{M}{2}-\frac{M}{4}}=-\frac{\left(8+12\pi\right)R}{72\pi}$$ Mômen quán tính của hệ đối với P:	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ

	$I_P = I_G + \frac{3}{4}M.(GP)^2 = I_C - \frac{3}{4}M.(GC)^2 + \frac{3}{4}M.(GP)^2 = I_C + \frac{3}{4}M.(R^2 + 2R.GC)$ $\Rightarrow I_P = \left(\frac{11184\pi + 1280}{7680\pi}\right)MR^2$ Năng lượng của hệ được bảo toàn: $\frac{1}{2}I_P\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}Mg.GP(1-\cos\theta) = const$ $\Rightarrow I_P\dot{\theta}.\ddot{\theta} + \frac{3}{4}Mg.GP\sin\theta.\dot{\theta} = 0$ Đối với các góc nhỏ sinθ ≈ θ, nên chúng ta có thể viết lại phương trình vi phân cấp hai này dưới dạng: $\ddot{\theta} + \frac{3Mg.GP}{4I_P}.\theta = 0$ Vậy $\omega = \sqrt{\frac{3Mg.GP}{4I_P}} = \sqrt{\frac{5(8+84\pi)g}{(699\pi+80)R}}$	0,25đ 0,25đ 0,25đ

Câu 3:

1. Trong một mặt trụ có từ trường đều $\vec{B}$, độ lớn cảm ứng từ B thay đổi theo thời gian t. Người ta dựng một hệ trục tọa độ Oxy trên mặt phẳng vuông góc với từ trường $\vec{B}$, trong mặt phẳng Oxy người ta đặt một ống trụ rỗng mỏng cách điện MN cố định đối xứng qua trục Oy và song song với trục Ox như hình 3. Gọi O' là trung điểm của ống MN, góc giữa MO và OO' là θ_0. Trong ống MN có một điện tích q (q > 0), khối lượng m. Tại thời điểm t = 0, điện tích q nằm yên tại M. Chọn chiều dương của từ trường $\vec{B}$ như hình vẽ và giá trị của nó thay đổi theo thời gian như sau: $B = B_0\sin(\omega t)$ trong đó B_0 và ω là các hằng số dương. Biết rằng với quy luật biến thiên này của B làm cho quả cầu nằm giữa M và N thực hiện dao động điều hòa quanh điểm O với biên độ là O'M. Bỏ qua ma sát giữa ống trụ và điện tích q và tác dụng của trọng lực.

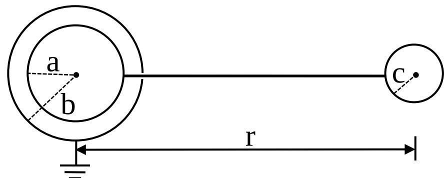


Hình 3

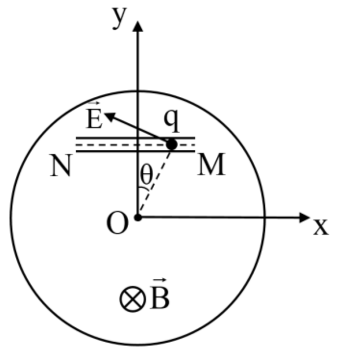
a. Tìm mối liên hệ giữa ω và m, q, θ_0 và B_0.

b. Biết độ dài của MN là 2R, gọi lực do điện tích q tác dụng lên ống MN theo chiều Oy là N_y. Hãy viết biểu thức tính N_y theo li độ x của điện tích q.

2. Một tụ điện gồm hai lớp vỏ hình cầu dẫn điện mỏng có bán kính a và b (a < b). Có một lỗ nhỏ trên lớp vỏ ngoài, một dây dẫn cách điện xuyên vào bên trong tụ điện để nối vỏ tụ trong với một vật dẫn thứ ba có dạng hình cầu rỗng bán kính c, khoảng cách giữa vật dẫn và tụ điện là r rất lớn. Vỏ ngoài của tụ điện được nối đất, truyền cho vật dẫn bên ngoài một điện tích Q. Sau một thời gian đủ dài, hãy xác định điện tích trên vật dẫn bên ngoài và bản tụ phía trong.

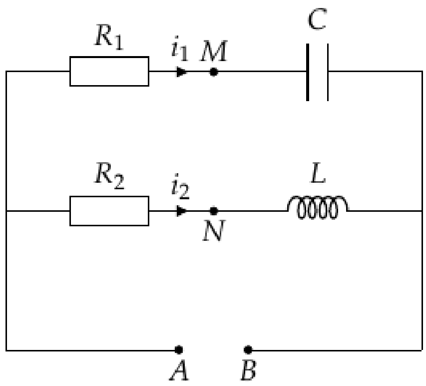


Hình 4

Câu 3	Nội dung	Điểm
1.a.	 Tại vị trí cách tâm O một đoạn r có điện trường thỏa mãn biểu thức: $\oint \vec{E}d\vec{\ell} = -\oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$ Từ đó ta có được: $E.2\pi r = \frac{\partial B}{\partial t}\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{r}{2}B_0\omega\cos(\omega t)$	0,5
	Lực tác dụng lên điện tích q theo phương 0x là: $F_x = F_e\cos\theta = -\frac{1}{2}qr\omega B_0\cos\omega t\cos\theta$ Khoảng cách OO' là: $d = r\cos\theta = OM\cos\theta_0 \Rightarrow F_x = -\frac{1}{2}qd\omega B_0\cos\omega t$	0,5
	Điện tích dao động với phương trình là: $x = O'M\cos(\omega' t + \varphi)$, tại t = 0 thì x = OM nên ta có được $\varphi = 0 \Rightarrow x = OM\cos(\omega' t) = d\tan\theta_0\cos(\omega' t)$ Ta có $F_x = -kx \Leftrightarrow -\frac{1}{2}qd\omega B_0\cos\omega t = -kd\tan\theta_0\cos\omega' t$ với $k = m\omega'^2$ $\Rightarrow \omega = \omega'$ và $\frac{1}{2}qd\omega B_0 = m\omega^2 d\tan\theta_0 \Rightarrow \omega = \frac{qB_0}{2m\tan\theta_0}$	1,0
1.b.	Lực tác dụng lên điện tích điểm theo phương 0y do điện trường gây ra là: $F_y(1) = F_e\sin\theta = qE\sin\theta = q\left(\frac{1}{2}r\omega B_0\cos\omega t\right)\sin\theta = \frac{q\omega B_0}{2R}x^2$ Với $r\sin\theta = x;\ x = R\cos\omega t$	0,5
	Vận tốc của hạt theo phương 0x là $v_x = -\omega R\sin\omega t$ Lực tác dụng lên điện tích điểm theo phương 0y do từ trường gây ra là: $F_y(2) = qv_xB = -q\omega B_0\sin^2\omega t = -\frac{q\omega B_0}{R}(R^2 - x^2)$	0,5
	Lực do điện tích tác dụng lên ống trụ là: $N_y = F_y(1) + F_y(2) = \frac{q\omega B_0}{2R}(3x^2 - 2R^2)$	0,5
2.	Có thể coi tụ điện hình cầu được nối song song với tụ điện là vật dẫn bên ngoài, nếu điện lượng trên quả cầu ngoài là q thì điện lượng tích trên vỏ	0,5

	cầu trong là $Q_A = Q - q$. Điện dung C_{ab} của tụ điện hình cầu và điện dung C_c vật dẫn bên ngoài lần lượt là $$C_{ab} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}};\qquad C_c = 4\pi\varepsilon_0 c$$	
	Điện tích trên vật dẫn bên ngoài là: $q = \frac{c}{c+\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}Q = \frac{c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+1}Q$ Điện tích của bản tụ bên trong là: $Q_a = Q - q = \frac{1}{c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+1}Q$	1,0

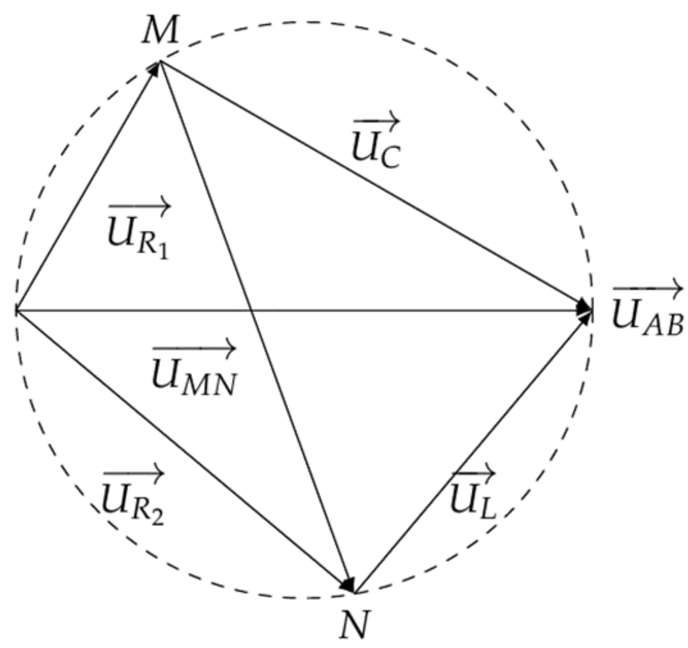
Câu 4: Cho mạch điện có cấu trúc như hình 4. Biết các điện trở có giá trị $R_1 = 25\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$, điện dung của tụ điện $C = 400\,\mu\text{F}$ và độ tự cảm của cuộn cảm thuần là $L = 0,5\,\text{H}$. Hai điểm A và B được dùng để đặt điện áp u_{AB} vào, điểm M nằm giữa điện trở R_1 và tụ điện C, và điển N nằm giữa điện trở R_2 và cuộn cảm thuần L. Gọi i_1 và i_2 lần lượt là cường độ dòng điện đi qua điện trở R_1 và R_2.



1. Cho điện áp đặt vào là điện áp một chiều có phương trình $u_{AB} = U_0 = 9\,(\text{V})$ được đặt vào tại thời điểm $t = 0$.
   - **a.** Xác định giá trị của i_1 và i_2 tại thời điểm $t = 0$.
   - **b.** Viết phương trình cường độ dòng điện i_2 theo thời gian t; từ đó xác định thời điểm mà công suất tiêu thụ tức thời của nguồn điện đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất và tính các giá trị công suất tức thời đó.
   - **c.** Tính nhiệt lượng tỏa ra trên điện trở R_1 từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm t tiến tới vô cùng.
2. Cho điện áp đặt vào là điện áp xoay chiều có phương trình $u_{AB} = 50\sqrt{2}\cos(50t)\,(\text{V})$ với t tính theo giây.
   - **a.** Vẽ phác họa giản đồ vector quay Fresnel mô tả liên hệ các điện áp giữa hai đầu các linh kiện R_1, R_2, L, C và giữa hai điểm A và B.
   - **b.** Viết phương trình điện áp u_{MN} xuất hiện giữa điểm M và điểm N.

Câu 4 (5,0đ)	Nội dung	Điểm
	Đối với điện áp không đổi, ta cần nhớ cường độ dòng điện (di – dịch) ở tụ điện C thỏa mãn $i_1 = C\cdot\frac{du_C}{dt}$ và suất điện động tự cảm ở cuộn cảm L là $e_{tc} = -L\cdot\frac{di_2}{dt}$.	

1a (0,5đ)	Tại thời điểm $t=0$, tụ điện như một dây dẫn (để quá trình nạp điện xảy ra) và cuộn cảm như là mạch hở (do suất điện động tự cảm ngăn cản). Do đó chỉ có dòng điện đi qua i_1 và ta có đáp số $$i_1(t=0)=\frac{U_0}{R_1}=0,36(\mathrm{A}),\ i_2(t=0)=0.$$	0,5đ
1b (1,25đ)	Áp dụng định luật Kirchoff II cho mạng AR_2LB, ta có $$U_0-i_2R_2+e_{\mathrm{tc}}=0\Leftrightarrow U_0-i_2R_2-L\cdot\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=0\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}i_2}{U_0-i_2R_2}=\frac{\mathrm{d}t}{L}.$$ Tích phân hai vế, ta có $-\frac{1}{R_2}\left(\ln\left\|U_0-i_2R_2\right\|\right)_0^t=\frac{t}{L}\Leftrightarrow\ln\left\|\frac{U_0-i_2R_2}{U_0}\right\|=-\frac{R_2t}{L}$. Biến đổi đại số, ta có $i_2(t)=\frac{U_0}{R_2}\left(1-e^{-\frac{R_2t}{L}}\right)=0,3\left(1-e^{-60t}\right)(\mathrm{A})$. Với cách xây dựng tương tự, ta có cường độ dòng điện di – dịch ở tụ C là $$i_1(t)=\frac{U_0}{R_1}e^{-\frac{t}{R_1C}}=0,36e^{-100t}(\mathrm{A}).$$ Công suất tiêu thụ của nguồn điện là $$\mathcal{P}=U_0(i_1+i_2)=9\left(0,3-0,3e^{-60t}+0,36e^{-100t}\right)(\mathrm{W}).$$ Lấy đạo hàm theo thời gian, ta có $\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}t}=162e^{-60t}-324e^{-100t}$. Cho $\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}t}=0$, ta có $162e^{-60t}=324e^{-100t}\Leftrightarrow t=t_0=\frac{\ln 2}{40}\approx 0,01733(\mathrm{s})$. Công suất tiêu thụ của nguồn điện tại thời điểm $t=t_0$ là $$\mathcal{P}(t=t_0)=2,32(\mathrm{W}).$$ Công suất tức thời của nguồn điện tại $t=0$ là $\mathcal{P}(t=0)=3,24(\mathrm{W})$; tại thời điểm $t\to\infty$ là $\lim\limits_{t\to\infty}\mathcal{P}(t)=2,7(\mathrm{W})$. Như vậy, công suất tiêu thụ của nguồn điện đạt giá trị lớn nhất $\max\mathcal{P}=3,24(\mathrm{W})$ tại thời điểm $t=0$; đạt giá trị nhỏ nhất $\min\mathcal{P}=2,32(\mathrm{W})$ tại thời điểm $t=t_0=0,01733(\mathrm{s})$.	
1c (0,75đ)	Nhiệt lượng tỏa ra trên điện trở R_1 trong thời gian dài có thể được tính thông qua định luật Joule – Lenz: $$Q=\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau i_1^2R_1\,\mathrm{d}t=\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau 25\left(0,36e^{-100t}\right)^2\mathrm{d}t=\lim_{\tau\to\infty}\left[\frac{81}{25}\cdot\frac{e^{-200t}}{-200}\right]_0^\tau.$$ Do $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$ nên $Q=\frac{81}{25\cdot 200}=0,0162(\mathrm{J})$.	
2a (0,5đ)	Điện áp đặt vào có dạng xoay chiều. Giản đồ Fresnel của mạch như hình dưới đây.	



Chú ý $\overrightarrow{U_{R_1}} \perp \overrightarrow{U_C}$ và $\overrightarrow{U_{R_2}} \perp \overrightarrow{U_L}$.

2b (2,0đ)

Tần số góc của mạch điện là $\omega = 50\,\text{rad/s}$. — 0,25đ

Trở kháng của cuộn cảm là $Z_L = \omega L = 25\Omega$ và của tụ điện là $Z_C = \dfrac{1}{\omega C} = 50\,\Omega$.

Dòng điện qua mạch $R_1 - C$ có cường độ hiệu dụng $I_1 = \dfrac{U_{AB}}{\sqrt{R_1^2 + Z_C^2}} = 0,89(\text{A})$, qua mạch $R_2 - L$ có cường độ hiệu dụng $I_2 = \dfrac{U_{AB}}{\sqrt{R_2^2 + Z_L^2}} = 1,28(\text{A})$. — 0,5đ

Như thế các hiệu điện thế hiệu dụng $U_{R_1} = R_1 I_1 = 22,25(\text{V})$, $U_{R_2} = R_2 I_2 = 38,4(\text{V})$, $U_C = Z_C I_1 = 44,5(\text{V})$ và $U_L = Z_L I_2 = 32(\text{V})$. — 0,25đ

Ta có thể tìm u_{MN} từ giản đồ Fresnel như sau.

Gọi α_1 và α_2 lần lượt là góc hợp bởi $\overrightarrow{U_{R_1}}$ và $\overrightarrow{U_{R_2}}$ với $\overrightarrow{U_{AB}}$, khi đó ta có

$$\tan\alpha_1 = \frac{U_C}{U_{R_1}} = \frac{Z_C}{R_1} = 2 \Leftrightarrow \alpha_1 = 63,4^\circ \text{ và}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{U_L}{U_{R_2}} = \frac{25}{30} \Leftrightarrow \alpha_2 = 39,8^\circ.$$

Như vậy góc hợp bởi $\overrightarrow{U_{R_1}}$ và $\overrightarrow{U_{R_2}}$ là $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 103,2^\circ$. — 0,25đ

Theo định lý hàm cos, ta có

$$U_{MN} = \sqrt{U_{R_1}^2 + U_{R_2}^2 - 2U_{R_1}U_{R_2}\cos\alpha} = 48,57(\text{V}).$$ — 0,25đ

Gọi β là góc hợp bởi $-\overrightarrow{U_{R_1}}$ và $\overrightarrow{U_{MN}}$. Theo định lý hàm sin, ta có

$$\frac{U_{R_2}}{\sin\beta} = \frac{U_{MN}}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{U_{R_2}}{U_{MN}}\cdot\sin\alpha\right) = 50,3^\circ.$$ — 0,25đ

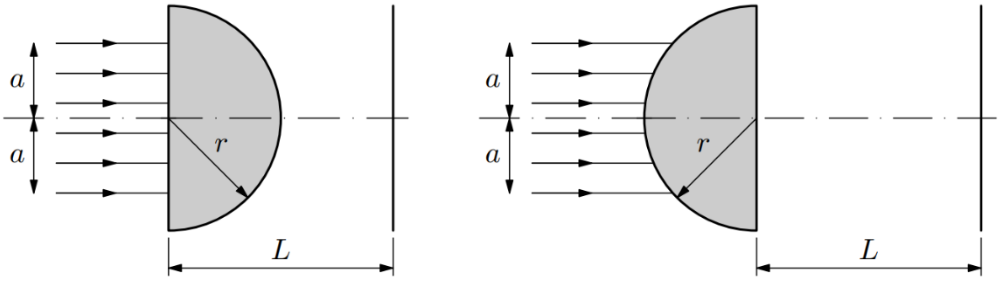
Như vậy góc hợp bởi $\overrightarrow{U_{MN}}$ và $\overrightarrow{U_{AB}}$ là

$$\varphi = 180^\circ - \alpha_1 - \beta = 66,3^\circ \text{ hay } \varphi = 1,16(\text{rad}).$$ — 0,25đ

	Vậy $u_{MN} = 68,69\cos(50t - 1,16)(\text{V})$ là phương trình cần tìm.	

Câu 5:

1. Cho một bán cầu thủy tinh có bán kính r = 4,0 cm, chiết suất n = 1,5. Người ta chiếu một chùm tia song song (tiết diện là hình tròn, bán kính a = 3,0 cm) tới mặt phẳng của bán cầu như hình 6a. Phía sau bán cầu người ta đặt một màn chắn vuông góc với trục đối xứng của bán cầu, cách mặt phẳng của bán cầu một đoạn L = 8,0 cm.



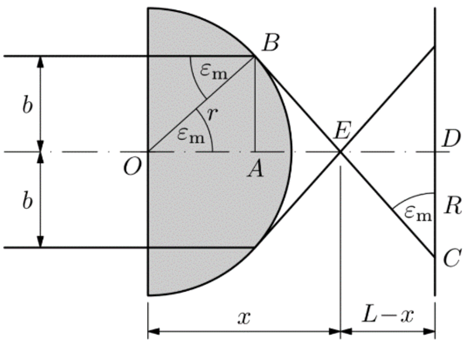
a. Tính bán kính của chùm sáng hứng được trên màn.

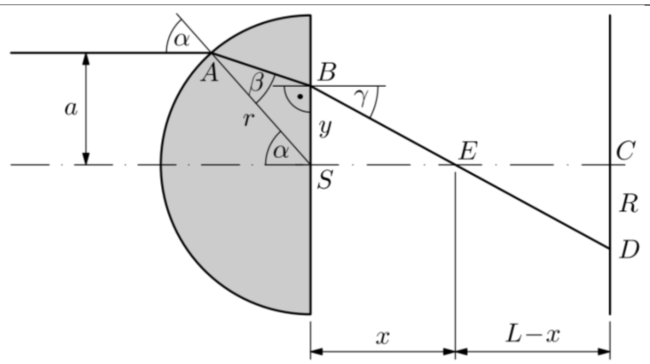
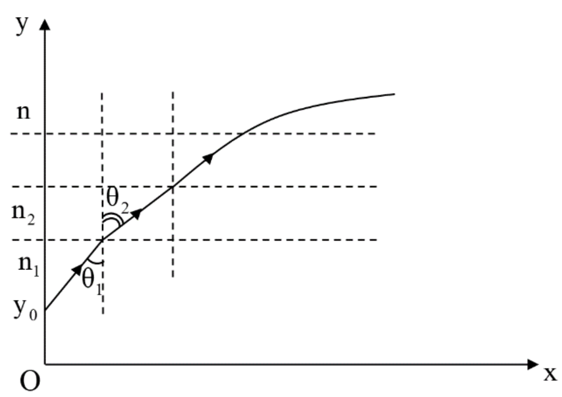
b. Bán kính này sẽ là bao nhiêu khi ta xoay thấu kính để chùm tia rơi vào mặt cầu của bán cầu như hình 6b?

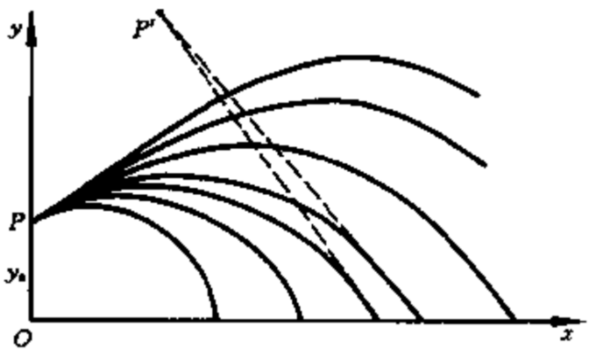
2. Như hình 6c ta thấy hình ảnh một con tàu lơ lửng trên mặt biển, hiện tượng này có tên là *Fata Morgana*, được tạo ra do sự chênh lệch nhiệt độ trong không khí. Phía trên mặt nước biển có lớp không khí lạnh, chiết suất của không khí giảm khi độ cao tăng lên và do đó làm ánh sáng bị bẻ cong xuống dưới nên ảo ảnh phía trên sẽ xuất hiện. Chiết suất của không khí bao gồm một số hạng không đổi và một số hạng khác thay đổi theo độ cao y có dạng là $n^2 = n_0^2 + n_P^2 e^{-\alpha y}$, trong đó n_0, n_P, α là những hằng số dương. Xét một vật thể ở độ cao y_0 so với mực nước biển, hãy tìm dạng phương trình đường truyền của tia sáng truyền từ vật đó đến mắt của một người quan sát trên mặt biển.

Hình 6c

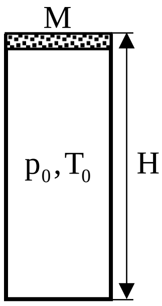
Cho biết công thức: $\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \arcsin\frac{y}{|a|} + C$ với a và C là các hằng số.

Câu 6	**Nội dung**	**Điểm**
1.a.	 Góc tới giới hạn: $\sin i_{gh} = \frac{1}{n} \Rightarrow i_{gh} = 41,8^0$	0,5

	Chỉ những góc tới mặt cong của bán cầu có góc tới nhỏ hơn i_{gh} mới cho được tia phản xạ, bán kính b của chùm tia chiếu qua được bán cầu là: $$b = r\sin i_{gh} = \frac{r}{n} = 2,67\,cm$$	
	Từ những quan hệ hình học ta thấy: $$\tan i_{gh} = \frac{L-x}{R} \Rightarrow R = \frac{L-x}{\tan i_{gh}} = \left(L - \frac{r}{\cos i_{gh}}\right)\frac{\cos i_{gh}}{\sin i_{gh}} = \left(L\cos i_{gh} - r\right)\frac{1}{\sin i_{gh}}$$ $$\Rightarrow R = L\sqrt{n^2-1} - nr = 2,94\text{ cm}$$	0,5
1.b.	 Đường đi của chùm tia sáng được thể hiện như trong hình, với các góc $$\sin\alpha = \frac{a}{r};\ \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n};\ \sin\gamma = n\sin(\alpha-\beta)$$	0,5
	Áp dụng định lý sin trong tam giác ABS, ta có được: $$\frac{y}{\sin\beta} = \frac{r}{\sin\left(90^0+\alpha-\beta\right)} = \frac{r}{\cos(\alpha-\beta)} \Rightarrow y = \frac{r\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$$	0,5
	Trong tam giác SBE, ta được: $x = \frac{R}{\tan\gamma}$ Tam giác BSE đồng dạng với tan giác DCE, ta được: $$\frac{y}{x} = \frac{R}{L-x} \Rightarrow R = \frac{y}{x}(L-x) = 2,25\text{ cm}$$	0,5
2.	Chia lớp không khí thành nhiều lớp mỏng, sao cho trong từng lớp ta xem như chiết suất không đổi. Ở độ cao $y = y_0$, chiết suất của lớp không khí là: $n_1 = \sqrt{n_0^2 + n_P^2 e^{-\alpha y_0}}$ và góc tới là θ_1.  Ta sẽ có được: $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 = ... = n\sin\theta = ...$	**0,5**

	$\sin\theta = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}-1 = \frac{n^2}{n_1^2\sin^2\theta_1}-1$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{n^2}{n_1^2\sin^2\theta_1}-1}$	
	Thay biểu thức của chiết suất n vào ta được: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n_1\sin\theta_1}\left(n_P^2e^{-\alpha y} - \left(n_1^2\sin^2\theta_1 - n_0^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n_Pe^{-\frac{\alpha}{2}y}}{n_1\sin\theta_1}\left(1-\frac{n_1^2\sin^2\theta_1-n_0^2}{n_P^2}e^{\alpha y}\right)^{\frac{1}{2}}$ Đặt $k=\sqrt{\frac{n_1^2\sin^2\theta_1-n_0^2}{n_P^2}};\ \varepsilon = ke^{\frac{\alpha}{2}y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{n_Pe^{-\frac{\alpha}{2}y}}{n_1\sin\theta_1}\left(1-\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{2n_1\sin\theta_1}{k\alpha n_P}\frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$	**0,5**
	Lấy tích phân hai vế ta được: $x = \frac{2n_1\sin\theta_1}{k\alpha n_P}\arcsin\left(ke^{\frac{\alpha}{2}y}\right) + C \Rightarrow y = \frac{2}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\alpha n_P}{2n_1\sin\theta_1}(x-C)\right)\right)$	**0,5**
	Tại x = 0 thì $y = y_0 \Rightarrow C = -\frac{2n_1\sin\theta_1}{k\alpha n_P}\arcsin\left(ke^{\frac{\alpha}{2}}y_0\right)$	**0,5**
		**0,5**

Câu 6: Một bình hình trụ hở đặt thẳng đứng, có chiều cao H = 30,0 cm và diện tích đáy S = 50,0 cm^2 như hình 6, chứa không khí ở điều kiện bình thường, tức là ở áp suất khí quyển $p_0 = 1{,}01.10^5$ Pa và nhiệt độ môi trường $T_0 = 273$ K. Một pít-tông mỏng, khối lượng M = 50,0 kg được đưa cẩn thận vào bình từ phía trên. Thành bình và pít-tông được làm bằng vật liệu dẫn nhiệt rất kém. Giả sử rằng không khí là khí lý tưởng lưỡng nguyên tử có khối lượng mol μ = 29,0 g/mol, gia tốc trọng trường là g = 9,8 m/s^2 và hằng số khí là R = 8,31 J/(mol.K). Bỏ qua nhiệt dung của pít-tông và bình, cũng như ma sát của pít-tông với thành bình. Pít-tông được giải phóng, nó sẽ thực hiện liên tiếp hai giai đoạn. Giai đoạn đầu tiên, pít-tông sẽ tiến hành dao động tắt dần với một nửa năng lượng truyền vào khí trong bình và một nửa tiêu tán ra môi trường xung quanh, sau đó ngừng dao động và dừng lại ở độ cao H_1. Ở giai đoạn tiếp theo, pit-tông chuyển động trong một khoảng thời gian đủ dài và cuối cùng dừng lại ở độ cao H_2.



Hình 6

1. Áp suất và nhiệt độ của khí trong bình khi kết thúc giai đoạn 1 là bao nhiêu? Xác định độ cao H_1 và H_2 của pít-tông trong bình sau giai đoạn 1 và giai đoạn 2?

2. Tìm tần số góc dao động nhỏ của pít-tông quanh vị trí cân bằng H_2, giả thiết quá trình này là đoạn nhiệt thuận nghịch và áp suất khí không thay đổi

3. Kết thúc giai đoạn thứ hai, bằng cách nào đó người ta tạo ra nhiều lỗ nhỏ ở đáy bình với tổng diện tích là $S_0 = 5.10^{-4}$ cm^2, với kích thước mỗi lỗ nhỏ hơn nhiều so với quãng đường tự do trung bình của các phân tử khí. Sau một thời gian, pít-tông bắt đầu chuyển động với một vận tốc không đổi. Tìm vận tốc không đổi của pít-tông và nhiệt độ của khí trong bình lúc này. Bỏ qua sự truyền nhiệt sang thành bình và pít-tông. Biết rằng số phân tử va chạm trung bình trên một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian là $\overline{N} = \frac{1}{4}n\overline{v}$, vận tốc nhiệt trung bình $\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ và động năng chuyển động tịnh tiến trung bình của các phân tử đi vào lỗ trống là $\overline{W} = 2k_BT$ trong đó $k_B = 1{,}38.10^{-23}\,J/K$ là hằng số Bôn-xơ-man.

Câu 6	Nội dung	Điểm
	Từ điều kiện cân bằng của pít-tông, ta tìm được: $p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S} = 1{,}99.10^5\,Pa$	0,5
	Ở giai đoạn đầu tiên, khí sẽ được nén và nung nóng đến một nhiệt độ nhất định. Do thành bình và pít-tông được làm bằng vật liệu dẫn nhiệt kém nên quá trình nén khí có thể được coi là đoạn nhiệt, nhưng bản thân quá trình không ở trạng thái cân bằng và không thể áp dụng phương trình đoạn nhiệt cho nó. Nội năng của khí tăng một lượng là: $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = \frac{A}{2} = \frac{Mg(H-H_1) + p_0S(H-H_1)}{2} = \frac{(Mg+p_0S)(H-H_1)}{2}$ (1)	0,5
1.	Phương trình trạng thái ở đầu và cuối giai đoạn 1 là: $p_0SH = nRT_0$ (2) $\left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)SH_1 = nRT_1$ (3)	0,5
	Từ (1), (2) và (3) ta dễ dàng tìm được: $T_1 = T_0\left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{Mg}{p_0S}\right) = 317K;\ H_1 = \frac{H}{1+\frac{Mg}{p_0S}}\left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{Mg}{p_0S}\right) = 17{,}7cm$	0,5
	Ở cuối giai đoạn 2 ta có được: $p_2 = p_0 + \frac{Mg}{S};\ T_2 = T_0 \Rightarrow H_2 = \frac{p_0S}{p_0S+Mg}H = 15{,}2$ cm	0,5
2.	Phương trình đoạn nhiệt là: $pV^\gamma = C \Rightarrow dp = -\gamma p\frac{dV}{V}$ Ta dễ dàng có được: $dp = -\gamma p_2\frac{x}{H_2} = -\gamma\frac{(p_0S+Mg)^2}{p_0S^2H}x \Rightarrow Mx'' = -Sdp \Leftrightarrow Mx'' = -\gamma\frac{(p_0S+Mg)^2}{p_0SH}x$ (4)	1,0

	Từ (4) ta được: $\omega = (p_0S + Mg)\sqrt{\dfrac{\gamma}{p_0SHM}}$	
3.	Khi pít-tông chuyển động với vận tốc không đổi, áp suất khí trong bình sẽ là: $p_3 = p_0 + \dfrac{Mg}{S}$ Bảo toàn số hạt: $\dfrac{p_0 + \dfrac{Mg}{S}}{k_BT_3}uS = \dfrac{p_0 + \dfrac{Mg}{S}}{k_BT_3}\sqrt{\dfrac{8k_BT_3}{\pi m}}S_0 - \dfrac{p_0}{k_BT_0}\sqrt{\dfrac{8k_BT_0}{\pi m}}S_0 \quad (5)$	0,5
	Tổng năng lượng được mang bởi mỗi phân tử là $W = 2k_BT + k_BT = 3k_BT$ Bảo toàn năng lượng $(p_0S + Mg)u = \dfrac{p_0 + \dfrac{Mg}{S}}{k_BT_3}\sqrt{\dfrac{8k_BT_3}{\pi m}}3k_BT_3S_0 - \dfrac{p_0}{k_BT_0}\sqrt{\dfrac{8k_BT}{\pi m}}3k_BT_0S_0 \,(6)$	0,5
	Từ (5) và (6) ta được: $u = \dfrac{6S_0}{S}\sqrt{\dfrac{2RT_0}{\pi\mu}}\left(\left(\dfrac{Mg}{S}+1\right)\sqrt{4+2\dfrac{Mg}{S}+\left(\dfrac{Mg}{S}\right)^2} - 2 - 2\dfrac{Mg}{S} - \left(\dfrac{Mg}{S}\right)^2\right) = 1{,}91.10^{-3}m/s$ $T_3 = T_0\left(5 + 4\dfrac{Mg}{S} + 2\left(\dfrac{Mg}{S}\right)^2 - 2\left(\dfrac{Mg}{S}+1\right)\sqrt{4+2\dfrac{Mg}{S}+\left(\dfrac{Mg}{S}\right)^2}\right) = 116K$	0,5

*** **HẾT** ***

Ban biên tập:

1. Thầy Đậu Quang Dương – tỉnh Đồng Nai
2. Thầy Nguyễn Văn Cư – tỉnh Đồng Nai
3. Thầy Nguyễn Anh Văn – TP Cần Thơ
4. Cô Nguyễn Thị Thu Uyên – TPHCM
5. Bạn Huỳnh Hiếu Nhơn – tỉnh Đồng Tháp
6. Bạn Trần Phan Anh Danh – TPHCM
7. Bạn Lưu Huy Minh Quang – học sinh trường THPT chuyên Hùng Vương, tỉnh Bình Dương
8. Điền Quang – Xứ Đàng Trong