Tài Liệu Ôn Tập Cơ Lý Thuyết

Trần Dương Anh Tài*
Hồ Hoàng Huy
*tranduonganhtai@gmail.com

Ngày 20 tháng 6 năm 2016

CÁC ĐẠI LƯỢNG TRONG TỌA ĐỘ SUY RỘNG

1. **Động năng trong tọa độ suy rộng**
   Động năng của cơ hệ có dạng:
$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right) \tag{1}$$
   Ta có:
$$\frac{d}{dt}\vec{r}_k(q_i,t) = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\overset{\bullet}{q}_i + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t} \tag{2}$$
   Thay (2) vào (1), ta được:
$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left[\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\overset{\bullet}{q}_i + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t}\right]\left[\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\overset{\bullet}{q}_j + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t}\right]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_i\partial q_j}\right)\overset{\bullet}{q}_i\overset{\bullet}{q}_j + \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t}\right)\overset{\bullet}{q}_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t}\right)^2\end{aligned}$$
   Vậy động năng trong tọa độ suy rộng có dạng:
$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{3}$$
   Trong đó:
$$\begin{aligned}T_2 &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}\overset{\bullet}{q}_i\overset{\bullet}{q}_j \ \text{ với } \ a_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k\frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_i\partial q_j};\\ T_1 &= \sum_{i=1}^{s} b_{ij}\overset{\bullet}{q}_i \ \text{ với } \ b_{ij}\sum_{k=1}^{N} m_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t};\\ T_0 &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t}\right)^2.\end{aligned}$$
   Tổng quát, động năng trong tọa độ suy rộng là tổng của ba phần. Phần động năng thứ nhất T_2 là hàm bậc 2 của vận tốc suy rộng, phần động năng thứ hai T_1 là hàm bậc 1 của vận tốc suy rộng và phần động năng thứ ba T_0 không phụ thuộc vận tốc suy rộng.

   Xét cơ hệ chịu liên kết dừng thì ta có $\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t} = 0$. Phần động năng T_0, T_1 bằng 0 nên động năng cơ hệ chịu liên kết dừng trong tọa độ suy rộng có dạng:
$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}\overset{\bullet}{q}_i\overset{\bullet}{q}_j. \tag{4}$$
   Vậy cơ hệ chịu liên kết dừng thì động năng là hàm bậc 2 của vận tốc suy rộng.

2. **Thế năng trong tọa độ suy rộng**
   Thế năng của cơ hệ trong trường lực thế là hàm của vị trí các chất điểm, có dạng:
$$U(\vec{r}_k) = U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_k) = U(x_1,y_1,z_1,...,x_N,y_N,z_N). \tag{5}$$
   Biểu diễn các tọa độ Descartes của các chất điểm qua tọa độ suy rộng q_i (với i =1,2,...,s) rồi thế vào (5), ta được thế năng trong tọa độ suy rộng có dạng:
$$U(q_1,q_2,...,q_s) = U(q_i). \tag{6}$$

Nếu $\vec{F}_k$ là lực thế, ta có:

$$\vec{F}_k = -\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_k}. \tag{7}$$

Nhân hai vế (7) cho $\dfrac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$, rồi lấy tổng theo chỉ số k từ $1 \rightarrow N$, ta được:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_k} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

hay:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Vậy nếu Q_i là lực suy rộng ứng với lực thế thì giữa lực này và thế năng suy rộng ta có:

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{8}$$

NGUYÊN LÝ TÁC DỤNG TỐI THIỂU (NGUYÊN LÝ HAMILTON)

Trong khoảng thời gian từ thời điểm t_1 đến t_2, chuyển động thật của cợ hệ được đặc trưng bởi hàm Lagrange có dạng:

$$L(q_1, ..., q_s, \dot{q}_1, ...\dot{q}_s, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t), \text{ với } i = 1, 2, ..., s. \tag{9}$$

Ldt gọi là tác dụng nguyên tố và tác dụng trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 được định nghĩa:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt. \tag{10}$$

Tổng quát, S cũng phụ thuộc liên kết nên $S = S(\alpha, t)$. Biên phân của tác dụng S là:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \text{ hay } \delta S = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta \alpha. \tag{11}$$

Nguyên lý Hamilton:

Chuyển động thật của cơ hệ trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2, chỉ xảy ra sao cho tác dụng S đạt cực trị hay biến phân của tác dụng S triệt tiêu, tức ta có: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$ hay $\left.\dfrac{\partial S}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

Trong cơ học lý thuyết, nguyên lý Hamilton là một tiên đề tổng quát. Từ nguyên lý này, ta có thể thành lập các phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE CỦA CƠ HỆ HOLONOME

1. **Phương trình Lagrange của cơ hệ chuyển động trong trường lực thế**

- **Thành lập phương trình Lagrange**

  Xét cơ hệ holonome só s tọa dộ suy rộng q_i (i=1,2,...,s), chuyển động trong trường lực thế. Trong trường hợp này, cơ hệ được gọi là cơ hệ bảo toàn. Trong khoảng thời gian chuyển động từ thời điểm t_1 đến t_2, các quỹ đạo khả dĩ và quỹ đạo thật có chung điểm đầu và điểm cuối. Ta có: $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.
  Chuyển động của cơ hệ được đặc trưng bởi hàm Lagrange L có dạng như sau:

  $$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q, t), \tag{12}$$

  trong đó T và U lần lươt là động năng và thế năng của cơ hệ.
  Biến phân tác dụng S:

  $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) dt. \tag{13}$$

  Xét tích phân sau trong (13)

  $$\begin{aligned}
  \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \left(\frac{dq_i}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d(\delta q_i) \\
  &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \left[d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) - d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\right] \\
  &= \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt \\
  &= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt
  \end{aligned}$$

  Thay kết quả tích phân vừa tính vào (13), ta được

  $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \delta q_i dt \tag{14}$$

  Theo nguyên lý Hamilton thì $\delta S = 0$ và do δq_i độc lập tuyến tính nên ta suy ra

  $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{15}$$

  s phương trình vi phân bậc 2 trên gọi là phương trình Lagrange. Giải (15), ta được s phương trình chuyển động của hệ $q_i(t)$.

- **Dạng khác của phương trình Lagrange**

  Thay hàm $L = T - U$ với U không phụ thuộc vào $\dot{q}_i$ vào phương trình (15), ta được

  $$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T - U) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T - U) = 0 \tag{16}$$

  $$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{17}$$

Ta có: $-\dfrac{\partial U}{\partial q_i} = Q$ (lực suy rộng thế). Vậy ta có dạng khác của phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{18}$$

Các phương trình Lagrange trên (13), (15) cũng đúng cho trường hợp hệ kín. Nội lực tương tác giữa các chất điểm trong hệ cũng là lực thế và tương ứng U là nội thế năng của hệ kín (thế năng ứng với nội lực tác dụng lên các chất điểm của hệ.)

2. **Phương trình Lagrange của cơ hệ chuyển động trong trường lực tổng quát** Xét cơ hệ holonome có s tọa độ suy rộng q_i (i=1,2,...,s), chuyển động trong trường lực có cả lực hoạt động thế $\vec{F}_k$ và lực hoạt động không thế $\vec{F}_k^*$. Trong trường hợp này, cơ hệ được gọi là cơ hệ không bảo toàn. Biểu thức lực suy rộng của hệ trong trường hợp này có dạng

$$\sum_{i=1}^{s}(\vec{F}_k + \vec{F}_k^*)\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = Q_i + Q_i^* \tag{19}$$

trong đó

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^* \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \tag{20}$$

là lực suy rộng ứng với lực không thế.

Phương trình Lagrange của cơ hệ chuyển động trong trường lực tổng quát có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + Q_i^* \tag{21}$$

hay ta có thể viết

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^* \tag{22}$$

trong đó L là hàm Lagrange tương ứng trong trường lực thế.
Ưu điểm nổi bật của phương trình Lagrange là khi giải ra quy luật chuyển động của cơ hệ ta không cần xác định phản lực liên kết tác dụng lên hệ. Trong cơ học, xác định được phản lực liên kết tác dung lên cơ hệ là một vấn đề rất khó và phức tạp.

CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÀM LAGRANGE

1. **Hàm Lagrange có tính chất cộng**
   Hàm Lagrange của cơ hệ gồm hai phần không tương tác nhau A và B (có các hàm Lagrange tương ứng là L_A và L_B) bằng tổng hàm Lagrange của hai phần ấy.

$$L(q_A, \dot{q}_A, q_B, \dot{q}_B, t) = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + L_B(q_B, \dot{q}_B, t) \tag{23}$$

   Do A và B không tương tác (A và B đủ xa), nên các tọa độ suy rộng của hệ A và B là q_A và q_B tương ứng độc lập với nhau. Hàm $L = L_A + L_B$ (với tọa độ suy rộng là q_A và q_B) đặc trưng cho chuyển động của hệ gồm hai phần A và B không tương tác. Ta cần chứng tỏ hàm $L = L_A + L_B$ cũng là hàm Lagrange.
   Lấy biến phân tác dụng tương ứng của L trong khoảng thời gian từ t_1 và t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L_A dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta L_B dt.$$

   Mà L_A và L_B là hàm Lagrange của A và B nên biến phân tác dụng tương ứng của chúng bằng 0. Do vậy ta có:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

   Theo nguyên lý Hamilton thì hàm $L = L_A + L_B$ là hàm Lagrange và nó đặc trưng cho chuyển động thật của hệ gồm hai phần không tương tác A và B.

2. **Hàm Lagrange không đơn trị**
   Các hàm Lagrange của cơ hệ sai khác nhau một đạo hàm toàn phần theo thời gian của một hàm $f(q_i, t)$ bất kỳ. Gọi L là hàm Lagrange của cơ hệ thì hàm L' xác định như sau cũng là hàm Lagrange của cơ hệ:

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q_i, t), \quad i = 1, 2, ..., s \tag{24}$$

   Thật vậy, biến phân tác dụng tương ứng của (24) trong khoảng từ t_1 đến t_2:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \delta L' dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \frac{d}{dt} f(q_i, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta d f(q_i, t)\end{aligned} \tag{25}$$

   Trong (25), ta có:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \text{ vì L là hàm Lagrange của cơ hệ,}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta d f(q_i, t) = \int_{t_1}^{t_2} d\left[\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i\right] = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} = 0; \text{ do } \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$$

   nên:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L' dt = 0.$$

   Theo nguyên lý Hamilton thì hàm L' cũng là hàm Lagrange của cơ hệ.

CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

1. **Các biến số chính tắc**
   Giải s phương trình Lagrange ta suy ra $q_i(t)$ và $\overset{\bullet}{q}_i(t)$, cho ta phương trình chuyển ddộng và vận tốc trong tọa độ suy rộng; 2s biến số: q_i và $\overset{\bullet}{q}_i$ gọi là biến số Lagrange. Tuy nhiên, q_i là biến độc lập thì ta vẫn có thể suy ra $\overset{\bullet}{q}_i$ nên $\overset{\bullet}{q}_i$ không là các biến độc lập.
   Mặt khác, chuyển động của cơ hệ cũng có thể biễu diễn qua tọa độ suy rộng q_i và động lượng suy rộng $p_i = \dfrac{\partial T}{\partial \overset{\bullet}{q}_i}$. 2s biến số này được gọi là các biến số chính tắc hay biến số Hamilton. Chúng lập nên một không gian 2s chiều, gọi là không gian pha. Khác với các biến số Lagrange, các biến số Hamilton độc lập với nhau.

2. **Hàm Hamilton. Các phương trình chính tắc**

   a/ **Hàm Hamilton và các phương trình chính tắc**
   Xét cơ hệ holonome chuyển động trong trường lực thế. Các động lượng suy rộng của hệ được xác định bởi công thức:
   $$p_i = \frac{\partial T}{\partial \overset{\bullet}{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \overset{\bullet}{q}_i}; \quad \text{U không phụ thuộc } \overset{\bullet}{q}_i \text{ nên đạo hàm bằng 0}$$
   Biến phân hàm Lagrange ta được:
   $$\delta L(q_i, \overset{\bullet}{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \overset{\bullet}{q}_i}\delta \overset{\bullet}{q}_i$$
   Thay p_i vào phương trình trên ta được:
   $$\begin{aligned}\delta L(q_i, \overset{\bullet}{q}_i, t) &= \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{s} p_i \delta \overset{\bullet}{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{s} \delta(p_i \overset{\bullet}{q}_i) - \sum_{i=1}^{s} q_i \delta \overset{\bullet}{p}_i. \end{aligned} \tag{26}$$
   Từ phương trình Lagrange ta suy ra:
   $$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{\bullet}{q}_i}\right) = \overset{\bullet}{p}_i \tag{27}$$
   Thay (27) vào (26) rồi chuyển vế, ta được:
   $$\delta\left(-L + \sum_{i=1}^{s} p_i \overset{\bullet}{q}_i\right) = -\sum_{i=1}^{s} p_i \delta \overset{\bullet}{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \overset{\bullet}{q}_i \delta p_i. \tag{28}$$
   Hàm $-L + \sum_{i=1}^{s} p_i \overset{\bullet}{q}_i$ là năng lượng của cơ hệ và theo vế bên phải của (28) thì nó là hàm của các biến số chính tắc. Đặt hàm này là H và H được gọi là Hamilton hay Hamiltonian:
   $$H(q_i, p_i, t) = -L(q_i, \overset{\bullet}{q}_i, t) + \sum_{i=1}^{s} \overset{\bullet}{q}_i p_i \tag{29}$$
   Vậy hàm Hamilton đặc trưng cho chuyển động thật của cơ hệ theo các biến số chính tắc. Biến phân hàm Hamilton của cơ hệ:
   $$\delta H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \tag{30}$$

So sánh (28) và (30), ta rút được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \\ -\dot{p}_i = \dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, ...s) \tag{31}$$

2s phương trình vi phân bậc nhất (31) được gọi là các phương trình chính tắc hay phương trình Hamilton. Giải hệ các phương trình này, ta suy ra q_i, p_i.

b/ **Hàm Hamilton khi cơ hệ chịu liên kết dừng**
Động năng cơ hệ là hàm bậc 2 của vận tốc suy rộng:

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

trong đó:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_j}$$

Trong trường hợp này, động lượng suy rộng có dạng: $p_i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}$, và hàm Lagrange tương ứng: $L = T - U = T_2 - U$. Hàm Hamilton của cơ hệ chịu liên kết dừng có dạng:

$$H = \sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i \dot{q}_i - T_2 + U}$$

Theo định lý về hàm thuần nhất (hàm đồng bậc), ta có: $\sum_{i=1}^{s} \dfrac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T2$. Ta có thể viết lại:

$$H = 2T_2 - T_2 + U = T_2 + U = E \tag{32}$$

c/ **Phương trình Hamilton của cơ hệ chịu liên kết không dừng**
Khi hệ chịu liên kết không dừng, động năng của cơ hệ có dạng:

$$T = T_2 + T_1 + T_0; \text{ trong đó } T_2,\ T_1,\ T_0 \text{ là động năng suy rộng bậc 2, bậc 1, bậc 0}$$

Hàm Lagrange tương ứng: $L = T_2 + T_1 + T_0 - U$. Hàm Hamilton của cơ hệ chịu liên kết không dừng có dạng:

$$H = \sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - (T_2 + T_1 + T_0 - U)$$

Theo định lý về hàm đồng bậc, ta có:

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T_2,$$

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = T_1,$$

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 0.$$

Vậy hàm Hamilton của cơ hệ chịu liên kết không dừng có dạng:

$$H = T_2 - T_0 + U \tag{33}$$

Nội dung trong tài liệu này được trích từ giáo trình Cơ học lý thuyết của thầy Ninh Quý Cường.