

NGUYỄN VĂN THÌN

BÀI TẬP

**XÁC SUẤT**

**VÀ THỐNG KÊ TOÁN**

9/2011

# Mục lục

<b>I</b>	<b>BÀI TẬP</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Tập hợp - Giải tích tổ hợp</b>	<b>1</b>
1.1	Tập hợp . . . . .	1
1.2	Giải tích tổ hợp . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Biến cố và xác suất</b>	<b>5</b>
2.1	Biến cố . . . . .	5
2.2	Xác suất cổ điển . . . . .	6
2.3	Xác suất hình học . . . . .	7
2.4	Các công thức tính xác suất cơ bản . . . . .	7
2.5	Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Biến ngẫu nhiên và hàm phân phối</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Một số phân phối xác suất thông dụng</b>	<b>23</b>
4.1	Phân phối Bernoulli, nhị thức . . . . .	23
4.2	Phân phối Poisson . . . . .	26
4.3	Phân phối chuẩn . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Lí thuyết mẫu</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>Ước lượng tham số thống kê</b>	<b>34</b>
6.1	Ước lượng trung bình tổng thể . . . . .	34
6.2	Ước lượng tỉ lệ tổng thể . . . . .	36

6.3	Tổng hợp . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Kiểm định giả thuyết thống kê</b>	<b>39</b>
7.1	So sánh kì vọng với một số cho trước . . . . .	39
7.2	So sánh hai kì vọng . . . . .	42
7.3	So sánh tỉ lệ với một số cho trước . . . . .	44
7.4	So sánh hai tỉ lệ . . . . .	45
<b>II</b>	<b>BÀI GIẢI</b>	<b>46</b>

Phần I

**BÀI TẬP**

# Chương 1

## Tập hợp - Giải tích tổ hợp

### 1.1 Tập hợp

**Bài tập 1.1.** Cho dãy tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ . Chứng minh rằng luôn luôn tồn tại dãy tập hợp  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ , sao cho:

- (a) Các  $B_i$  từng đôi một rời nhau;
- (b)  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ .

**Bài tập 1.2.** Chứng minh rằng các hệ thức sau đây tương đương nếu  $A$  và  $B$  là tập hợp con của  $\Omega$ :

$$A \cup B = \Omega, \overline{A} \subset B, \overline{B} \subset A.$$

**Bài tập 1.3.** Khẳng định cho rằng nếu  $A, B, C$  là tập hợp con của tập hợp  $\Omega$  sao cho

$$A \subset \overline{B \cup C} \text{ và } B \subset \overline{A \cup C}, \text{ thì } B = \emptyset,$$

có đúng không?

**Bài tập 1.4.** Chứng minh rằng nếu  $A, B, C$  là các tập hợp con của tập hợp  $\Omega$ , sao cho

$$A \cap B \subset \overline{C} \text{ và } A \cup C \subset B, \text{ thì } A \cap C = \emptyset$$

**Bài tập 1.5.** Tìm biểu thức đơn giản của các biểu thức sau:

- (a)  $(A \cup B)(A \cup C)$
- (b)  $(A \cup B)(A \cup \overline{B})$ ;
- (c)  $(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})$
- (d)  $(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})$

(e)  $(A \cup B)(B \cup C)$

**Bài tập 1.6.** Hệ thức nào trong các hệ thức sau đây đúng

(a)  $A \cup B \cup C = A \cup (B \setminus AB) \cup (C \setminus AC)$

(b)  $A \cup B = (A \setminus AB) \cup B$

(c)  $(A \cup B) \setminus A = B$

(d)  $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$

(e)  $ABC = AB(C \cup B)$

(f)  $AB \cup BC \cup CA \supset ABC$

(g)  $(AB \cup BC \cup CA) \subset (A \cup B \cup C)$

(h)  $A\overline{B}C \subset A \cup B$

(i)  $\overline{A \cup B}C = \overline{A}C \cup \overline{B}C$

(j)  $\overline{A \cup B}C = C \setminus (C(A \cup B))$

**Bài tập 1.7.** Chứng minh rằng:

(a)  $\overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup B}} = A$

(b)  $(A \cup B)\overline{AB} = A\overline{B} \cup B\overline{A}$

**Bài tập 1.8.** Chứng minh

(a) Nếu  $A \cup B = AB$  thì  $A = B$

(b)  $A \cup BC \supset (A \cup B)C$

(c) Nếu  $A_1 \subset A, B_1 \subset B$  và  $A \cap B = \emptyset$  thì  $A_1 \cap B_1 = \emptyset$

## 1.2 Giải tích tổ hợp

**Bài tập 1.9.** Một lô hàng có 50 sản phẩm.

(a) Có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên cùng lúc 5 sản phẩm để kiểm tra?

(b) Có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên lần lượt 5 sản phẩm?

**Bài tập 1.10.** Trong một hệ thống điện thoại nội bộ 3 số

- (a) có bao nhiêu máy có các chữ số khác nhau?
- (b) Có bao nhiêu máy có số 9 ở cuối còn các chữ số còn lại đều khác nhau?

**Bài tập 1.11.** Một lớp học có 40 học sinh gồm 20 nam và 20 nữ. Có bao nhiêu cách chia để trong mỗi nửa lớp có 10 nam sinh và 10 nữ sinh?

**Bài tập 1.12.** Nếu một người có 6 đôi vớ khác nhau và 4 đôi giày khác nhau. Có bao nhiêu cách kết hợp giữa vớ và giày?

**Bài tập 1.13.** Năm người A, B, C, D, E sẽ phát biểu trong một hội nghị. Có bao nhiêu cách sắp xếp để:

- (a) Người B phát biểu sau A.
- (b) Người A phát biểu xong thì đến lượt B.

**Bài tập 1.14.** Có 6 học sinh được sắp xếp ngồi vào 6 chỗ đã ghi số thứ tự trên một bàn dài. Tìm số cách xếp

- (a) 6 học sinh vào bàn.
- (b) 6 học sinh này vào bàn sao cho 2 học sinh A, B ngồi cạnh nhau.
- (c) 6 học sinh này ngồi vào bàn sao cho 2 học sinh A, B không ngồi cạnh nhau.

**Bài tập 1.15.** Một lớp có 40 học sinh. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn ra một ban cán sự lớp: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó, 1 thủ quỹ. Hỏi giáo viên chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn ban cán sự lớp?

**Bài tập 1.16.** Một hộp có 8 bi đỏ, 6 bi trắng, 4 bi vàng. Người ta chọn ra 6 bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

- (a) Không yêu cầu gì thêm.
- (b) Phải có 2 bi đỏ, 2 bi trắng, 2 bi vàng.
- (c) Có đúng 2 bi vàng.

**Bài tập 1.17.** Một đồn cảnh sát khu vực có 9 người. Trong ngày cần cử 3 người làm nhiệm vụ ở địa điểm A, 2 người ở địa điểm B còn 4 người trực tại đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công?

**Bài tập 1.18.** Một tổ sản xuất có 12 người, trong đó có 4 nữ, cần chia thành 4 nhóm đều nhau. Hãy tìm số cách phân chia sao cho mỗi nhóm có 1 nữ?

**Bài tập 1.19.** Xếp 12 hành khách lên 4 toa tàu. Tìm số cách sắp xếp:

- (a) Mỗi toa có 3 hành khách.

(b) Một toa có 6 hành khách, một toa có 4 hành khách, 2 toa còn lại mỗi toa có 1 hành khách.

**Bài tập 1.20.** Giả sử  $m, n, r$  là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$C_m^0 C_{n-m}^r + C_m^1 C_{n-m}^{r-1} + \cdots + C_m^r C_{n-m}^0 = C_n^r$$

**Bài tập 1.21.** Chứng minh rằng

$$(a) \quad C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$$

$$(b) \quad 2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + \cdots + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$$

**Bài tập 1.22.** Cho  $m, n, r$  là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$(a) \quad \sum_{k=0}^m C_{n-k}^r = C_{n+1}^{r+1} - C_{n-m}^{r+1}$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^m (-1)^k C_n^k = (-1)^m C_{n-1}^m$$

**Bài tập 1.23.** Chứng minh rằng

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

**Bài tập 1.24.** Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n \frac{2n!}{(k!)^2 [(n-k)!]^2} = (C_{2n}^n)^2$$



## Chương 2

# Biến cố và xác suất

### 2.1 Biến cố

**Bài tập 2.1.** Khi nào thì có các đẳng thức sau:

(a)  $A + B = \overline{A}$

(b)  $AB = \overline{A}$

(c)  $A + B = AB$

Hai sự kiện  $A$  và  $\overline{A + B}$  có xung khắc không?

**Bài tập 2.2.** Một chiếc tàu thủy gồm một bánh lái, 4 nồi hơi, 2 tuốc bin. Gọi  $A, B_i (i = 1, \dots, 4), C_j (j = 1, 2)$  lần lượt là các sự kiện bánh lái hoạt động tốt, nồi hơi thứ  $i$  hoạt động tốt, tuốc bin thứ  $j$  hoạt động tốt. Biết rằng tàu hoạt động tốt khi và chỉ khi bánh lái, ít nhất 1 nồi hơi và ít nhất một tuốc bin đều hoạt động tốt. Gọi  $D$  là sự kiện tàu hoạt động tốt. Hãy biểu diễn  $D$  và  $\overline{D}$  qua  $A, B_i, C_j$ .

**Bài tập 2.3.** Có 4 sinh viên làm bài thi. Kí hiệu  $B_i (i = 1, \dots, 4)$  là biến cố sinh viên thứ  $i$  làm bài thi đạt yêu cầu. Hãy biểu diễn các biến cố sau đây:

(a) Có đúng một sinh viên đạt yêu cầu.

(b) Có đúng ba sinh viên đạt yêu cầu.

(c) Có ít nhất một sinh viên đạt yêu cầu.

(d) Không có sinh viên nào đạt yêu cầu.

**Bài tập 2.4.** Xét phép thử: Gieo một xúc xắc 2 lần. Mô tả không gian biến cố sơ cấp ứng với phép thử trên?

Gọi  $A$ : “Tổng số nốt chia hết cho 3”,  $B$ : “Trị tuyệt đối của hiệu số nốt là số chẵn”. Biểu diễn  $A, B$ ?

**Bài tập 2.5.** Cho  $A, B$  là hai biến cố ngẫu nhiên đã biết. Tìm biến cố  $X$  từ hệ thức:

$$\overline{X + A} + \overline{X + \overline{A}} = B$$

**Bài tập 2.6.** Xét phép thử: Bắn không hạn chế vào 1 bia cho đến khi trúng bia lần đầu tiên thì dừng. Biểu diễn không gian biến cố sơ cấp của biến cố trên. Chỉ ra một hệ đầy đủ các biến cố.

**Bài tập 2.7.** Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi  $A_i$  là biến cố xảy ra khi số nốt ở mặt trên con xúc xắc thứ nhất là  $i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ),  $B_k$  biến cố xảy ra khi số nốt ở mặt trên con xúc xắc thứ hai là  $k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ).

(a) Hãy mô tả các biến cố  $A_6B_6, A_3B_5$

(b) Viết bằng kí hiệu các biến cố:

- $A$ : “hiệu giữa số nốt ở mặt trên con xúc xắc thứ nhất và thứ hai có trị số tuyệt đối bằng ba”.
- $B$ : “số nốt ở mặt trên hai con xúc xắc bằng nhau”.

(c) Hãy chỉ ra một nhóm đầy đủ các biến cố.

## 2.2 Xác suất cổ điển

**Bài tập 2.8.** Một nhóm  $n$  người xếp ngẫu nhiên thành một hàng dài.

- (a) Tìm xác suất để 2 người định trước đứng cạnh nhau.
- (b) Tìm xác suất để 2 người đó đứng cách nhau 2 người.
- (c) Tìm xác suất để 2 người đó đứng cách nhau  $r$  người ( $0 < r < n - 2$ ).
- (d) Xét trường hợp khi họ xếp thành một vòng tròn.

**Bài tập 2.9.** Thang máy của một tòa nhà 7 tầng, xuất phát từ tầng một với 3 người khách. Tính xác suất để:

- (a) Tất cả cùng ra ở tầng bốn.
- (b) Tất cả cùng ra ở một tầng.
- (c) Mỗi người ra một tầng khác nhau.

**Bài tập 2.10.** Có  $n$  quả cầu được phân ngẫu nhiên lần lượt vào  $n$  hộp, mỗi hộp có thể chứa nhiều quả cầu. Khi phân biệt hộp và cầu, tìm xác suất để mỗi hộp chứa một quả cầu.

**Bài tập 2.11.** Cho một lô hàng gồm  $n$  sản phẩm trong đó có  $m$  sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng đó  $k$  sản phẩm. Tìm xác suất sao cho trong số sản phẩm lấy ra có đúng  $s$  sản phẩm xấu ( $s < k$ ).

**Bài tập 2.12.** Ta gieo liên tiếp 4 lần một đồng tiền cân đối đồng chất. Tìm xác suất của các biến cố:

- (a)  $A$ : “Có hai mặt sấp”.
- (b)  $B$ : “Có ba mặt ngửa”.
- (c)  $C$ : “Có ít nhất một mặt sấp”.

**Bài tập 2.13.** Mười hai sản phẩm được sắp ngẫu nhiên vào ba hộp. Tìm xác suất để hộp thứ nhất có chứa ba sản phẩm.

**Bài tập 2.14.** Gieo đồng thời hai con xúc xắc đồng chất cân đối  $n$  lần liên tiếp. Tìm xác suất để xuất hiện ít nhất một lần hai mặt trên cùng có 6 nốt.

## 2.3 Xác suất hình học

**Bài tập 2.15.** Một thanh sắt thẳng được bẻ thành ba khúc một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để ba khúc đó tạo được thành một tam giác. Biết rằng thanh sắt dài  $l$  (đơn vị dài.)

**Bài tập 2.16.** (Bài toán Buffon) Trên mặt phẳng có các đường thẳng song song cách đều nhau  $2a$ , gieo ngẫu nhiên một cây kim có độ dài  $2l$  ( $l < a$ ). Tìm xác suất để cây kim cắt một đường thẳng nào đó.

**Bài tập 2.17.** Trên đường tròn bán kính  $R$  có một điểm  $A$  cố định, chọn ngẫu nhiên một điểm  $B$ . Tìm xác suất để cung  $AB$  không quá  $R$ .

**Bài tập 2.18.** Trên đoạn thẳng  $OA$  ta gieo một cách ngẫu nhiên hai điểm  $B, C$  có tọa độ tương ứng là  $OB = x, OC = y$  ( $y \geq x$ ). Tìm xác suất sao cho độ dài của đoạn  $BC$  bé hơn độ dài của đoạn  $OB$ .

## 2.4 Các công thức tính xác suất cơ bản

**Bài tập 2.19.** Một hệ thống được cấu tạo bởi 3 bộ phận độc lập nhau. Hệ thống sẽ hoạt động nếu ít nhất 2 trong 3 bộ phận còn hoạt động. Nếu độ tin cậy của mỗi bộ phận là 0.95 thì độ tin cậy của hệ thống là bao nhiêu?

**Bài tập 2.20.** Một hộp có 7 bi đỏ và 3 bi đen.

- (a) Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp ra để kiểm tra. Tính xác suất nhận được bi đen.
- (b) Lấy ngẫu nhiên lần lượt có hoàn lại 2 bi. Tính xác suất để lấy được 2 bi đen.
- (c) Lấy ngẫu nhiên ra 2 viên bi từ hộp. Tính xác suất để lấy được 2 bi đen.

**Bài tập 2.21.** Cho  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{2}$  và  $P(A + B) = \frac{3}{4}$ .  
Tính  $P(AB)$ ,  $P(\overline{A} \cdot \overline{B})$ ,  $P(\overline{A} + \overline{B})$ ,  $P(A\overline{B})$ ,  $P(\overline{A}B)$ .

**Bài tập 2.22.** Tỷ lệ người mắc bệnh tim trong một vùng dân cư là 9%, mắc bệnh huyết áp là 12%, mắc cả hai bệnh là 7%. Chọn ngẫu nhiên một người trong vùng. Tính xác suất để người đó

- (a) Bị bệnh tim hay bị bệnh huyết áp.
- (b) Không bị bệnh tim cũng không bị bệnh huyết áp.
- (c) Không bị bệnh tim hay không bị bệnh huyết áp.
- (d) Bị bệnh tim nhưng không bị bệnh huyết áp.
- (e) Không bị bệnh tim nhưng bị bệnh huyết áp.

**Bài tập 2.23.** Bạn quên mất số cuối cùng trong số điện thoại cần gọi (số điện thoại gồm 6 chữ số) và bạn chọn số cuối cùng này một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để bạn gọi đúng số điện thoại này mà không phải thử quá 3 lần. Nếu biết số cuối cùng là số lẻ thì xác suất này là bao nhiêu ?

**Bài tập 2.24.**

- (a) Cho  $A, B$  là hai biến cố độc lập. Chứng minh rằng  $\overline{A}, B$ ;  $A, \overline{B}$  và  $\overline{A}, \overline{B}$  đều là các cặp biến cố độc lập.
- (b) Cho  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là  $n$  biến cố độc lập. Chứng minh rằng  $\overline{A}_1, A_2, \dots, A_n$  cũng là  $n$  biến cố độc lập. Từ đó suy ra rằng nếu xét  $n$  biến cố  $B_1, B_2, \dots, B_n$  với  $B_i = A_i$  hoặc  $B_i = \overline{A}_i$  thì  $B_1, B_2, \dots, B_n$  cũng là  $n$  biến cố độc lập.

**Bài tập 2.25.** Một đợt xổ số phát hành  $N$  vé, trong đó có  $M$  vé có thưởng. Một người mua  $r$  vé ( $r < N - M$ ). Tính xác suất để người đó có ít nhất một vé trúng thưởng.

**Bài tập 2.26.** Một người có 3 con gà mái, 2 con gà trống nhốt chung một lồng. Một người đến mua, người bán bắt ngẫu nhiên ra một con. Người mua chấp nhận mua con đó.

- (a) Tìm xác suất để người đó mua được con gà mái.  
Người thứ hai đến mua, người bán lại bắt ngẫu nhiên ra một con.

- (b) Tìm xác suất người thứ hai mua được gà trống, biết rằng người thứ nhất mua được gà mái.
- (c) Xác suất trên bằng bao nhiêu nếu người bán gà quên mất rằng con gà bán cho người thứ nhất là gà trống hay gà mái?

**Bài tập 2.27.** Có một nhóm  $n$  sinh viên, mỗi người có một áo mưa giống hệt nhau. Một hôm trời mưa, cả nhóm cùng đến lớp và treo áo ở mắc áo. Lúc ra về vì vội vàng mỗi người lấy hú họa một cái áo. Tính xác suất có ít nhất một sinh viên chọn đúng áo của mình.

**Bài tập 2.28.** Một người viết  $n$  lá thư và bỏ  $n$  lá thư này vào trong  $n$  phong bì đã viết sẵn địa chỉ. Tìm xác suất sao cho có ít nhất một lá thư được bỏ đúng vào phong bì của nó.

**Bài tập 2.29.** Ba xạ thủ, mỗi người bắn một viên đạn vào mục tiêu với xác suất trúng đích của mỗi người là 0.6; 0.7; 0.8. Tìm xác suất

- (a) chỉ có người thứ hai bắn trúng.
- (b) có đúng một người bắn trúng.
- (c) có ít nhất một người bắn trúng.
- (d) cả ba người đều bắn trúng.
- (e) có đúng hai người bắn trúng.
- (f) có ít nhất hai người bắn trúng.
- (g) có không quá hai người bắn trúng.

**Bài tập 2.30.** Cho hai biến cố xung khắc  $A$  và  $B$ , sao cho  $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ . Chứng minh rằng  $A$  và  $B$  phụ thuộc nhau.

**Bài tập 2.31.** Ba con ngựa  $a, b, c$  trong một cuộc đua ngựa. Nếu xuất hiện  $bac$  có nghĩa là  $b$  đến đích trước, sau đó là  $a$  và về cuối là  $c$ . Khi đó tập hợp tất cả các khả năng xuất hiện là

$$\Omega = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}.$$

Giả sử rằng  $P[\{abc\}] = P[\{acb\}] = 1/18$  và bốn khả năng còn lại đều có xác suất xảy ra là  $2/9$ . Hơn nữa, ta định nghĩa các biến cố

$$A = "a \text{ đến đích trước } b" \quad \text{và} \quad B = "a \text{ đến đích trước } c"$$

- (a) Hai biến cố  $A$  và  $B$  có tạo thành một hệ đầy đủ của  $\Omega$ ?
- (b) Hai biến cố  $A$  và  $B$  có độc lập nhau?

**Bài tập 2.32.** Có tồn tại hai biến cố xung khắc và độc lập không?

**Bài tập 2.33.** Một máy tính điện tử gồm có  $n$  bộ phận. Xác suất hỏng trong khoảng thời gian  $T$  của bộ phận thứ  $k$  bằng  $p_k (k = 1, 2, \dots, n)$ . Nếu dù chỉ một bộ phận bị hỏng thì máy tính ngừng làm việc. Tìm xác suất để máy tính ngừng làm việc trong khoảng thời gian  $T$ .

**Bài tập 2.34.** Chứng minh rằng nếu

$$P(A|B) > P(A), \text{ thì } P(B|A) > P(B)$$

**Bài tập 2.35.** Giả sử  $P(AB) = 1/4$ ,  $P(A|\bar{B}) = 1/8$  và  $P(B) = 1/2$ . Tính  $P(A)$ .

**Bài tập 2.36.** Biết rằng ta đã nhận được ít nhất một mặt ngửa trong 3 lần tung đồng xu độc lập. Hỏi xác suất đạt được cả 3 mặt ngửa là bao nhiêu?

**Bài tập 2.37.** Tung một con xúc sắc hai lần độc lập nhau. Biết rằng lần tung thứ nhất được số nốt chẵn. Tính xác suất tổng số nốt hai lần tung bằng 4.

**Bài tập 2.38.** Giả sử  $P(A) = P(B) = 1/4$  và  $P(A|B) = P(B)$ . Tính  $P(A\bar{B})$ .

**Bài tập 2.39.** Bắn liên tiếp vào một mục tiêu cho đến khi có một viên đạn đầu tiên rơi vào mục tiêu thì ngừng bắn. Tìm xác suất sao cho phải bắn đến viên thứ 6, biết rằng xác suất trúng đích của mỗi viên đạn là 0.2 và các lần bắn là độc lập.

**Bài tập 2.40.** Giả sử các biến cố  $A_1, \dots, A_n$  độc lập có xác suất tương ứng  $P(A_k) = p_k (k = 1, \dots, n)$ . Tìm xác suất sao cho:

- (a) không một biến cố nào trong các biến cố đó xuất hiện.
  - (b) có ít nhất một biến cố trong các biến cố đó xuất hiện.
- Từ đó suy ra công thức khai triển tích

$$\prod_{k=1}^n (1 - p_k)$$

**Bài tập 2.41.** Có ba tiêu chí phổ biến cho việc chọn mua một chiếc xe hơi mới nào đó là  $A$ : hộp số tự động,  $B$ : động cơ V6, và  $C$ : điều hòa nhiệt độ. Dựa trên dữ liệu bán hàng trước đây, ta có thể giả sử rằng  $P(A) = 0.7$ ,  $P(B) = 0.75$ ,  $P(C) = 0.80$ ,  $P(A + B) = 0.80$ ,  $P(A + C) = 0.85$ ,  $P(B + C) = 0.90$  và  $P(A + B + C) = 0.95$ , với  $P(A)$  là xác suất người mua bất kì chọn tiêu chí  $A$ , v.v.... Tính xác suất của các biến cố sau:

- (a) người mua chọn ít nhất một trong 3 tiêu chí.
- (b) người mua không chọn tiêu chí nào trong 3 tiêu chí trên.
- (c) người mua chỉ chọn tiêu chí điều hòa nhiệt độ.
- (d) người mua chọn chính xác một trong 3 tiêu chí.

## 2.5 Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes

**Bài tập 2.42.** Giả sử  $P(B|A_1) = 1/2$ ,  $P(B|A_2) = 1/4$  với  $A_1$  và  $A_2$  là hai biến cố đồng khả năng và tạo thành một hệ đầy đủ các biến cố. Tính  $P(A_1|B)$ .

**Bài tập 2.43.** Một hộp đựng 10 phiếu trong đó có 2 phiếu trúng thưởng. Có 10 người lần lượt rút thăm. Tính xác suất nhận được phần thưởng của mỗi người.

**Bài tập 2.44.** Có hai hộp đựng bi. Hộp 1 đựng 20 bi trong đó có 5 bi đỏ và 15 bi trắng. Hộp 2 đựng 15 bi trong đó có 6 bi đỏ và 9 bi trắng. Lấy một bi ở hộp 1 bỏ vào hộp 2, trộn đều rồi lấy ra một bi. Tính xác suất nhận được bi đỏ? bi trắng?

**Bài tập 2.45.** Trong một vùng dân cư, cứ 100 người thì có 30 người hút thuốc lá. Biết tỷ lệ người bị viêm họng trong số người hút thuốc lá là 60%, trong số người không hút thuốc lá là 30%. Khám ngẫu nhiên một người và thấy người đó bị viêm họng.

- (a) Tìm xác suất để người đó hút thuốc lá.
- (b) Nếu người đó không bị viêm họng thì xác suất để người đó hút thuốc lá là bao nhiêu.

**Bài tập 2.46.** Một trung tâm chẩn đoán bệnh dùng một phép kiểm định  $T$ . Xác suất để một người đến trung tâm mà có bệnh là 0.8. Xác suất để người khám có bệnh khi phép kiểm định dương tính là 0.9 và xác suất để người khám không có bệnh khi phép kiểm định âm tính là 0.5. Tính các xác suất

- (a) phép kiểm định là dương tính.
- (b) phép kiểm định cho kết quả đúng.

**Bài tập 2.47.** Một cặp trẻ sinh đôi có thể do cùng một trứng (sinh đôi thật) hay do hai trứng khác nhau sinh ra (sinh đôi giả). Các cặp sinh đôi thật luôn luôn có cùng giới tính. Các cặp sinh đôi giả thì giới tính của mỗi đứa độc lập với nhau và có xác suất là 0.5. Thống kê cho thấy 34% cặp sinh đôi là trai; 30% cặp sinh đôi là gái và 36% cặp sinh đôi có giới tính khác nhau.

- (a) Tính tỷ lệ cặp sinh đôi thật.
- (b) Tìm tỷ lệ cặp sinh đôi thật trong số các cặp sinh đôi có cùng giới tính.

**Bài tập 2.48.** Có 10 hộp bi, trong đó có 4 hộp loại I, 3 hộp loại II, còn lại là hộp loại III. Hộp loại I có 3 bi trắng và 5 đỏ, hộp loại II có 4 bi trắng và 6 bi đỏ, hộp loại III có 2 bi trắng và 2 bi đỏ.

- (a) Chọn ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy hù họa 1 bi. Tìm xác suất để được bi đỏ.
- (b) Chọn ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy 1 bi thì được bi trắng. Tìm xác suất để bi lấy ra thuộc loại II.

**Bài tập 2.49.** Có hai lô sản phẩm, lô thứ nhất có 10 sản phẩm loại I và 2 sản phẩm loại II. Lô thứ hai có 16 sản phẩm loại I và 4 sản phẩm loại II. Từ mỗi lô ta lấy ngẫu nhiên một sản phẩm. Sau đó, từ 2 sản phẩm thu được lấy hù họa ra một sản phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra sau cùng là sản phẩm loại I.

**Bài tập 2.50.** Có 2 lô gà. Lô thứ nhất gồm 15 con, trong đó có 3 con gà trống. Lô thứ hai gồm 20 con, trong đó có 4 gà trống. Một con từ lô thứ hai nhảy sang lô thứ nhất. Sau đó từ lô thứ nhất ta bắt ngẫu nhiên ra một con. Tìm xác suất để con gà bắt ra là gà trống.

**Bài tập 2.51.** Ba máy tự động sản xuất cùng một loại chi tiết, trong đó máy I sản xuất 25%, máy II sản xuất 30% và máy III sản xuất 45% tổng sản lượng. Tỷ lệ phế phẩm của các máy lần lượt là 0.1%; 0.2%; 0.4%. Tìm xác suất để khi chọn ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm từ kho thì

- (a) được chi tiết phế phẩm.
- (b) chi tiết phế phẩm đó do máy II sản xuất.

**Bài tập 2.52.** Giả sử 3 máy  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  sản xuất lần lượt 500, 1000, 1500 linh kiện mỗi ngày với tỉ lệ phế phẩm tương ứng là 5%, 6% và 7%. Vào cuối ngày làm việc nào đó, người ta lấy một linh kiện được sản xuất bởi một trong 3 máy trên một cách ngẫu nhiên, kết quả là được một phế phẩm. Tìm xác suất linh kiện này được sản xuất bởi máy  $M_3$ .

**Bài tập 2.53.** Ba khẩu pháo cùng bắn vào một mục tiêu với xác suất trúng đích của mỗi khẩu là 0.4; 0.7; 0.8. Biết rằng xác suất để mục tiêu bị tiêu diệt khi trúng một phát đạn là 30%, khi trúng 2 phát đạn là 70%, còn trúng 3 phát đạn thì chắc chắn mục tiêu bị tiêu diệt. Giả sử mỗi khẩu pháo bắn 1 phát.

- (a) Tính xác suất để mục tiêu bị tiêu diệt.
- (b) Biết rằng mục tiêu đã bị tiêu diệt. Tính xác suất để khẩu thứ 3 có đóng góp vào thành công đó.

**Bài tập 2.54.** Hộp I có 10 linh kiện trong đó có 3 bị hỏng. Hộp II có 15 linh kiện trong đó có 4 bị hỏng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một linh kiện.

- (a) Tính xác suất để cả 2 linh kiện lấy ra đều hỏng.
- (b) Số linh kiện còn lại trong 2 hộp đem bỏ vào hộp III. Từ hộp III lấy ngẫu nhiên ra 1 linh kiện. Tính xác suất để linh kiện lấy ra từ hộp III bị hỏng.
- (c) Biết linh kiện lấy ra từ hộp III là hỏng. Tính xác suất để 2 linh kiện lấy ra từ hộp I và II lúc ban đầu là hỏng.

**Bài tập 2.55.** Có 3 cửa hàng I, II, III cùng kinh doanh sản phẩm Y, trong đó thị phần của cửa hàng I, III như nhau và gấp đôi thị phần của cửa hàng II. Tỷ lệ sản phẩm loại A trong 3 cửa hàng lần lượt là 70%, 75% và 50%. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 1 cửa hàng và từ đó mua một sản phẩm.



- (a) Tính xác suất để khách hàng mua được sản phẩm loại  $A$ .
- (b) Giả sử khách hàng đã mua được sản phẩm loại  $A$ , hỏi khả năng người ấy đã mua được ở cửa hàng nào là nhiều nhất.

**Bài tập 2.56.** Cho  $\varepsilon$  là một phép thử ngẫu nhiên với 3 biến cố sơ cấp có thể xảy ra là  $A$ ,  $B$  và  $C$ . Giả sử ta tiến hành  $\varepsilon$  vô hạn lần và độc lập nhau. Tính theo  $P(A), P(B)$  xác suất biến cố  $A$  xuất hiện trước  $B$ .

## Chương 3

# Biến ngẫu nhiên và hàm phân phối

**Bài tập 3.1.** Cho biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$  có bảng phân phối xác suất cho bởi bảng sau:

$X$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$\mathbb{P}$	$1/8$	$2/8$	$2/8$	$2/8$	$1/8$

- (a) Tìm hàm phân phối xác suất  $F(x)$ .
- (b) Tính  $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1)$  và  $\mathbb{P}(X \leq -1 \text{ hoặc } X = 2)$ .
- (c) Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên  $Y = X^2$ .

**Bài tập 3.2.** Biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$  có hàm xác suất cho bởi

$$f(x) = \frac{2x+1}{25}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

- (a) Lập bảng phân phối xác suất của  $X$ .
- (b) Tính  $\mathbb{P}(2 \leq X < 4)$  và  $\mathbb{P}(X > -10)$ .

**Bài tập 3.3.** Gọi  $X$  là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất sau

$X$	$-1$	$0$	$3$
$\mathbb{P}$	$0.5$	$0.2$	$0.3$

- (a) Tính độ lệch chuẩn của  $X$ .
- (b) Tính kì vọng của  $X^3$ .

- (c) Tìm hàm phân phối của  $X$ .
- (d) Ta định nghĩa  $Y = X^2 + X + 1$ . Lập bảng phân phối xác suất của  $Y$ .

**Bài tập 3.4.** Biến ngẫu nhiên  $X$  có hàm mật độ  $f(x)$  như sau

$$f(x) = \begin{cases} kx(2-x) & \text{khi } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

- (a) Xác định giá trị của  $k$  để  $f(x)$  là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên  $X$ . Với  $k$  vừa tìm được tính kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên  $X$ .
- (b) Tìm hàm phân phối  $F(x)$  của biến ngẫu nhiên  $X$ .
- (c) Tìm hàm phân phối  $G(y)$  của biến ngẫu nhiên  $Y = X^3$ .

**Bài tập 3.5.** Biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Tính  $\mathbb{P}(3 \leq X)$ .
- (b) Tìm giá trị của  $a$  sao cho  $\mathbb{P}(X \leq a) = 0, 1$ .
- (c) Xác định hàm phân phối và mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên  $Y = \sqrt{X}$ .

**Bài tập 3.6.** Tính  $P(X \geq 8)$  nếu

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{96}x^3e^{-x/2} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

**Bài tập 3.7.** Cho

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi} - x^2} \quad \text{với} \quad -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Tính  $P(X < 0)$ .

**Bài tập 3.8.** Biến ngẫu nhiên  $X$  có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} a \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & \text{khi } x \geq 0 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Xác định:

- (a) Hằng số  $a$ .
- (b) Hàm phân phối xác suất  $F(x)$
- (c) Kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên  $X$ .
- (d) Kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên  $Y = (X/2) - 1$ .

**Bài tập 3.9.** Cho  $X$  là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ sau

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & \text{nếu } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{nếu } |x| > 1 \end{cases}$$

với  $c$  là một hằng số dương. Tìm

- (a) hằng số  $c$
- (b) trung bình của  $X$
- (c) phương sai của  $X$
- (d) hàm phân phối  $F_X(x)$ .

**Bài tập 3.10.** Biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{khi } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tìm hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của các biến ngẫu nhiên sau:

- (a)  $Y = X(2 - X)$ .
- (b)  $Z = 4 - X^3$ .
- (c)  $T = 3X + 2$ .

**Bài tập 3.11.** Tính phương sai của  $\sqrt{X}$  nếu

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{nếu } x = 0 \\ 1/2 & \text{nếu } x = 1 \\ 1/4 & \text{nếu } x = 4 \end{cases}$$

**Bài tập 3.12.** Tính phân vị mức 25% (tức là giá trị  $x_{0.25}$  sao cho  $P(X < x_{0.25}) = 0.25$ ) của biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  có hàm mật độ sau:

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

**Bài tập 3.13.** Cho

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ x/2 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ x/6 + 1/3 & \text{nếu } 1 < x < 4 \\ 1 & \text{nếu } x \geq 4 \end{cases}$$

là hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục  $X$ .

- (a) Tính hàm mật độ của  $X$ .
- (b) Tìm phân vị mức 75% của  $X$  (tức là tìm  $x_{0.75}$  sao cho  $P(X < x_{0.75}) = 0.75$ ).
- (c) Tính kì vọng của  $X$ .
- (d) Tính  $E(1/X)$ .
- (e) Ta định nghĩa

$$Y = \begin{cases} -1 & \text{nếu } X \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } X > 1 \end{cases}$$

- (i) Tìm  $F_Y(0)$ .
- (ii) Tính phương sai của  $Y$ .

**Bài tập 3.14.** Biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

- (a) Xác định hàm phân phối xác suất  $F(x)$  của biến ngẫu nhiên  $X$ .
- (b) Tính  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\text{Var}(X)$  và trung vị của biến ngẫu nhiên  $X$ .
- (c) Đặt  $Y = \sqrt{X}$ , xác định hàm phân phối và hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên  $Y$ .

**Bài tập 3.15.** Tuổi thọ của một loại côn trùng nào đó là một biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  (đơn vị tháng) có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(4-x) & \text{khi } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

- (a) Tìm hằng số  $k$ .
- (b) Tìm  $F(x)$ .
- (c) Tìm  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\text{Var}(X)$  và  $\text{Mod}(X)$ .
- (d) Tính xác suất để côn trùng chết trước một tháng tuổi.

**Bài tập 3.16.** Biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^2e^{-2x} & \text{khi } x \geq 0 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

- (a) Tìm hằng số  $k$ .
- (b) Tìm hàm phân phối xác suất  $F(x)$ .
- (c) Tìm  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\text{Var}(X)$  và  $\text{Mod}(X)$ .

**Bài tập 3.17.** Có hai thùng thuốc  $A$  và  $B$ , trong đó:

- thùng  $A$  có 20 lọ gồm 2 lọ hỏng và 18 lọ tốt
- thùng  $B$  có 20 lọ gồm 3 lọ hỏng và 17 lọ tốt.

- (a) Lấy ở mỗi thùng 1 lọ. Gọi  $X$  là số lọ hỏng trong hai lọ lấy ra. Tìm hàm mật độ của  $X$ .
- (b) Lấy ở thùng  $B$  ra 3 lọ. Gọi  $Y$  là số lọ hỏng trong 3 lọ lấy ra. Tìm hàm mật độ của  $Y$ .

**Bài tập 3.18.** Một thùng đựng 10 lọ thuốc trong đó có 1 lọ hỏng. Ta kiểm tra từng lọ (không hoàn lại) cho tới khi phát hiện được lọ hỏng thì dừng. Gọi  $X$  là số lần kiểm tra. Tìm hàm mật độ của  $X$ . Tính kỳ vọng và phương sai.

**Bài tập 3.19.** Một biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất sau:

$$f_X(x) = \begin{cases} cxe^{-x/2} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

- (a) Tìm hằng số  $c$ .
- (b) Tìm hàm phân phối xác suất  $F_X(x)$ .
- (c) Tìm trung bình của  $X$ .
- (d) Tìm độ lệch chuẩn của  $X$ .
- (e) Tìm  $Med(X)$ .

**Bài tập 3.20.** Gọi  $X$  là tuổi thọ của con người. Một công trình nghiên cứu cho biết hàm mật độ của  $X$  là

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(100 - x)^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 100 \\ 0 & \text{khi } x < 0 \text{ hay } x > 100 \end{cases}$$

- (a) Xác định hằng số  $c$ .
- (b) Tính kì vọng và phương sai của  $X$ .
- (c) Tính xác suất của một người có tuổi thọ  $\geq 60$ .
- (d) Tính xác suất của một người có tuổi thọ  $\geq 60$ , biết rằng người đó hiện nay đã 50 tuổi.

**Bài tập 3.21.** Một thiết bị gồm 3 bộ phận hoạt động độc lập với nhau, xác suất trong khoảng thời gian  $t$  các bộ phận hỏng tương ứng bằng 0.2; 0.3; 0.25. Gọi  $X$  là số bộ phận bị hỏng trong khoảng thời gian  $t$ .

- (a) Lập bảng phân phối xác suất của  $X$ .
- (b) Viết biểu thức hàm phân phối của  $X$ .
- (c) Tính  $P(0 < X \leq 4)$  theo hai cách.

**Bài tập 3.22.** Một mẫu 4 sản phẩm được rút ra không hoàn lại từ 10 sản phẩm. Biết rằng trong 10 sản phẩm này có 1 thứ phẩm. Tính xác suất thứ phẩm có trong mẫu.

**Bài tập 3.23.** Một cái hộp chứa 100 transistor loại  $A$  và 50 transistor loại  $B$ .

- (a) Các transistor được rút ra lần lượt, ngẫu nhiên và được hoàn lại, cho đến khi lấy được transistor loại  $B$  đầu tiên. Tính xác suất 9 hoặc 10 transistor được rút ra.
- (b) Số lượng các transistor ít nhất phải rút ra, ngẫu nhiên và được hoàn lại, là bao nhiêu nếu ta muốn xác suất lấy được chỉ loại  $A$  nhỏ hơn  $1/3$ ?

**Bài tập 3.24.** Gọi  $X$  là số lần mặt nhất xuất hiện sau ba lần tung một con xúc xắc.

- (a) Lập bảng phân phối xác suất của  $X$ .

- (b) Tính xác suất có ít nhất một lần được mặt nhất.
- (c) Tính xác suất có tối đa hai lần mặt nhất.
- (d) Tính  $EX, Var(X)$

**Bài tập 3.25.** Xét trò chơi, tung một con xúc xắc ba lần: nếu cả ba lần được 6 nút thì lĩnh 6 ngàn đ, nếu hai lần 6 nút thì lĩnh 4 ngàn đ, một lần 6 nút thì lĩnh 2 ngàn đ, và nếu không có 6 nút thì không lĩnh gì hết. Mỗi lần chơi phải đóng  $A$  ngàn đ. Hỏi :

- (a)  $A$  là bao nhiêu thì người chơi về lâu về dài huề vốn (gọi là trò chơi công bằng).
- (b)  $A$  là bao nhiêu thì trung bình mỗi lần người chơi mất 1 ngàn đ.

**Bài tập 3.26.** Một hệ thống an ninh gồm có 10 thành phần hoạt động độc lập lẫn nhau. Hệ thống hoạt động nếu ít nhất 5 thành phần hoạt động. Để kiểm tra hệ thống có hoạt động hay không, người ta kiểm tra định kỳ 4 thành phần được chọn ngẫu nhiên (không hoàn lại). Hệ thống được báo cáo là hoạt động nếu ít nhất 3 trong 4 thành phần được kiểm tra hoạt động. Nếu thật sự chỉ có 4 trong 10 thành phần hoạt động, thì xác suất hệ thống được báo cáo là hoạt động là bao nhiêu?

**Bài tập 3.27.** Trong một trò chơi ném phi tiêu, người chơi hướng về một tấm bia lớn có vẽ một vòng tròn có bán kính 25 cm. Gọi  $X$  là khoảng cách (theo cm) giữa đầu phi tiêu cắm vào bia và tâm vòng tròn. Giả sử rằng

$$P(X \leq x) = \begin{cases} c\pi x^2 & \text{nếu } 0 \leq x < 25 \\ 1 & \text{nếu } x \geq 25 \end{cases}$$

với  $c$  là một hằng số nào đó.

- (a) Tính
- (i) hằng số  $c$
  - (ii) hàm mật độ,  $f_X(x)$ , của  $X$
  - (iii) trung bình của  $X$
  - (iv) xác suất  $P(X \leq 10 | X \geq 5)$ .

- (b) Người chơi sẽ mất 1 (đơn vị: ngàn đồng) cho mỗi lần phóng và thắng

$$\begin{cases} 10 & \text{nếu } X \leq r \\ 1 & \text{nếu } r < X \leq 2r \\ 0 & \text{nếu } 2r < X < 25 \end{cases}$$

Với giá trị nào của  $r$  thì số tiền trung bình người chơi đạt được bằng 0.25?



**Bài tập 3.28.** Cho  $X$  là một đại lượng ngẫu nhiên có phân phối xác suất như sau

$X$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}$	0	$a$	$2a$	$2a$	$3a$	$a^2$	$2a^2$	$7a^2 + a$

- (a) Xác định  $a$
- (b) Tính  $P(X \geq 5)$ ,  $P(X < 3)$ .
- (c) Tính  $k$  nhỏ nhất sao cho  $P(X \leq k) \geq \frac{1}{2}$

**Bài tập 3.29.** Cho hàm mật độ của biến ngẫu nhiên  $X$  có dạng

(a)

$$f(x) = \begin{cases} Ax & \text{khi } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{khi } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} A \sin x & \text{khi } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{khi } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} A \cos \pi x & \text{khi } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{khi } x \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^4} & \text{khi } x \geq 1 \\ 0 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Hãy xác định  $A$ . Tìm hàm phân phối xác suất của  $X$ . Tính  $EX, Var(X)$  nếu có.

**Bài tập 3.30.** Cho biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  có hàm phân phối

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < -\frac{\pi}{2} \\ a + b \sin x & \text{khi } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{khi } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

với  $a, b$  là hằng số.

- (a) Tìm  $a$  và  $b$ .
- (b) Với  $a$  và  $b$  tìm được ở câu a), tính hàm mật độ  $f(x)$  của  $X$  và  $Mod(X), Med(X), P(X > \frac{\pi}{4})$

**Bài tập 3.31.** Cho  $X$  và  $Y$  là hai biến ngẫu nhiên độc lập và có phân phối xác suất tương ứng là

$X$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$\mathbb{P}$	$0.2$	$0.3$	$0.3$	$0.2$

$Y$	$-1$	$0$	$1$
$\mathbb{P}$	$0.3$	$0.4$	$0.3$

Tìm phân phối xác suất của  $X^2, X + Y$ . Tính kì vọng, phương sai của  $X, X + Y$ .

**Bài tập 3.32.** Một mẫu gồm 4 biến ngẫu nhiên  $X_1, X_2, X_3, X_4$  độc lập với nhau từng đôi một. Mỗi biến ngẫu nhiên  $X_i, i = 1, \dots, 4$  có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Đặt  $Y = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$  và  $Z = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ . Tìm hàm mật độ của  $Y$  và  $Z$ .

**Bài tập 3.33.** Cho  $F_X$  là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên  $X$ . Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên

$$Y = \begin{cases} \frac{X}{|X|} & \text{nếu } X \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } X = 0 \end{cases}$$

**Bài tập 3.34.** Tìm hàm phân phối của  $\frac{1}{2}(X + |X|)$  nếu hàm phân phối của  $X$  là  $F_X$ .

**Bài tập 3.35.** Giả sử  $X$  có hàm phân phối liên tục  $F(x)$ . Xác định hàm phân phối của  $Y = F(X)$ .

**Bài tập 3.36.** Giả sử  $F(x)$  là hàm phân phối của biến ngẫu nhiên dương liên tục  $X$ , có tính chất

$$P(X < t + x | X > t) = P(X < x) \quad \text{với } x, t > 0$$

Chứng minh rằng  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  với  $x > 0$ .

## Chương 4

# Một số phân phối xác suất thông dụng

### 4.1 Phân phối Bernoulli, nhị thức

**Bài tập 4.1.** Có 8000 sản phẩm trong đó có 2000 sản phẩm không đạt tiêu chuẩn kỹ thuật. Lấy ngẫu nhiên (không hoàn lại) 10 sản phẩm. Tính xác suất để trong 10 sản phẩm lấy ra có 2 sản phẩm không đạt tiêu chuẩn.

**Bài tập 4.2.** Khi tiêm truyền một loại huyết thanh, trung bình có một trường hợp phản ứng trên 1000 trường hợp. Dùng loại huyết thanh này tiêm cho 2000 người. Tính xác suất để

- (a) có 3 trường hợp phản ứng,
- (b) có nhiều nhất 3 trường hợp phản ứng,
- (c) có nhiều hơn 3 trường hợp phản ứng.

**Bài tập 4.3.** Giả sử tỷ lệ sinh con trai và con gái là bằng nhau và bằng  $\frac{1}{2}$ . Một gia đình có 4 người con. Tính xác suất để 4 đứa con đó gồm

- 2 trai và 2 gái.
- 1 trai và 3 gái.
- 4 trai.

**Bài tập 4.4.** Một nhà máy sản xuất với tỷ lệ phế phẩm là 7%.

- (a) Quan sát ngẫu nhiên 10 sản phẩm. Tính xác suất để
  - i) có đúng một phế phẩm.
  - ii) có ít nhất một phế phẩm.

- iii) có nhiều nhất một phế phẩm.
- (b) Hỏi phải quan sát ít nhất bao nhiêu sản phẩm để xác suất nhận được ít nhất một phế phẩm  $\geq 0.9$

**Bài tập 4.5.** Tỷ lệ một loại bệnh bẩm sinh trong dân số là  $p = 0.01$ . Bệnh này cần sự chăm sóc đặc biệt lúc mới sinh. Một nhà bảo sinh thường có 20 ca sinh trong một tuần. Tính xác suất để

- (a) không có trường hợp nào cần chăm sóc đặc biệt,
- (b) có đúng một trường hợp cần chăm sóc đặc biệt,
- (c) có nhiều hơn một trường hợp cần chăm sóc đặc biệt.

Tính bằng quy luật nhị thức rồi dùng quy luật Poisson để so sánh kết quả khi ta xấp xỉ phân phối nhị thức  $B(n; p)$  bằng phân phối Poisson  $P(np)$ .

**Bài tập 4.6.** Tỷ lệ cử tri ủng hộ ứng cử viên  $A$  trong một cuộc bầu cử là 60%. Người ta hỏi ý kiến 20 cử tri được chọn một cách ngẫu nhiên. Gọi  $X$  là số người bỏ phiếu cho  $A$  trong 20 người đó.

- (a) Tìm giá trị trung bình, độ lệch chuẩn và Mod của  $X$ .
- (b) Tìm  $P(X \leq 10)$
- (c) Tìm  $P(X > 12)$
- (d) Tìm  $P(X = 11)$

**Bài tập 4.7.** Giả sử tỷ lệ dân cư mắc bệnh  $A$  trong vùng là 10%. Chọn ngẫu nhiên 1 nhóm 400 người.

- (a) Viết công thức tính xác suất để trong nhóm có nhiều nhất 50 người mắc bệnh  $A$ .
- (b) Tính xấp xỉ xác suất đó bằng phân phối chuẩn.

**Bài tập 4.8.** Một máy sản xuất ra sản phẩm loại  $A$  với xác suất 0.485. Tính xác suất sao có trong 200 sản phẩm do máy sản xuất ra có ít nhất 95 sản phẩm loại  $A$ .

**Bài tập 4.9.** Dựa vào số liệu trong quá khứ, ta ước lượng rằng 85% các sản phẩm của một máy sản xuất nào đó là thứ phẩm. Nếu máy này sản xuất 20 sản phẩm mỗi giờ, thì xác suất 8 hoặc 9 thứ phẩm được sản xuất trong mỗi khoảng thời gian 30 phút là bao nhiêu?

**Bài tập 4.10.** Xác suất trúng số là 1%. Mỗi tuần mua một vé số. Hỏi phải mua vé số liên tiếp trong tối thiểu bao nhiêu tuần để có không ít hơn 95% hy vọng trúng số ít nhất 1 lần.

**Bài tập 4.11.** Trong trò chơi "bầu cua" có ba con xúc sắc, mỗi con có sáu mặt hình là: bầu, cua, hưu, nai, tôm và gà. Giả sử có hai người, một người chơi và một người làm cái. Nếu mỗi ván người chơi chỉ đặt ở một ô (một trong các hình: bầu, cua, hưu, nai, tôm và gà) sau khi chơi nhiều ván thì người nào sẽ thắng trong trò chơi này. Giả sử thêm mỗi ván người chơi đặt 1000 đ nếu thắng sẽ được 5000 đ, nếu thua sẽ mất 1000 đ. Hỏi trung bình mỗi ván người thắng sẽ thắng bao nhiêu?

**Bài tập 4.12.** Có ba lọ giống nhau: hai lọ loại I, mỗi lọ có 3 bi trắng và 7 bi đen; một lọ loại II có 4 bi trắng và 6 bi đen. Một trò chơi được đặt ra như sau: Mỗi ván, người chơi chọn ngẫu nhiên một lọ và lấy ra hai bi từ lọ đó. Nếu lấy được đúng hai bi trắng thì người chơi thắng, ngược lại người chơi thua.

- (a) Người A chơi trò chơi này, tính xác suất người A thắng ở mỗi ván.
- (b) Giả sử người A chơi 10 ván, tính số ván trung bình người chơi thắng được và số ván người A thắng tin chắc nhất.
- (c) Người A phải chơi ít nhất bao nhiêu ván để xác suất thắng ít nhất một ván không dưới 0,99.

**Bài tập 4.13.** Cho  $X$  và  $Y$  là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập.

- (a) Giả sử  $X \sim B(1, \frac{1}{5})$ ,  $Y \sim B(2, \frac{1}{5})$ . Lập bảng phân phối xác suất của  $X + Y$  và kiểm tra rằng  $X + Y \sim B(3, \frac{1}{5})$
- (b) Giả sử  $X \sim B(1, \frac{1}{2})$ ,  $Y \sim B(2, \frac{1}{5})$ . Tìm phân bố xác suất của  $X + Y$ . Chứng minh rằng  $X + Y$  không có phân bố nhị thức.

**Bài tập 4.14.** Hai cầu thủ ném bóng vào rổ. Cầu thủ thứ nhất ném hai lần với xác suất trúng rổ của mỗi lần là 0.6. Cầu thủ thứ hai ném một lần với xác suất trúng rổ là 0.7. Gọi  $X$  là số lần trúng rổ của cả hai cầu thủ. Lập bảng phân phối xác suất của  $X$ , biết rằng kết quả của các lần ném rổ là độc lập với nhau.

**Bài tập 4.15.** Bưu điện dùng một máy tự động đọc địa chỉ trên bì thư để phân loại từng khu vực gửi đi, máy có khả năng đọc được 5000 bì thư trong 1 phút. Khả năng đọc sai 1 địa chỉ trên bì thư là 0,04% (xem như việc đọc 5000 bì thư này là 5000 phép thử độc lập).

- (a) Tính số bì thư trung bình mỗi phút máy đọc sai.
- (b) Tính số bì thư tin chắc nhất trong mỗi phút máy đọc sai.
- (c) Tính xác suất để trong một phút máy đọc sai ít nhất 3 bì thư.

**Bài tập 4.16.** Một bài thi trắc nghiệm gồm có 10 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm và câu trả lời sai bị trừ 2 điểm. Một sinh viên kém làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên một phương án cho mỗi câu hỏi.

- (a) Tính xác suất để học sinh này được 4 điểm.
- (b) Tính xác suất để học sinh này bị điểm âm.
- (c) Gọi  $X$  là số câu trả lời đúng, tính  $E(X)$  và  $Var(X)$ .
- (d) Tính số câu sinh viên này có khả năng trả lời đúng lớn nhất.

**Bài tập 4.17.** Các sản phẩm được sản xuất trong một dây chuyền. Để thực hiện kiểm tra chất lượng, mỗi giờ người ta rút ngẫu nhiên không hoàn lại 10 sản phẩm từ một hộp có 25 sản phẩm. Quá trình sản xuất được báo cáo là đạt yêu cầu nếu có không quá một sản phẩm là thứ phẩm.

- (a) Nếu tất cả các hộp được kiểm tra đều chứa chính xác hai thứ phẩm, thì xác suất quá trình sản xuất được báo cáo đạt yêu cầu ít nhất 7 lần trong một ngày làm việc 8 giờ là bao nhiêu?
- (b) Sử dụng phân phối Poisson để xấp xỉ xác suất được tính trong câu (a).
- (c) Biết rằng lần kiểm tra chất lượng cuối cùng trong câu (a), quá trình sản xuất được báo cáo đạt yêu cầu. Hỏi xác suất mẫu 10 sản phẩm tương ứng không chứa thứ phẩm là bao nhiêu?

## 4.2 Phân phối Poisson

**Bài tập 4.18.** Một trung tâm bưu điện nhận được trung bình 3 cuộc điện thoại trong mỗi phút. Tính xác suất để trung tâm này nhận được 1 cuộc, 2 cuộc, 3 cuộc gọi trong 1 phút, biết rằng số cuộc gọi trong một phút có phân phối Poisson.

**Bài tập 4.19.** Tính  $P(X \geq 1 | X \leq 1)$  nếu  $X \sim P(5)$

**Bài tập 4.20.** Cho  $X, Y$  là các biến ngẫu nhiên độc lập,  $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$

- (a) Tính xác suất  $P(X + Y = n)$
- (b) Tính xác suất  $P(X = k | X + Y = n)$

**Bài tập 4.21.** Một cửa hàng cho thuê xe ô tô nhận thấy rằng số người đến thuê xe ô tô vào ngày thứ bảy cuối tuần là một đại lượng ngẫu nhiên  $X$  có phân phối Poisson với tham số  $\lambda = 2$ . Giả sử cửa hàng có 4 chiếc ô tô.

- (a) Tìm xác suất không phải tất cả 4 chiếc ô tô đều được thuê.
- (b) Tìm xác suất tất cả 4 chiếc ô tô đều được thuê.
- (c) Tìm xác suất cửa hàng không đáp ứng được yêu cầu.

- (d) Trung bình có bao nhiêu ô tô được thuê.
- (e) Cửa hàng cần có ít nhất bao nhiêu ô tô để xác suất không đáp ứng được nhu cầu thuê bé hơn 2%

**Bài tập 4.22.** Một tổng đài bưu điện có các cuộc điện thoại gọi đến xuất hiện ngẫu nhiên, độc lập với nhau và có tốc độ trung bình 2 cuộc gọi trong 1 phút. Tìm xác suất để

- (a) có đúng 5 cuộc điện thoại trong 2 phút,
- (b) không có cuộc điện thoại nào trong khoảng thời gian 30 giây,
- (c) có ít nhất 1 cuộc điện thoại trong khoảng thời gian 10 giây.

**Bài tập 4.23.** Các cuộc gọi điện đến tổng đài tuân theo phân phối Poisson với mức  $\lambda$  trên mỗi phút. Từ kinh nghiệm có được trong quá khứ, ta biết rằng xác suất nhận được chính xác một cuộc gọi trong một phút bằng ba lần xác suất không nhận được cuộc gọi nào trong cùng thời gian.

- (a) Gọi  $X$  là số cuộc gọi nhận được trong mỗi phút. Tính xác suất  $P(2 \leq X \leq 4)$ .
- (b) Ta xét 100 khoảng thời gian một phút liên tiếp và gọi  $U$  là số khoảng thời gian một phút không nhận được cuộc gọi điện nào. Tính  $P(U \leq 1)$ .

**Bài tập 4.24.** Tại một điểm bán vé máy bay, trung bình trong 10 phút có 4 người đến mua vé. Tính xác suất để:

- (a) Trong 10 phút có 7 người đến mua vé.
- (b) Trong 10 phút có không quá 3 người đến mua vé.

**Bài tập 4.25.** Các khách hàng đến quầy thu ngân, theo phân phối Poisson, với số lượng trung bình 5 người mỗi phút. Tính xác suất xuất hiện ít nhất 10 khách hàng trong khoảng thời gian 3 phút.

**Bài tập 4.26.** Số khách hàng đến quầy thu ngân tuân theo phân phối Poisson với tham số  $\lambda = 1$  trong mỗi khoảng 2 phút. Tính xác suất thời gian đợi đến khi khách hàng tiếp theo xuất hiện (từ khách hàng trước đó) nhỏ hơn 10 phút.

**Bài tập 4.27.** Số lượng nho khô trong một cái bánh quy bất kì có phân phối Poisson với tham số  $\lambda$ . Hỏi giá trị  $\lambda$  là bao nhiêu nếu ta muốn xác suất có nhiều nhất hai bánh quy, trong một hộp có 20 bánh, không chứa nho khô là 0.925?

**Bài tập 4.28.** Một trạm cho thuê xe Taxi có 3 chiếc xe. Hàng ngày trạm phải nộp thuế 8 USD cho 1 chiếc xe (bất kể xe đó có được thuê hay không). Mỗi chiếc được cho thuê với giá 20USD. Giả sử số xe được yêu cầu cho thuê của trạm trong 1 ngày là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối Poisson với  $\mu = 2.8$ .

- (a) Tính số tiền trung bình trạm thu được trong một ngày.
- (b) Giải bài toán trên trong trường hợp trạm có 4 chiếc xe.
- (c) Theo bạn, trạm nên có 3 hay 4 chiếc xe?

**Bài tập 4.29.** Ta có 10 máy sản xuất (độc lập nhau), mỗi máy sản xuất ra 2% thứ phẩm (không đạt chuẩn).

- (a) Trung bình có bao nhiêu sản phẩm được sản xuất bởi máy đầu tiên trước khi nó tạo ra thứ phẩm đầu tiên?
- (b) Ta lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ mỗi máy sản xuất. Hỏi xác suất nhiều nhất hai thứ phẩm trong 10 sản phẩm này là bao nhiêu?
- (c) Làm lại câu (b) bằng cách sử dụng xấp xỉ Poisson.
- (d) Phải lấy ra ít nhất bao nhiêu sản phẩm được sản xuất bởi máy đầu tiên để xác suất đạt được ít nhất một thứ phẩm không nhỏ hơn  $1/2$  (giả sử rằng các sản phẩm là độc lập với nhau)?

### 4.3 Phân phối chuẩn

**Bài tập 4.30.** Các kết quả của bài kiểm tra chỉ số thông minh (IQ) cho các học sinh của một trường tiểu học cho thấy điểm IQ của các học sinh này tuân theo phân phối chuẩn với các tham số là  $\mu = 100$  và  $\sigma^2 = 225$ . Tỷ lệ học sinh có điểm IQ nhỏ hơn 91 hoặc lớn hơn 130 là bao nhiêu?

**Bài tập 4.31.** Giả sử chiều dài  $X$  (đơn vị tính  $m$ ) của một nơi đỗ xe bất kì tuân theo phân phối chuẩn  $N(\mu, 0.01\mu^2)$ .

- (a) Một người đàn ông sở hữu một chiếc xe hơi cao cấp có chiều dài lớn hơn 15% chiều dài trung bình của một chỗ đậu xe. Hỏi tỷ lệ chỗ đậu xe có thể sử dụng là bao nhiêu?
- (b) Giả sử rằng  $\mu = 4$ . Hỏi chiều dài của xe là bao nhiêu nếu ta muốn chủ của nó có thể sử dụng 90% chỗ đậu xe?

**Bài tập 4.32.** Đường kính của một chi tiết máy do một máy tiện tự động sản xuất có phân phối chuẩn với trung bình  $\mu = 50 \text{ mm}$  và độ lệch chuẩn  $\sigma = 0.05 \text{ mm}$ . Chi tiết máy được xem là đạt yêu cầu nếu đường kính không sai quá  $0.1 \text{ mm}$ .

- (a) Tính tỷ lệ sản phẩm đạt yêu cầu.
- (b) Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm. Tính xác suất có ít nhất một sản phẩm đạt yêu cầu.



**Bài tập 4.33.** Trọng lượng  $X$  (tính bằng gam) một loại trái cây có phân phối chuẩn  $N(\mu, \sigma^2)$ , với  $\mu = 500$  (gam) và  $\sigma^2 = 16$  (gam<sup>2</sup>). Trái cây thu hoạch được phân loại theo trọng lượng như sau:

- (a) loại 1 : trên 505 gam,
- (b) loại 2 : từ 495 đến 505 gam,
- (c) loại 3 : dưới 495 gam.

Tính tỷ lệ mỗi loại.

**Bài tập 4.34.** Một công ty kinh doanh mặt hàng  $A$  dự định sẽ áp dụng một trong 2 phương án kinh doanh. Ký hiệu  $X_1$  là lợi nhuận thu được khi áp dụng phương án thứ 1,  $X_2$  là lợi nhuận thu được khi áp dụng phương án thứ 2.  $X_1, X_2$  đều được tính theo đơn vị triệu đồng/ tháng) và  $X_1 \sim N(140, 2500)$ ,  $X_2 \sim N(200, 3600)$ . Nếu biết rằng, để công ty tồn tại và phát triển thì lợi nhuận thu được từ mặt hàng kinh doanh  $A$  phải đạt ít nhất 80 triệu đồng/tháng. Hãy cho biết công ty nên áp dụng phương án nào để kinh doanh mặt hàng  $A$ ? Vì sao?

**Bài tập 4.35.** Nghiên cứu chiều cao của những người trưởng thành, người ta nhận thấy rằng chiều cao đó tuân theo quy luật phân bố chuẩn với trung bình là 175 cm và độ lệch tiêu chuẩn 4 cm. Hãy xác định:

- (a) tỷ lệ người trưởng thành có tầm vóc trên 180 cm.
- (b) tỷ lệ người trưởng thành có chiều cao từ 166 cm đến 177 cm.
- (c) tìm  $h_0$ , nếu biết rằng 33% người trưởng thành có tầm vóc dưới mức  $h_0$ .
- (d) giới hạn biến động chiều cao của 90% người trưởng thành xung quanh giá trị trung bình của nó.

**Bài tập 4.36.** Ta quan tâm đến tuổi thọ  $X$  (theo năm) của một thiết bị. Từ kinh nghiệm trong quá khứ, ta ước lượng xác suất thiết bị loại này còn hoạt động tốt sau 9 năm là 0.1.

- (a) Ta đưa ra mô hình sau cho hàm mật độ của  $X$

$$f_X(x) = \frac{a}{(x+1)^b} \quad \text{với } x \geq 0$$

trong đó  $a > 0$  và  $b > 1$ . Tìm hai hằng số  $a, b$ .

- (b) Nếu ta đưa ra một phân phối chuẩn với trung bình  $\mu = 7$  cho  $X$ , thì giá trị tham số  $\sigma$  là bao nhiêu?
- (c) Ta xét 10 thiết bị loại này một cách độc lập. Tính xác suất 8 hoặc 9 thiết bị loại này có tuổi đời hoạt động ít hơn 9 năm.

---

**Bài tập 4.37.** Entropy  $H$  của một biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  được định nghĩa là  $H = E[-\ln f_X(X)]$  với  $f_X$  là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên  $X$  và  $\ln$  là logarit tự nhiên. Tính entropy của biến ngẫu nhiên Gauss với trung bình 0 và phương sai  $\sigma^2 = 2$ .

## Chương 5

# Lí thuyết mẫu

**Bài tập 5.1.** Số liệu về chiều cao của các sinh viên nữ (Đơn vị: inch) trong một lớp học như sau:

62 64 66 67 65 68 61 65 67 65 64 63 67  
68 64 66 68 69 65 67 62 66 68 67 66 65  
69 65 70 65 67 68 65 63 64 67 67

- (a) Tính chiều cao trung bình và độ lệch tiêu chuẩn.  
(b) Trung vị của chiều cao sinh viên lớp này là bao nhiêu?

**Bài tập 5.2.** Cho bộ dữ liệu sau:

4.2 4.7 4.7 5.0 3.8 3.6 3.0 5.1 3.1 3.8  
4.8 4.0 5.2 4.3 2.8 2.0 2.8 3.3 4.8 5.0

Tính trung bình mẫu, phương sai mẫu và độ lệch tiêu chuẩn.

**Bài tập 5.3.** Cho bộ dữ liệu sau:

43 47 51 48 52 50 46 49  
45 52 46 51 44 49 46 51  
49 45 44 50 48 50 49 50

Tính trung bình mẫu, phương sai mẫu và độ lệch tiêu chuẩn.

**Bài tập 5.4.** Xét biểu thức  $y = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$ . Với  $a$  nào thì  $y$  đạt giá trị nhỏ nhất?

**Bài tập 5.5.** Xét  $y_i = a + bx_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  và  $a, b$  là các hằng số khác 0. Hãy tìm mối liên hệ giữa  $\bar{x}$  và  $\bar{y}$ ,  $s_x$  và  $s_y$ .

**Bài tập 5.6.** Giả sử ta có mẫu cỡ  $n$  gồm các giá trị quan trắc  $x_1, x_2, \dots, x_n$  và đã tính được trung bình mẫu  $\bar{x}_n$  và phương sai mẫu  $s_n^2$ . Quan trắc thêm giá trị thứ  $(n+1)$  là  $x_{n+1}$ , gọi  $\bar{x}_{n+1}$  và  $s_{n+1}^2$  lần lượt là trung bình mẫu và phương sai mẫu ứng với mẫu có  $(n+1)$  quan trắc.

(a) Tính  $\bar{x}_{n+1}$  theo  $\bar{x}_n$  và  $x_{n+1}$ .

(b) Chứng tỏ rằng

$$ns_{n+1}^2 = (n-1)s_n^2 + \frac{n(x_{n+1} - \bar{x}_n)^2}{n+1}$$

**Bài tập 5.7.** Từ bảng các số ngẫu nhiên người ta lấy ra 150 số. Các số đó được phân thành 10 khoảng như sau:

$x_i$	1–	11–	21–	31–	41–	51–	61–	71–	81–	91–
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$n_i$	16	15	19	13	14	19	14	11	13	16

Xác định trung bình mẫu và phương sai mẫu.

**Bài tập 5.8.** Khảo sát thu nhập của công nhân ở một công ty, cho bởi bảng sau (đơn vị ngàn đồng).

Thu nhập	[500, 600]	[600, 700]	[700, 800]	[800, 900]	[900, 1000]	[1000, 1100]	[1100, 1200]
Số người	2	10	15	30	25	14	4

Xác định thu nhập trung bình, độ lệch chuẩn.

**Bài tập 5.9.** Đo lượng huyết tương của 8 người mạnh khỏe, ta có

$$2, 863, 372, 752, 623, 503, 253, 123, 15$$

Hãy xác định các đặc trưng mẫu.

**Bài tập 5.10.** Quan sát thời gian cần thiết để sản xuất một chi tiết máy, ta thu được số liệu cho bằng sau:

---

Khoảng thời gian (phút)	Số lần quan sát
20-25	2
25-30	14
30-35	26
35-40	32
40-45	14
45-50	8
50-55	4

Tính trung bình mẫu  $\bar{x}$ , phương sai mẫu  $s^2$ .

**Bài tập 5.11.** Đo độ dài của một loại trục xe, ta có kết quả

Nhóm	18.4-18.6	18.6-18.8	18.8-19	19-19.2	19.2-19.4	19.4-19.6	19.6-19.8
$n_i$	1	4	20	41	19	8	4

Hãy tính độ dài trung bình và phương sai mẫu.

## Chương 6

# Ước lượng tham số thống kê

### 6.1 Ước lượng trung bình tổng thể

**Bài tập 6.1.** Trên tập mẫu gồm 100 số liệu, người ta tính được  $\bar{x} = 0.1$   $s = 0.014$ . Xác định khoảng tin cậy 95% cho giá trị trung bình thật.

**Bài tập 6.2.** Chọn ngẫu nhiên 36 công nhân của xí nghiệp thì thấy lương trung bình là 380 ngàn đ/tháng. Giả sử lương công nhân tuân theo phân phối chuẩn với  $\sigma = 14$  ngàn đồng. Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng mức lương trung bình của công nhân trong toàn xí nghiệp.

**Bài tập 6.3.** Đo sức bền chịu lực của một loại ống thí nghiệm, người ta thu được bộ số liệu sau

4500, 6500, 5200, 4800, 4900, 5125, 6200, 5375

Từ kinh nghiệm nghề nghiệp, người ta cũng biết rằng sức bền đó có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn  $\sigma = 300$ . Hãy xây dựng khoảng tin cậy 90% cho sức bền trung bình của loại ống trên.

**Bài tập 6.4.** Sản lượng mỗi ngày của một phân xưởng là biến ngẫu nhiên tuân theo luật chuẩn. Kết quả thống kê của 9 ngày cho ta:

27, 26, 21, 28, 25, 30, 26, 23, 26

Hãy xác định các khoảng tin cậy 95% cho sản lượng trung bình.

**Bài tập 6.5.** Quan sát chiều cao  $X$  (cm) của một số người, ta ghi nhận

$x$ (cm)	140-145	145-150	150-155	155-160	160-165	165-170
Số người	1	3	7	9	5	2

(a) Tính  $\bar{x}$  và  $s^2$

(b) Ước lượng  $\mu$  ở độ tin cậy 0.95

**Bài tập 6.6.** Điểm trung bình môn toán của 100 thí sinh dự thi vào trường A là 5 với độ lệch chuẩn là 2.5.

(a) Ước lượng điểm trung bình môn toán của toàn thể thí sinh với độ tin cậy là 95%.

(b) Với sai số ước lượng điểm trung bình ở câu a) là 0.25 điểm, hãy xác định độ tin cậy.

**Bài tập 6.7.** Tuổi thọ của một loại bóng đèn được biết theo quy luật chuẩn với độ lệch chuẩn 100 giờ.

(a) Chọn ngẫu nhiên 100 bóng đèn để thử nghiệm, thấy mỗi bóng tuổi thọ trung bình là 1000 giờ. Hãy ước lượng tuổi thọ trung bình của bóng đèn xí nghiệp A sản xuất với độ tin cậy là 95%.

(b) Với dung sai của ước lượng tuổi thọ trung bình là 15 giờ, hãy xác định độ tin cậy.

(c) Để dung sai của ước lượng tuổi thọ trung bình không quá 25 giờ với độ tin cậy là 95% thì cần phải thử nghiệm ít nhất bao nhiêu bóng.

**Bài tập 6.8.** Khối lượng các bao bột mì tại một cửa hàng lương thực tuân theo phân phối chuẩn. Kiểm tra 20 bao, thấy khối lượng trung bình của mỗi bao bột mì là 48kg, và phương sai mẫu  $s^2 = (0.5 \text{ kg})^2$ .

(a) Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng khối lượng trung bình của một bao bột mì thuộc cửa hàng.

(b) Với dung sai của ước lượng ở câu a) là 0.284 kg, hãy xác định độ tin cậy.

(c) Để dung sai của ước lượng ở câu a) không quá 160 g với độ tin cậy là 95%, cần phải kiểm tra ít nhất bao nhiêu bao?

**Bài tập 6.9.** Đo đường kính của một chi tiết máy do một máy tiện tự động sản xuất, ta ghi nhận được số liệu như sau:

$x$	12.00	12.05	12.10	12.15	12.20	12.25	12.30	12.35	12.40
$n$	2	3	7	9	10	8	6	5	3

với  $n$  chỉ số trường hợp tính theo từng giá trị của  $X$  (mm).

(a) Tính trung bình mẫu  $\bar{x}$  và độ lệch chuẩn  $s$  của mẫu.

(b) Ước lượng đường kính trung bình  $\mu$  ở độ tin cậy 0.95.

- (c) Nếu muốn sai số ước lượng không quá  $\varepsilon = 0.02 \text{ mm}$  ở độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát ít nhất mấy trường hợp.

**Bài tập 6.10.** Người ta đo ion  $Na+$  trên một số người và ghi nhận lại được kết quả như sau

129, 132, 140, 141, 138, 143, 133, 137, 140, 143, 138, 140

- (a) Tính trung bình mẫu  $\bar{x}$  và phương sai mẫu  $s^2$ .
- (b) Ước lượng trung bình  $\mu$  của tổng thể ở độ tin cậy 0.95.
- (c) Nếu muốn sai số ước lượng trung bình không quá  $\varepsilon = 1$  với độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát mẫu gồm ít nhất mấy người?

**Bài tập 6.11.** Quan sát tuổi thọ  $x$  (giờ) của một số bóng đèn do xí nghiệp  $A$  sản xuất, ta ghi nhận

$x$	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800
$n$	10	14	16	17	18	16	16	12	9

với  $n$  chỉ số trường hợp theo từng giá trị của  $x$ .

- (a) Tính trung bình mẫu  $\bar{x}$  và độ lệch chuẩn mẫu  $s$ .
- (b) Ước lượng tuổi thọ trung bình của bóng đèn ở độ tin cậy 0.95.
- (c) Nếu muốn sai số ước lượng không quá  $\varepsilon = 30$  giờ với độ tin cậy 0.99 thì phải quan sát mẫu gồm ít nhất mấy bóng đèn?

**Bài tập 6.12.** Chiều dài của một loại sản phẩm được xuất khẩu hàng loạt là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với  $\mu = 100 \text{ mm}$  và  $\sigma^2 = 4^2 \text{ mm}^2$ . Kiểm tra ngẫu nhiên 25 sản phẩm. Khả năng chiều dài trung bình của số sản phẩm kiểm tra nằm trong khoảng từ 98mm đến 101mm là bao nhiêu?

## 6.2 Ước lượng tỉ lệ tổng thể

**Bài tập 6.13.** Trước bầu cử, người ta phỏng vấn ngẫu nhiên 2000 cử tri thì thấy có 1380 người ủng hộ một ứng cử viên K. Với độ tin cậy 95%, hỏi ứng cử viên đó thu được tối thiểu bao nhiêu phần trăm phiếu bầu?

**Bài tập 6.14.** Một loại bệnh có tỷ lệ tử vong là 0.01. Muốn chứng tỏ một loại thuốc có hiệu nghiệm (nghĩa là hạ thấp được tỷ lệ tử vong nhỏ hơn 0.005) ở độ tin cậy 0.95 thì phải thử thuốc đó trên ít nhất bao nhiêu người?



**Bài tập 6.15.** Để ước lượng xác suất mắc bệnh gan với độ tin cậy 90% và sai số không vượt quá 2% thì cần phải khám ít nhất bao nhiêu người, biết rằng tỷ lệ mắc bệnh gan thực nghiệm đã cho bằng 0,9.

**Bài tập 6.16.** Giả sử quan sát 100 người thấy có 20 người bị bệnh sốt xuất huyết. Hãy ước lượng tỷ lệ bệnh sốt xuất huyết ở độ tin cậy 97%. Nếu muốn sai số ước lượng không quá 3% ở độ tin cậy 95% thì phải quan sát ít nhất bao nhiêu người?

**Bài tập 6.17.** Một loại thuốc mới đem điều trị cho 50 người bị bệnh B, kết quả có 40 người khỏi bệnh.

- (a) Ước lượng tỷ lệ khỏi bệnh  $p$  nếu dùng thuốc đó điều trị với độ tin cậy 0.95 và 0.99.
- (b) Nếu muốn sai số ước lượng không quá 0.02 ở độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát ít nhất mấy trường hợp?

**Bài tập 6.18.** Ta muốn ước lượng tỷ lệ viên thuốc bị sức mẻ  $p$  trong một lô thuốc lớn.

- (a) Nếu muốn sai số ước lượng không quá 0.01 với độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát ít nhất mấy viên?
- (b) Quan sát ngẫu nhiên 200 viên, thấy có 18 viên bị nứt mẻ. Hãy ước lượng  $p$  ở độ tin cậy 0.95.
- (c) Khi đó, nếu muốn sai số ước lượng không quá 0.01 với độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát ít nhất mấy viên?

**Bài tập 6.19.** Muốn biết trong ao có bao nhiêu cá, người ta bắt lên 2000 con, đánh dấu xong lại thả xuống hồ. Sau một thời gian, người ta bắt lên 500 con và thấy có 20 con cá có đánh dấu của lần bắt trước. Dựa vào kết quả đó hãy ước lượng số cá có trong hồ với độ tin cậy 95%.

**Bài tập 6.20.** Để có thể dự đoán được số lượng chim thường nghỉ tại vườn nhà mình, người chủ bắt 89 con, đem đeo khoen cho chúng rồi thả đi. Sau một thời gian, ông bắt ngẫu nhiên được 120 con và thấy có 7 con có đeo khoen. Hãy dự đoán số chim giúp ông chủ vườn ở độ tin cậy 99%.

### 6.3 Tổng hợp

**Bài tập 6.21.** Cân thử 100 quả cam, ta có bộ số liệu sau:

Khối lượng (g)	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Số quả	2	3	15	26	28	6	8	8	4

- (a) Hãy ước lượng khối lượng trung bình các quả cam ở độ tin cậy 95%.
- (b) Cam có khối lượng dưới 34 g được coi là cam loại 2. Tìm khoảng ước lượng cho tỷ lệ loại 2 với độ tin cậy 90%.

**Bài tập 6.22.** Dem cân một số trái cây vừa thu hoạch, ta được kết quả sau:

$X$ (gam)	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
Số trái	12	17	20	18	15

- (a) Tìm khoảng ước lượng của trọng lượng trung bình  $\mu$  của trái cây với độ tin cậy 0.95 và 0.99.
- (b) Nếu muốn sai số ước lượng không quá  $\varepsilon = 2$  gam ở độ tin cậy 99% thì phải quan sát ít nhất bao nhiêu trái?
- (c) Trái cây có khối lượng  $X \geq 230$  gam được xếp vào loại A. Hãy tìm khoảng ước lượng cho tỷ lệ  $p$  của trái cây loại A ở độ tin cậy 0.95 và 0.99. Nếu muốn sai số ước lượng không quá 0.04 ở độ tin cậy 0.99 thì phải quan sát ít nhất mấy trường hợp?

## Chương 7

# Kiểm định giả thuyết thống kê

### 7.1 So sánh kì vọng với một số cho trước

**Bài tập 7.1.** Giám đốc một xí nghiệp cho biết lương trung bình của 1 công nhân thuộc xí nghiệp là 380 ngàn đ/tháng. Chọn ngẫu nhiên 36 công nhân thấy lương trung bình là 350 ngàn đ/tháng, với độ lệch chuẩn  $s = 40$ . Lời báo cáo của giám đốc có tin cậy được không, với mức có ý nghĩa là  $\alpha = 5\%$ .

**Bài tập 7.2.** Trong thập niên 80, trọng lượng trung bình của thanh niên là 48 kg. Nay để xác định lại trọng lượng ấy, người ta chọn ngẫu nhiên 100 thanh niên đo trọng lượng trung bình là 50 kg và phương sai mẫu  $s^2 = (10 \text{ kg})^2$ . Thử xem trọng lượng thanh niên hiện nay phải chăng có thay đổi, với mức có ý nghĩa là 1%?

**Bài tập 7.3.** Một cửa hàng thực phẩm nhận thấy thời gian vừa qua trung bình một khách hàng mua 25 ngàn đồng thực phẩm trong ngày. Nay cửa hàng chọn ngẫu nhiên 15 khách hàng thấy trung bình một khách hàng mua 24 ngàn đồng trong ngày và phương sai mẫu là  $s^2 = (2 \text{ ngàn đồng})^2$ .

Với mức ý nghĩa là 5%, kiểm định xem có phải sức mua của khách hàng hiện nay thực sự giảm sút hay không. Biết rằng sức mua của khách hàng có phân phối chuẩn.

**Bài tập 7.4.** Đối với người Việt Nam, lượng huyết sắc tố trung bình là 138.3 g/l. Khám cho 80 công nhân ở nhà máy có tiếp xúc hoá chất, thấy huyết sắc tố trung bình  $\bar{x} = 120 \text{ g/l}$ ;  $s = 15 \text{ g/l}$ . Từ kết quả trên, có thể kết luận lượng huyết sắc tố trung bình của công nhân nhà máy hoá chất này thấp hơn mức chung hay không? Kết luận với  $\alpha = 0.05$ .

**Bài tập 7.5.** Trong điều kiện chăn nuôi bình thường, lượng sữa trung bình của 1 con bò là 14 kg/ngày. Nghi ngờ điều kiện chăn nuôi kém đi làm cho lượng sữa giảm xuống, người ta điều tra ngẫu nhiên 25 con và tính được lượng sữa trung bình của 1 con trong 1 ngày là 12.5 và độ lệch chuẩn  $s = 2.5$ . Với mức ý nghĩa  $\alpha = 0.05$ , hãy kết luận điều nghi ngờ nói trên. Giả thiết lượng sữa bò là 1 biến ngẫu nhiên chuẩn.

**Bài tập 7.6.** Tiền lương trung bình của công nhân trước đây là 400 ngàn đ/tháng. Để xét xem tiền lương hiện nay so với mức trước đây thế nào, người ta điều tra 100 công nhân và tính được  $\bar{x} = 404.8$  ngàn đ/tháng và  $s = 20$  ngàn đ/tháng. Với  $\alpha = 1\%$

- Nếu lập giả thiết 2 phía và giả thiết 1 phía thì kết quả kiểm định như thế nào?
- Giống câu a, với  $\bar{x} = 406$  ngàn đ/tháng và  $s = 20$  ngàn đ/tháng.

**Bài tập 7.7.** Một máy đóng gói các sản phẩm có khối lượng 1 kg. Nghi ngờ máy hoạt động không bình thường, người ta chọn ra một mẫu ngẫu nhiên gồm 100 sản phẩm thì thấy như sau:

Khối lượng	0.95	0.97	0.99	1.01	1.03	1.05
Số gói	9	31	40	15	3	2

Với mức ý nghĩa 0.05, hãy kết luận về nghi ngờ trên.

**Bài tập 7.8.** Trọng lượng trung bình khi xuất chuồng ở một trại chăn nuôi trước là 3.3 kg/con. Năm nay người ta sử dụng một loại thức ăn mới, cân thử 15 con khi xuất chuồng ta được các số liệu như sau:

3.25, 2.50, 4.00, 3.75, 3.80, 3.90, 4.02, 3.60, 3.80, 3.20, 3.82, 3.40, 3.75, 4.00, 3.50

Giả thiết trọng lượng gà là đại lượng ngẫu nhiên phân phối theo quy luật chuẩn.

- Với mức ý nghĩa  $\alpha = 0.05$ . Hãy cho kết luận về tác dụng của loại thức ăn này?
- Nếu trại chăn nuôi báo cáo trọng lượng trung bình khi xuất chuồng là 3.5 kg/con thì có chấp nhận được không? ( $\alpha = 0.05$ ).

**Bài tập 7.9.** Đo cholesterol (đơn vị mg%) cho một nhóm người, ta ghi nhận lại được

Chol.	150 - 160	160 - 170	170 - 180	180 - 190	190 - 200	200 - 210
Số người	3	9	11	3	2	1

Cho rằng độ cholesterol tuân theo phân phối chuẩn.

- Tính trung bình mẫu  $\bar{x}$  và phương sai mẫu  $s^2$ .
- Tìm khoảng ước lượng cho trung bình cholesterol trong dân số ở độ tin cậy 0.95.
- Có tài liệu cho biết lượng cholesterol trung bình là  $\mu_0 = 175$  mg%. Giá trị này có phù hợp với mẫu quan sát không? (kết luận với  $\alpha = 0.05$ ).

**Bài tập 7.10.** Quan sát số hoa hồng bán ra trong một ngày của một cửa hàng bán hoa sau một thời gian, người ta ghi được số liệu sau:

Số hoa hồng (đoá)	12	13	15	16	17	18	19
Số ngày	3	2	7	7	3	2	1

Giả thiết rằng số hoa bán ra trong ngày có phân phối chuẩn.

- Tìm trung bình mẫu  $\bar{x}$ , phương sai mẫu  $s^2$ .
- Sau khi tính toán, ông chủ cửa hàng nói rằng nếu trung bình một ngày không bán được 15 đoá hoa thì chẳng thà đóng cửa còn hơn. Dựa vào số liệu trên, anh (chị) hãy kết luận giúp ông chủ cửa hàng xem có nên tiếp tục bán hay không ở mức ý nghĩa  $\alpha = 0.05$ .
- Giả sử những ngày bán được từ 13 đến 17 đoá hồng là những ngày “bình thường”. Hãy ước lượng tỉ lệ của những ngày bình thường của cửa hàng ở độ tin cậy 90%.

**Bài tập 7.11.** Một xí nghiệp đúc một số rất lớn các sản phẩm bằng thép với số khuyết tật trung bình ở mỗi sản phẩm là 3. Người ta cải tiến cách sản xuất và kiểm tra 36 sản phẩm. Kết quả như sau:

Số khuyết tật trên sản phẩm	0	1	2	3	4	5	6
Số sản phẩm tương ứng	7	4	5	7	6	6	1

Giả sử số khuyết tật của các sản phẩm có phân phối chuẩn.

- Hãy ước lượng số khuyết tật trung bình ở mỗi sản phẩm sau khi cải tiến, với độ tin cậy 90%.
- Hãy cho kết luận về hiệu quả của việc cải tiến sản xuất ở mức ý nghĩa 0.05.

**Bài tập 7.12.** Đánh giá tác dụng của một chế độ ăn bồi dưỡng mà dấu hiệu quan sát là số hồng cầu. Người ta đếm số hồng cầu của 20 người trước và sau khi ăn bồi dưỡng:

$x_i$	32	40	38	42	41	35	36	47	50	30
$y_i$	40	45	42	50	52	43	48	45	55	34
$x_i$	38	45	43	36	50	38	42	41	45	44
$y_i$	32	54	58	30	60	35	50	48	40	50

Với mức ý nghĩa  $\alpha = 0.05$ , có thể kết luận gì về tác dụng của chế độ ăn bồi dưỡng này?

**Bài tập 7.13.** Giả sử ta muốn xác định xem hiệu quả của chế độ ăn kiêng đối với việc giảm trọng lượng như thế nào. 20 người quá béo đã thực hiện chế độ ăn kiêng. Trọng lượng của từng người trước khi ăn kiêng ( $X$  kg) và sau khi ăn kiêng ( $Y$  kg) được cho như sau:

$X$	80	78	85	70	90	78	92	88	75	75
$Y$	75	77	80	70	84	74	85	82	80	65
$X$	63	72	89	76	77	71	83	78	82	90
$Y$	62	71	83	72	82	71	79	76	83	81

Kiểm tra xem chế độ ăn kiêng có tác dụng làm thay đổi trọng lượng hay không ( $\alpha = 0.05$ ).

## 7.2 So sánh hai kì vọng

**Bài tập 7.14.** Một nhà phát triển sản phẩm quan tâm đến việc giảm thời gian khô của sơn. Vì vậy hai công thức sơn được đem thử nghiệm. Công thức 1 là công thức có các thành phần chuẩn và công thức 2 có thêm một thành phần làm khô mới được cho rằng sẽ làm giảm thời gian khô của sơn. Từ các thí nghiệm người ta thấy rằng  $\sigma_1 = \sigma_2 = 8$  phút. 10 đồ vật được sơn với công thức 1 và 10 đồ vật khác được sơn với công thức 2. Thời gian khô trung bình của từng mẫu là  $\bar{x}_1 = 121$  phút và  $\bar{x}_2 = 112$  phút. Nhà phát triển sản phẩm có thể rút ra kết luận gì về ảnh hưởng của thành phần làm khô mới? Với mức ý nghĩa 5%.

**Bài tập 7.15.** Tốc độ cháy của hai loại chất nổ lỏng được dùng làm nhiên liệu trong tàu vũ trụ được nghiên cứu. Người ta biết rằng độ lệch chuẩn của tốc độ cháy của hai loại nhiên liệu bằng nhau và bằng 3 cm/s. Hai mẫu ngẫu nhiên kích thước  $n_1 = 20$  và  $n_2 = 20$  được thử nghiệm; trung bình mẫu tốc độ cháy là  $\bar{x}_1 = 18$  cm/s và  $\bar{x}_2 = 24$  cm/s. Với mức ý nghĩa  $\alpha = 0.05$  hãy kiểm định giả thuyết hai loại chất nổ lỏng này có cùng tốc độ đốt cháy.

**Bài tập 7.16.** Theo dõi giá cổ phiếu của 2 công ty  $A$  và  $B$  trong vòng 31 ngày người ta tính được các giá trị sau

	$\bar{x}$	s
Công ty $A$	37.58	1.50
Công ty $B$	38.24	2.20

Giả thiết rằng giá cổ phiếu của hai công ty  $A$  và  $B$  là hai biến ngẫu nhiên phân phối theo quy luật chuẩn. Hãy cho biết ý nghĩa kì vọng của các biến ngẫu nhiên nói trên? Hãy cho biết có sự khác biệt thực sự về giá cổ phiếu trung bình của hai công ty  $A$  và  $B$  không? Với mức ý nghĩa  $\alpha = 5\%$

**Bài tập 7.17.** Hàm lượng đường trong máu của công nhân sau 5 giờ làm việc với máy siêu cao tần đã đo được ở hai thời điểm trước và sau 5 giờ làm việc. Ta có kết quả sau:

Trước:  $n_1 = 50$   $\bar{x} = 60$  mg%  $s_x = 7$

Sau:  $n_2 = 40$   $\bar{y} = 52$  mg%  $s_y = 9.2$

Với mức ý nghĩa  $\alpha = 0.05$ , có thể khẳng định hàm lượng đường trong máu sau 5 giờ làm việc đã giảm đi hay không?

**Bài tập 7.18.** Trồng cùng một giống lúa trên hai thửa ruộng như nhau và bón hai loại phân khác nhau. Đến ngày thu hoạch ta có kết quả như sau:

- Thửa thứ nhất lấy mẫu 1000 bông lúa thấy số hạt trung bình của mỗi bông là  $\bar{x} = 70$  hạt và  $s_x = 10$ .
- Thửa thứ hai lấy mẫu 500 bông thấy số hạt trung bình mỗi bông là  $\bar{y} = 72$  hạt và  $s_y = 20$ .

Hỏi sự khác nhau giữa  $X$  và  $Y$  là ngẫu nhiên hay bản chất, với  $\alpha = 0.05$ ?

**Bài tập 7.19.** Để so sánh trọng lượng trung bình của trẻ sơ sinh ở thành thị và nông thôn, người ta thử cân trọng lượng của 10000 cháu và thu được kết quả sau đây:

Vùng	Số cháu được cân	Trọng lượng trung bình	Độ lệch chuẩn mẫu
Nông thôn	8000	3.0 kg	0.3 kg
Thành thị	2000	3.2 kg	0.2 kg

Với mức ý nghĩa  $\alpha = 0.05$  có thể coi trọng lượng trung bình của trẻ sơ sinh ở thành thị cao hơn ở nông thôn hay không? (Giả thiết trọng lượng trẻ sơ sinh là biến ngẫu nhiên chuẩn).

**Bài tập 7.20.** Để so sánh năng lực học toán và vật lý của học sinh, người ta kiểm tra ngẫu nhiên 8 em bằng hai bài toán và vật lý. Kết quả cho bởi bảng dưới đây ( $X$  là điểm toán,  $Y$  là điểm lý):

$X$	15	20	16	22	24	18	20	14
$Y$	15	22	14	25	19	20	24	16

Giả sử  $X$  và  $Y$  đều có phân phối chuẩn. Hãy so sánh điểm trung bình giữa  $X$  và  $Y$ , mức ý nghĩa 5%.

**Bài tập 7.21.** Hai máy được sử dụng để rót nước vào các bình. Người ta lấy mẫu ngẫu nhiên 10 bình do máy thứ nhất và 10 bình do máy thứ hai thì được kết quả sau:

Máy 1	16.03	16.01	16.04	15.96	16.05	15.98	16.05	16.02	16.02	15.99
Máy 2	16.02	16.03	15.97	16.04	15.96	16.02	16.01	16.01	15.99	16.00

Với mức ý nghĩa  $\alpha = 0.05$  có thể nói rằng hai máy rót nước vào bình như nhau không?

**Bài tập 7.22.** Để nghiên cứu ảnh hưởng của một loại thuốc, người ta cho 10 bệnh nhân uống thuốc. Lần khác họ cũng cho bệnh nhân uống thuốc nhưng là thuốc giả. Kết quả thí nghiệm thu được như sau:

Bệnh nhân	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số giờ ngủ có thuốc	6.1	7.0	8.2	7.6	6.5	8.4	6.9	6.7	7.4	5.8
Số giờ ngủ với thuốc giả	5.2	7.9	3.9	4.7	5.3	5.4	4.2	6.1	3.8	6.3

Giả sử số giờ ngủ của bệnh nhân tuân theo phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 5%, hãy kết luận về ảnh hưởng của loại thuốc trên.

**Bài tập 7.23.** Quan sát sức nặng của bé trai (X) và bé gái (Y) lúc sơ sinh (đơn vị gam), ta có kết quả

Trọng lượng	3000-3200	3200-3400	3400-3600	3600-3800	3800-4000
Số bé trai	1	3	8	10	3
Số bé gái	2	10	10	5	1

- Tính  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $s_x^2$ ,  $s_y^2$ .
- So sánh các kì vọng  $\mu_X$ ,  $\mu_Y$  (kết luận với  $\alpha = 5\%$ ).
- Nhập hai mẫu lại. Tính trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu nhập. Dùng mẫu nhập để ước lượng sức nặng trung bình của trẻ sơ sinh ở độ tin cậy 95%.

### 7.3 So sánh tỉ lệ với một số cho trước

**Bài tập 7.24.** Trong một vùng dân cư có 18 bé trai và 28 bé gái mắc bệnh B. Hỏi rằng tỷ lệ nhiễm bệnh của bé trai và bé gái có như nhau không? (kết luận với  $\alpha = 0.05$  và giả sử rằng số lượng bé trai và bé gái trong vùng tương đương nhau, và rất nhiều).

**Bài tập 7.25.** Một máy sản xuất tự động với tỷ lệ chính phẩm là 98%. Sau một thời gian hoạt động, người ta nghi ngờ tỷ lệ trên đã bị giảm. Kiểm tra ngẫu nhiên 500 sản phẩm thấy có 28 phế phẩm, với  $\alpha = 0.05$  hãy kiểm tra xem chất lượng làm việc của máy có còn được như trước hay không?



**Bài tập 7.26.** Đo huyết sắc tố cho 50 công nhân nông trường thấy có 60% ở mức dưới 110 g/l. Số liệu chung của khu vực này là 30% ở mức dưới 110 g/l. Với mức ý nghĩa  $\alpha = 0.05$ , có thể kết luận công nhân nông trường có tỷ lệ huyết sắc tố dưới 110 g/l cao hơn mức chung hay không?

**Bài tập 7.27.** Theo một nguồn tin thì tỉ lệ hộ dân thích xem dân ca trên Tivi là 80%. Thăm dò 36 hộ dân thấy có 25 hộ thích xem dân ca. Với mức có ý nghĩa là 5%. Kiểm định xem nguồn tin này có đáng tin cậy không?

**Bài tập 7.28.** Một máy sản xuất tự động, lúc đầu tỷ lệ sản phẩm loại A là 20%. Sau khi áp dụng một phương pháp cải tiến sản xuất mới, người ta lấy 40 mẫu, mỗi mẫu gồm 10 sản phẩm để kiểm tra. Kết quả kiểm tra cho ở bảng sau:

Số sản phẩm loại A trong mẫu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số mẫu	2	0	4	6	8	10	4	5	1	0

Với mức ý nghĩa 5%. Hãy cho kết luận về phương pháp sản xuất này.

**Bài tập 7.29.** Tỷ lệ phế phẩm của một nhà máy trước đây là 5%. Năm nay nhà máy áp dụng một biện pháp kỹ thuật mới. Để nghiên cứu tác dụng của biện pháp kỹ thuật mới, người ta lấy một mẫu gồm 800 sản phẩm để kiểm tra và thấy có 24 phế phẩm.

- Với  $\alpha = 0.01$ . Hãy cho kết luận về biện pháp kỹ thuật mới này?
- Nếu nhà máy báo cáo tỷ lệ phế phẩm sau khi áp dụng biện pháp kỹ thuật mới là 2% thì có chấp nhận được không? ( $\alpha = 0.01$ ).

## 7.4 So sánh hai tỉ lệ

**Bài tập 7.30.** Trong 90 người dùng DDT để ngừa bệnh ngoài da thì có 10 người nhiễm bệnh; trong 100 người không dùng DDT thì có 26 người mắc bệnh. Hỏi rằng DDT có tác dụng ngừa bệnh ngoài da không? (kết luận với  $\alpha = 0.05$ )

**Bài tập 7.31.** Người ta điều tra 250 người ở xã A thấy có 140 nữ và điều tra 160 người ở xã B thấy có 80 nữ. Hãy so sánh tỉ lệ nữ ở hai xã với mức ý nghĩa 5%.

**Bài tập 7.32.** Áp dụng hai phương pháp gieo hạt. Theo phương pháp A gieo 180 hạt thì có 150 hạt nảy mầm; theo phương pháp B gieo 256 hạt thì thấy có 160 hạt nảy mầm. Hãy so sánh hiệu quả của hai phương pháp với mức ý nghĩa  $\alpha = 5\%$ .

**Bài tập 7.33.** Theo dõi trọng lượng của một số trẻ sơ sinh tại một số nhà hộ sinh thành phố và nông thôn, người ta thấy rằng trong số 150 trẻ sơ sinh ở thành phố có 100 cháu nặng hơn 3000 gam, và trong 200 trẻ sơ sinh ở nông thôn có 98 cháu nặng hơn 3000 gam. Từ kết quả đó hãy so sánh tỉ lệ trẻ sơ sinh có trọng lượng trên 3000 gam ở thành phố và nông thôn với mức ý nghĩa 5%.

## Phần II

# BÀI GIẢI

# Tập hợp - Giải tích tổ hợp

**Giải bài 1.1.** Ta lập dãy  $B_1, B_2, \dots, B_n$  như sau:

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

(a) Ta chứng minh  $B_i \cap B_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ), giả sử  $i < j$ .

Giả sử  $a \in B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k$ , tức là  $a \in A_i, a \notin A_k (k = 1, \dots, i-1)$ , vì vậy  $a \in \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k$ . Suy ra  $a \notin B_j$ . Vậy  $B_i \cap B_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ )

(b) 
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

Giả sử  $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , tức là tồn tại chỉ số  $j$  nào đó sao cho  $a \in A_j$ . Nếu  $a \in B_j$  thì  $a \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ . Nếu  $a \in \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$ , gọi  $i_1$  là chỉ số nhỏ nhất sao cho  $a \in A_{i_1}$ . Khi đó,  $a \in B_{i_1}$ ,

tức là  $a \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ . Vậy  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ .

Ngược lại, giả sử  $a \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ , suy ra tồn tại  $j$  sao cho  $a \in B_j$ , tức là  $a \in A_j, a \notin \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k$ .

Do đó,  $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Vậy  $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

■

**Giải bài 1.3.** Không phải khi nào cũng đúng. Ví dụ, xét  $A, B, C$  là các tập con khác rỗng của  $\Omega$  và rời nhau từng đôi một, khi đó

$$A \subset \overline{B \cup C} \text{ và } B \subset \overline{A \cup C}$$

nhưng  $B \not\subset \overline{A \cup C}$

■

**Giải bài 1.5.**

(a)  $(A \cup B)(A \cup C) = A \cup BC$

(b)  $(A \cup B)(A \cup \overline{B}) = A$

$$(c) (A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B}) = AB$$

$$(d) (A \cup B)(\overline{A} \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B}) = \emptyset$$

$$(e) (A \cup B)(B \cup C) = AB \cup AC \cup B \cup BC = B \cup AC \cup B(A \cup C) = B \cup AC$$

■

**Giải bài 1.7.**

$$(a) \overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{A} \cup \overline{B}} = AB \cup AB = A(B \cup \overline{B}) = A$$

$$(b) (A \cup B)\overline{AB} = (A \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B}) = A\overline{B} \cup B\overline{A}$$

■

**Giải bài 1.9.**

$$(a) C_{50}^5 = 2118760$$

$$(b) A_{50}^5 = 254251200$$

■

**Giải bài 1.11.** Đầu tiên ta chọn 10 nam sinh trong 20 nam sinh, thì được  $C_{20}^{10}$  cách. Sau đó, chọn 10 nữ sinh trong 20 nữ sinh thì được  $C_{20}^{10}$  cách. Theo quy tắc nhân, số cách phân chia thỏa yêu cầu là  $C_{20}^{10}C_{20}^{10}$

■

**Giải bài 1.13.**

(a) Cứ mỗi hoán vị 5 người này sẽ là một cách sắp xếp thứ tự phát biểu A trước B hoặc B trước A. Mà số cách xếp A trước B bằng với số cách xếp B trước A vì chỉ cần đổi chỗ A và B trong 1 hoán vị 5 người. Do đó, số cách xếp người B phát biểu sau A là  $\frac{5!}{2} = 60$

(b) Ta xem AB là một nhóm và ta tiến hành hoán vị bốn phần tử sau: AB, C, D, E. Như vậy, số cách xếp người A phát biểu xong thì đến lượt người B là  $4! = 24$

■

**Giải bài 1.15.** Đầu tiên ta chọn lớp trưởng và có 40 cách chọn. Tiếp theo ta chọn lớp phó và có 39 cách chọn. Cuối cùng ta chọn thủ quỹ thì có 38 cách chọn. Do đó, số cách chọn ban cán sự lớp là  $40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280$  cách.

■

**Giải bài 1.17.** Số cách cử 3 người làm nhiệm vụ ở địa điểm A là  $C_9^3$ .

Số cách cử 2 người ở địa điểm B là  $C_6^2$

Số cách cử 4 người ở lại đồn là  $C_4^4$

Theo quy tắc nhân, số cách phân công là  $C_9^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^4 = 1260$

■

**Giải bài 1.19.**

- (a) Đầu tiên ta xếp 3 trong 12 hành khách lên toa thứ 1, thì có  $C_1^3 2$  cách. Sau đó, ta xếp 3 trong 9 hành khách còn lại lên toa thứ 2 thì có  $C_9^3$  cách. Tiếp theo, ta xếp 3 trong 6 hành khách còn lại lên toa thứ 3 thì có  $C_6^3$  cách. Cuối cùng, ta xếp 3 trong 3 hành khách còn lại lên toa thứ 4 thì có  $C_3^3$  cách. Theo quy tắc nhân, số cách xếp sẽ là  $C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 369600$  cách.
- (b) Đầu tiên ta xếp 6 hành khách vào toa thứ 1 và có  $C_{12}^6$  cách. Sau đó, ta xếp 4 hành khách vào toa thứ 2 và có  $C_6^4$  cách. Tiếp theo, ta xếp 1 hành khách lên toa thứ 3 và có  $C_2^1$  cách. Cuối cùng, ta xếp 1 hành khách lên toa thứ 4 và có  $C_1^1$  cách. Tuy nhiên ta có thể xem 4 toa tàu là 4 nhóm và ta có thể hoán vị 4 nhóm này. Số cách hoán vị là  $4!$ . Do đó, số cách xếp thỏa yêu cầu là  $4! \cdot C_{12}^6 \cdot C_6^4 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 665280$  cách.

■

### Giải bài 1.21.

- (a) Ta có,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \quad (7.1)$$

Lấy đạo hàm cấp một của (7.1), ta được

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1} \quad (7.2)$$

Thay  $x = 1$  vào biểu thức (7.2) ta được đpcm.

- (b) Lấy đạo hàm cấp 2 của (7.1), ta được

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k x^{k-2} \quad (7.3)$$

Thay  $x = 1$  vào biểu thức (7.3) ta được đpcm.

■

**Giải bài 1.23.** Áp dụng bài (1.20) bằng cách thay  $n$  bằng  $2n$ ,  $r$  bằng  $n$  và  $m$  bằng  $n$ . Ta được,

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \dots + C_n^i C_n^{n-i} + \dots + C_n^n C_n^0 = C_{2n}^n$$

Do  $C_n^i = C_n^{n-i} \quad \forall i = 0, \dots, n$  nên ta có đpcm.

■

# Biến cố và xác suất

## Giải bài 2.1.

- (a) Ta có,  $A \subset A + B = \bar{A}$  suy ra  $A = \emptyset$  và  $B = \Omega$ . Thử lại ta thấy đúng. Vậy  $A = \emptyset, B = \Omega$
- (b) Ta có,  $A \supset AB = \bar{A}$  suy ra  $A = \Omega$  và  $B = \emptyset$ . Thử lại ta thấy đúng. Vậy  $A = \Omega, B = \emptyset$
- (c) Ta có,  $A \subset A + B = AB \subset B \subset A + B = AB \subset A$ , tức là  $A \subset B \subset A$ . Do đó,  $A = B$ . Thử lại thấy đúng. Vậy  $A = B$

Ta có,  $A \cdot \overline{A + B} = A(\bar{A} \bar{B}) = (A\bar{A})\bar{B} = \emptyset$ . Vậy  $A, \overline{A + B}$  xung khắc. ■

## Giải bài 2.3.

- (a) Gọi  $A$  : "Có đúng một sinh viên đạt yêu cầu"

Ta có,

$$A = B_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4 + \bar{B}_1 B_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4 + \bar{B}_1 \bar{B}_2 B_3 \bar{B}_4 + \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 B_4$$

- (b) Gọi  $B$  : "Có đúng ba sinh viên đạt yêu cầu"

Ta có,

$$B = B_1 B_2 B_3 \bar{B}_4 + B_1 B_2 \bar{B}_3 B_4 + B_1 \bar{B}_2 B_3 B_4 + \bar{B}_1 B_2 B_3 B_4$$

- (c) Gọi  $C$  : "Có ít nhất một sinh viên đạt yêu cầu"

Ta có,

$$C = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

- (d) Gọi  $D$  : "Không có sinh viên nào đạt yêu cầu"

Ta có,

$$D = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4$$

■

**Giải bài 2.5.** Ta có:

$$\begin{aligned}\overline{X + A} + \overline{A + A} &= B \\ \overline{X} \cdot \overline{A} + \overline{X} A &= B \\ \overline{X}(\overline{A} + A) &= B \\ \overline{X} &= B \\ X &= \overline{B}\end{aligned}$$

■

**Giải bài 2.7.**

(a) Mô tả các biến cố  $A_6B_6, A_3B_5$

- $A_6B_6$ : “số nốt ở mặt trên cả hai con xúc xắc đều là 6”
- $A_3B_5$ : “số nốt ở mặt trên con xúc xắc thứ nhất là 3 và trên con xúc xắc thứ hai là 5.”

(b) Viết bằng kí hiệu các biến cố  $A, B$ .

$$A = \{A_1B_4, A_2B_5, A_3B_6, A_4B_1, A_5B_2, A_6B_3\}$$

$$B = \{A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5, A_6B_6\}$$

(c) Một nhóm đầy đủ các biến cố là

$$\{A, \overline{A}\}$$

■

**Giải bài 2.9.**

Gọi  $A$  : “Tất cả cùng ra ở tầng bốn ”

$B$  : “Tất cả cùng ra ở một tầng ”

$C$  : “Mỗi người ra một tầng khác nhau”

(a) Xác suất tất cả cùng ra ở tầng bốn,  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6^3}$ .

(b) Xác suất tất cả cùng ra ở một tầng,  $\mathbb{P}(B) = \frac{6}{6^3}$ .

(c) Mỗi người ra một tầng khác nhau,  $\mathbb{P}(C) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}$ .

■

**Giải bài 2.11.**

Gọi  $A$  : “Trong số sản phẩm lấy ra có đúng  $s$  sản phẩm xấu”

Mỗi cách lấy ngẫu nhiên  $k$  sản phẩm từ lô hàng  $n$  sản phẩm là một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử. Do đó,  $|\Omega| = C_n^k$

Có  $C_m^s$  cách lấy ra  $s$  sản phẩm xấu từ  $m$  sản phẩm xấu trong lô hàng.

Có  $C_{n-m}^{k-s}$  cách lấy ra  $k - s$  sản phẩm tốt từ  $n - m$  sản phẩm tốt trong lô hàng.

Theo quy tắc nhân,  $|A| = C_m^s C_{n-m}^{k-s}$ . Do đó,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_m^s C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k}$$

■

**Giải bài 2.13.**

Gọi  $A$  : “Hộp thứ nhất có chứa 3 sản phẩm”

Mỗi cách xếp ngẫu nhiên một sản phẩm vào một trong 3 hộp là một cách chọn ngẫu nhiên một trong 3 hộp. Do đó, số cách xếp 12 sản phẩm ngẫu nhiên vào 3 hộp là số chỉnh hợp lặp chập 12 của 3 phần tử, tức là  $|\Omega| = \tilde{A}_3^{12} = 3^{12}$ .

Số cách xếp 3 sản phẩm cho hộp thứ nhất là  $C_{12}^3$ .

Số cách xếp 9 sản phẩm cho hộp thứ hai và ba là số chỉnh hợp lặp chập 9 của 2 phần tử, tức là  $\tilde{A}_2^9 = 2^9$ .

Từ đó, theo quy tắc nhân,  $|A| = 2^9 C_{12}^3$

Do đó,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2^9 C_{12}^3}{3^{12}} = 0.212$$

■

**Giải bài 2.15.**

Gọi  $A$  : “Ba đoạn sắt bẻ ra tạo thành một tam giác”.

Gọi  $x, y, l - (x + y)$  là độ dài 3 khúc được bẻ ngẫu nhiên. Khi đó,

$$\Omega = \{(x, y) | x > 0, y > 0, x + y < l\}$$

Để tạo thành tam giác thì  $x, y$  phải thỏa:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y > l - (x + y) \\ x + l - (x + y) > y \\ y + l - (x + y) > x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x + y > \frac{l}{2} \\ y < \frac{l}{2} \\ x < \frac{l}{2} \end{array} \right.$$

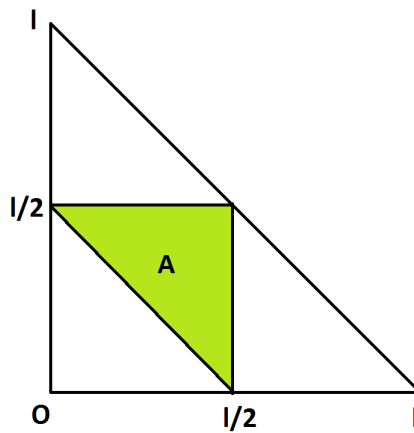


Khi đó

$$A = \{(x, y) | x + y > \frac{l}{2}, x < \frac{l}{2}, y < \frac{l}{2}\}$$

Biểu diễn  $x, y$  trên trục tọa độ ta tính được:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 0.25$$



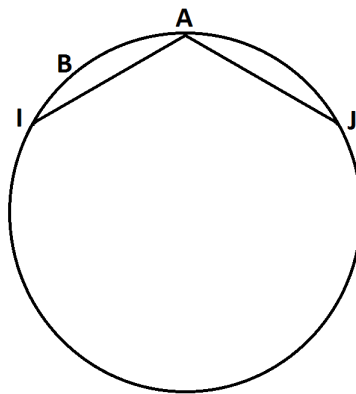
■

**Giải bài 2.17.**

Gọi  $C$  : “Cung  $AB$  không quá  $R$ ”.

Ta thấy

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{độ dài cung } IJ}{\text{độ dài đường tròn}} = \frac{1}{3}$$



■

**Giải bài 2.19.**

Gọi  $B_i$  : "Bộ phận thứ  $i$  hoạt động tốt" ( $i = 1, 2, 3$ )

$H$  : "Hệ thống hoạt động tốt"

Theo giả thiết, ta thấy rằng  $P(B_i) = 0.95$  với  $i = 1, 2, 3$  và

$$H = \overline{B_1}B_2B_3 + B_1\overline{B_2}B_3 + B_1B_2\overline{B_3} + B_1B_2B_3$$

Do tính độc lập, xung khắc và đối xứng nên

$$P(H) = 3P(\overline{B_1})P(B_2)P(B_3) + P(B_1)P(B_2)P(B_3) = 3(0.95)^2(0.05) + 0.95^3 = 0.9928$$

■

**Giải bài 2.21.**

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A) + P(B) - P(A + B) = \frac{1}{12} \\ P(\overline{A}\overline{B}) &= P(\overline{A + B}) = 1 - P(A + B) = \frac{1}{4} \\ P(\overline{A} + \overline{B}) &= P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = \frac{11}{12} \\ P(A\overline{B}) &= P(A) - P(AB) = \frac{1}{4} \\ P(\overline{A}B) &= P(B) - P(AB) = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

■

**Giải bài 2.23.**

Gọi  $A_i$  : "gọi đúng ở lần thứ  $i$ " ( $i = 1, 2, 3$ )

Khi đó, biến cố "gọi đúng khi không phải thử quá ba lần" là  $A = A_1 + \overline{A_1}A_2 + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3$ . Ta có

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(\overline{A_1}A_2) + P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3) \\ &= P(A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\overline{A_2}) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

Khi đã biết số cuối cùng là số lẻ thì khi đó các số để chọn quay chỉ còn giới hạn lại trong 5 trường hợp (số lẻ) nên công thức trên trở thành

$$P(A) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0.6$$

**Giải bài 2.25.**

Gọi  $A$  : “Người đó có ít nhất một vé trúng thưởng”.

$\bar{A}$  : “người đó không có vé trúng thưởng”

Ta có

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{N-M}^r}{C_N^r}$$

Từ đó,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{N-M}^r}{C_N^r}$$

**Giải bài 2.27.**

Gọi  $A_i$  : “Sinh viên thứ  $i$  nhận đúng áo của mình” ( $i = 1, \dots, n$ )

$A$  : “Có ít nhất một sinh viên nhận đúng áo của mình”

Ta có  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ .

Xác suất để sinh viên thứ  $i$  nhận đúng áo của mình là

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \text{ và } \sum_{i=1}^n P(A_i) = \frac{n(n-1)!}{n!} = 1$$

Ta tính xác suất để sinh viên thứ  $k$  và  $i$  nhận đúng áo

$$P(A_k A_i) = P(A_i)P(A_k|A_i) = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$\text{Từ đó } \sum_{k < i}^n P(A_k A_i) = C_n^2 P(A_k A_i) = \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{2!}$$

Tổng quát, xác suất để có  $m$  ( $m \leq n$ ) sinh viên  $k_1, \dots, k_m$  nhận đúng áo của mình là

$$P(A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_m}) = \frac{(n-m)!}{n!}$$

$$\text{và } \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} P(A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_m}) = C_n^m \frac{(n-m)!}{n!} = \frac{1}{m!}$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P\left(\sum_{i=1}^n A_k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{k < i}^n P(A_k A_i) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \\
 &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}
 \end{aligned}$$

Khi  $n \rightarrow \infty$ ,  $P(A) \sim 1 - \frac{1}{e}$  ■

### Giải bài 2.29.

Gọi  $A_i$  : “Xạ thủ thứ  $i$  bắn trúng” ( $i = 1, 2, 3$ )

Theo giả thiết,  $P(A_1) = 0.6; P(A_2) = 0.7; P(A_3) = 0.8$

(a) Gọi  $A$  : “Chỉ có người thứ hai bắn trúng”

Khi đó,  $A = \overline{A_1} A_2 \overline{A_3}$  và

$$P(A) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) = (0.4)(0.7)(0.2) = 0.056$$

(b) Gọi  $B$  : “Có đúng một người bắn trúng”

Khi đó,  $B = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + A + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$  và

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) + P(A) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) \\
 &= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(A) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) \\
 &= (0.6)(0.3)(0.2) + 0.056 + (0.4)(0.3)(0.8) = 0.188
 \end{aligned}$$

(c) Gọi  $C$  : “Có ít nhất một người bắn trúng”

Khi đó,  $C = A_1 + A_2 + A_3$  và

$$\begin{aligned}
 P(C) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3) \\
 &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1)P(A_2) - P(A_1)P(A_3) - P(A_2)P(A_3) \\
 &\quad + P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\
 &= 0.6 + 0.7 + 0.8 - (0.6)(0.7) - (0.6)(0.8) - (0.7)(0.8) + (0.6)(0.7)(0.8) \\
 &= 0.976
 \end{aligned}$$

Hoặc ta có thể dùng cách tính sau:

$$\begin{aligned}
 P(C) &= P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) \\
 &= 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) \\
 &= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\
 &= 1 - (0.4)(0.3)(0.2) = 0.976
 \end{aligned}$$

(d) Gọi  $D$  : “Cả ba người đều bắn trúng”

Khi đó,  $D = A_1 A_2 A_3$  và

$$P(D) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (0.6)(0.7)(0.8) = 0.336$$

(e) Gọi  $E$  : “Có đúng hai người bắn trúng”

Khi đó,  $E = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3$  và

$$\begin{aligned}
 P(E) &= P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) \\
 &= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) \\
 &= (0.6)(0.7)(0.2) + (0.6)(0.3)(0.8) + (0.4)(0.7)(0.8) = 0.452
 \end{aligned}$$

(f) Gọi  $F$  : “Có ít nhất hai người bắn trúng”

Khi đó,  $F = D + E$  và

$$\begin{aligned}
 P(F) &= P(D) + P(E) \\
 &= 0.336 + 0.452 = 0.788
 \end{aligned}$$

(g) Gọi  $G$  : “Có không quá hai người bắn trúng”

Khi đó,  $P(G) = 1 - P(D) = 1 - 0.336 = 0.664$

■

**Giải bài 2.31.** Ta có

$$A = \{abc, acb, cab\} \quad \text{và} \quad B = \{abc, acb, bac\}$$

(a) Vì  $AB = \{abc, acb\} \neq \emptyset$  nên  $A$  và  $B$  không tạo thành một hệ đầy đủ.

(b)  $P(AB) = P[\{abc, acb\}] = 1/9$  và  $P(A) = P(B) = 1/18 + 1/18 + 2/9 = 1/3$ . Do đó

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Vậy  $A$  và  $B$  là hai biến cố độc lập nhau.

**Giải bài 2.33.**

Gọi  $A_k$  : “Bộ phận thứ  $k$  hỏng trong khoảng thời gian  $T$ ” ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$A$  : “Máy tính ngừng làm việc trong khoảng thời gian  $T$ ”

$\bar{A}$  : “Máy tính làm việc tốt trong khoảng thời gian  $T$ ”

Theo giả thiết,  $P(A_k) = p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) và  $\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n$ . Do đó

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)$$

**Giải bài 2.35.** Ta có

$$P(A) = P(A\bar{B} + AB) = P(A|\bar{B})P(\bar{B}) + P(AB) = (1/8)(1/2) + 1/4 = 5/16$$

**Giải bài 2.37.**

Gọi  $T_i$  : “Tổng số nốt hai lần tung bằng  $i$ ” ( $i = \overline{1, 6}$ )

$N_{j,k}$  : “Số nốt trên lần tung thứ  $j$  bằng  $k$ ” ( $j = 1, 2; k = \overline{1, 6}$ )

Ta tìm,

$$P(T_i | N_{1,2} \cup N_{1,4} \cup N_{1,6}) = \frac{P(N_{1,2} \cap N_{2,2})}{P(N_{1,2} \cup N_{1,4} \cup N_{1,6})} = \frac{(1/6)^2}{(1/2)} = 1/18$$

**Giải bài 2.39.**

Gọi  $A_i$  : “Bắn trúng lần thứ  $i$ ”

$A$  : “Phải bắn đến viên thứ 6”

Ta có:  $A = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_5 A_6$  và

$$P(A) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_5)P(A_6) = (0.8^5)(0.2) = 0.0655$$

**Giải bài 2.41.**

$$(a) P(A + B + C) = 0.95$$

$$(b) P(\overline{A + B + C}) = 1 - P(A + B + C) = 1 - 0.95 = 0.05$$

(c)  $P(\overline{A} \overline{B} C) = P(A + B + C) - P(A + B) = 0.95 - 0.80 = 0.15$

(d) Ta cần tính

$$\begin{aligned} P[(\overline{A} \overline{B} C) + (\overline{A} B \overline{C}) + (\overline{A} \overline{B} C)] &= P(\overline{A} \overline{B} C) + P(\overline{A} B \overline{C}) + P(\overline{A} \overline{B} C) \\ &= 3P(A + B + C) - P(A + B) - P(B + C) - P(C + A) \\ &= 3(0.95) - 0.80 - 0.90 - 0.85 = 0.3 \end{aligned}$$

■

### Giải bài 2.43.

Gọi  $A_i$  : “người thứ  $i$  nhận được phiếu trúng thưởng” ( $i = 1, \dots, 10$ )

Ta có

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{2}{10} = 0.2 \\ P(A_2) &= P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10} \\ &= 0.2 \\ &\dots \\ P(A_{10}) &= 0.2 \end{aligned}$$

■

### Giải bài 2.45.

Gọi  $A$  : "Người này hút thuốc"

$B$  : "Người này bị viêm họng"

Theo giả thiết ta có,

$$P(A) = 0.3; P(B|A) = 0.6; P(B|\overline{A}) = 0.3$$

Ta thấy rằng  $\{A, \overline{A}\}$  là một hệ đầy đủ các biến cố. Theo công thức xác suất đầy đủ, ta tính được

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = 0.6(0.3) + 0.3(0.7) = 0.39$$

(a) Theo công thức Bayes, xác suất để người đó hút thuốc lá khi biết người đó bị viêm họng là

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.6(0.3)}{0.39} = 0.462$$

- (b) Theo công thức Bayes, xác suất để người đó hút thuốc lá khi biết người đó không bị viêm họng là

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(\bar{B}|A)P(A)}{P(\bar{B})} = \frac{0.4(0.3)}{0.61} = 0.197$$

■

**Giải bài 2.47.** DS: a. 0.28; b. 0.4375

Gọi  $A$  : “Nhận được cặp sinh đôi thật”

$B$  : “Nhận được cặp sinh đôi có cùng giới tính”

Do các cặp sinh đôi thật luôn luôn có cùng giới tính nên

$$P(B|A) = 1$$

Với các cặp sinh đôi giả thì giới tính của mỗi đứa độc lập nhau và có xác suất là 0.5 nên

$$P(B|\bar{A}) = P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.5$$

Do thống kê trên các cặp sinh đôi nhận được thì

$$P(B) = 0.3 + 0.34 = 0.64; P(\bar{B}) = 0.36$$

- (a) Do công thức xác suất toàn phần

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) \\ &= P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})(1 - P(A)) \end{aligned}$$

Suy ra

$$P(A) = 0.28$$

- (b) Do công thức Bayes,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.28}{0.64} = 0.4375$$

■

**Giải bài 2.49.**

Gọi  $A_i$  : “Sản phẩm lấy ra lần đầu ở lô thứ  $i$  là loại I” ( $i = 1, 2$ )

$B$  : “Sản phẩm lấy ra lần sau là loại I”



Ta có  $A_1, A_2$  độc lập với nhau và  $\{A_1A_2, \overline{A_1}A_2, A_1\overline{A_2}, \overline{A_1}\overline{A_2}\}$  là một hệ đầy đủ các biến cố.

$$P(A_1) = \frac{10}{12}, P(A_2) = \frac{16}{20}$$

$$P(B|A_1A_2) = 1, P(B|\overline{A_1}A_2) = P(B|A_1\overline{A_2}) = \frac{1}{2}, P(B|\overline{A_1}\overline{A_2}) = 0$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1A_2)P(A_1A_2) + P(B|\overline{A_1}A_2)P(\overline{A_1}A_2) \\ &\quad + P(B|A_1\overline{A_2})P(A_1\overline{A_2}) + P(B|\overline{A_1}\overline{A_2})P(\overline{A_1}\overline{A_2}) \\ &= 1 \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{16}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{16}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{4}{20} \\ &= 0.79 \end{aligned}$$

■

### Giải bài 2.51.

Gọi  $A_i$  : “Sản phẩm do máy  $i$  sản xuất”

$A$  : “Sản phẩm là phế phẩm”

Ta có:  $A_1, A_2, A_3$  là một hệ đầy đủ các biến cố và

$$P(A_1) = 0.25, P(A_2) = 0.3, P(A_3) = 0.45$$

$$P(A|A_1) = 0.001, P(A|A_2) = 0.002, P(A|A_3) = 0.004$$

(a) Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|A_1)P(A_1) + P(A|A_2)P(A_2) + P(A|A_3)P(A_3) \\ &= 0.00265 \end{aligned}$$

(b) Theo công thức Bayes ta có:

$$\begin{aligned} P(A_2|A) &= \frac{P(A|A_2)P(A_2)}{P(A)} \\ &= 0.226 \end{aligned}$$

■

### Giải bài 2.53.

Gọi  $A_i$  : “Khẩu pháo thứ  $i$  bắn trúng” ( $i = 1, 2, 3$ )

$B_k$  : “Mục tiêu trúng  $k$  phát đạn” ( $k = 0, 1, 2, 3$ )

$B$  : “Mục tiêu bị tiêu diệt”.

Ta có:  $\{B_k, k = 0, 1, 2, 3\}$  là một hệ đầy đủ các biến cố và

$$B_0 = \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}, \quad B_1 = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$$

$$B_2 = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3, \quad B_3 = A_1 A_2 A_3$$

Ta có các giả thiết sau:

$$P(A_1) = 0.4, P(A_2) = 0.7, P(A_3) = 0.8$$

$$P(B|B_0) = 0, P(B|B_1) = 0.3, P(B|B_2) = 0.7, P(B|B_3) = 1$$

Từ đó, ta tính được

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\ &= (0.6)(0.3)(0.2) \\ &= 0.036 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) \\ &= (0.4)(0.3)(0.2) + (0.6)(0.7)(0.2) + (0.6)(0.3)(0.8) \\ &= 0.252 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) \\ &= (0.4)(0.7)(0.2) + (0.4)(0.3)(0.8) + (0.6)(0.7)(0.8) \\ &= 0.488 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= (0.4)(0.7)(0.8) \\ &= 0.224 \end{aligned}$$

(a) Theo công thức xác suất đầy đủ ta có

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|B_0)P(B_0) + P(B|B_1)P(B_1) + P(B|B_2)P(B_2) + P(B|B_3)P(B_3) \\ &= 0.(0.036) + (0.3)(0.252) + (0.7)(0.488) + 1.(0.224) \\ &= 0.6412 \end{aligned}$$

(b) Ta có

$$\begin{aligned}
 P(BA_3) &= P[BA_3(A_1A_2 + \overline{A_1}A_2 + A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}\overline{A_2})] \\
 &= P(A_1A_2A_3B) + P(\overline{A_1}A_2A_3B) + P(A_1\overline{A_2}A_3B) + P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3B) \\
 &= P(B|A_1A_2A_3)P(A_1A_2A_3) + P(B|\overline{A_1}A_2A_3)P(\overline{A_1}A_2A_3) \\
 &\quad + P(B|A_1\overline{A_2}A_3)P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(B|\overline{A_1}\overline{A_2}A_3)P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3) \\
 &= 1.(0.224) + (0.7)[(0.6)(0.7)(0.8)] + (0.7)[(0.4)(0.3)(0.8)] \\
 &\quad + (0.3)[(0.6)(0.3)(0.8)] \\
 &= 0.5696
 \end{aligned}$$

Do đó

$$P(A_3|B) = \frac{P(BA_3)}{P(B)} = \frac{0.5696}{0.6412} = 0.8883$$

■

### Giải bài 2.55.

(a) Tính xác suất để khách hàng mua được sản phẩm loại A

Gọi  $T$  : "Khách hàng mua được sản phẩm loại A"

$A_i$  : "Mua ở cửa hàng  $i$ "

Ta có  $\{A_1, A_2, A_3\}$  là một hệ đầy đủ các biến cố và

$$P(A_1) = \frac{2}{5} = 0.4 \quad P(A_2) = \frac{1}{5} = 0.2 \quad P(A_3) = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$P(T|A_1) = 0.7 \quad P(T|A_2) = 0.75 \quad P(T|A_3) = 0.5$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ, ta có xác suất để khách hàng mua được sản phẩm loại A là

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(A_1)P(T|A_1) + P(A_2)P(T|A_2) + P(A_3)P(T|A_3) \\
 &= 0.4 \times 0.7 + 0.2 \times 0.75 + 0.4 \times 0.5 \\
 &= 0.63
 \end{aligned}$$

(b) Áp dụng công thức Bayes, ta có

$$\begin{aligned}P(A_1|T) &= \frac{P(A_1)P(T|A_1)}{P(T)} \\&= \frac{0.4 \times 0.7}{0.63} = 0.4444 \\P(A_2|T) &= \frac{P(A_2)P(T|A_2)}{P(T)} \\&= \frac{0.2 \times 0.75}{0.63} = 0.2381 \\P(A_3|T) &= \frac{P(A_3)P(T|A_3)}{P(T)} \\&= \frac{0.4 \times 0.5}{0.63} = 0.3175\end{aligned}$$

Ta thấy rằng  $P(A_1|T)$  là lớn nhất tức là khả năng người ấy đã mua ở cửa hàng I là nhiều nhất.

■

# Biến ngẫu nhiên và hàm phân phối

**Giải bài 3.1.**

(a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ 1/8 & -2 < x \leq -1 \\ 3/8 & -1 < x \leq 0 \\ 5/8 & 0 < x \leq 1 \\ 7/8 & 1 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

(b)

$$P(-1 \leq X \leq 1) = \frac{6}{8}$$
$$P(X \leq -1 \text{ hoặc } X = 2) = \frac{4}{8}$$

(c) Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên  $Y = X^2$

$Y$	0	1	4
$\mathbb{P}$	2/8	4/8	2/8

■

**Giải bài 3.3.**

(a) Ta có

$$\begin{aligned} EX &= -1(0.5) + 0(0.2) + 3(0.3) = 0.4 \\ E(X^2) &= (-1)^2(0.5) + 0^2(0.2) + 3^2(0.3) = 3.2 \\ Var(X) &= E(X^2) - (EX)^2 = 3.04 \end{aligned}$$

Do đó,  $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = 1.7436$ .

(b) Ta có

$$E(X^3) = (-1)^3(0.5) + 0^3(0.2) + 3^3(0.3) = 7.6$$

(c) Với  $x \leq -1$  thì  $F_X(x) = 0$ .

Với  $-1 < x \leq 0$  thì  $F_X(x) = 0.5$ .

Với  $0 < x \leq 3$  thì  $F_X(x) = 0.5 + 0.2 = 0.7$ .

Với  $x > 3$  thì  $F_X(x) = 1$ .

Vậy

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq -1 \\ 0.5 & \text{nếu } -1 < x \leq 0 \\ 0.7 & \text{nếu } 0 < x \leq 3 \\ 1 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$$

(d) Ta có,

Với  $x = -1$  thì  $y = x^2 + x + 1 = 1$ .

Với  $x = 0$  thì  $y = x^2 + x + 1 = 1$ .

Với  $x = 3$  thì  $y = x^2 + x + 1 = 13$ .

Do đó,

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(X = -1) + P(X = 0) = 0.7 \\ P(Y = 13) &= P(X = 3) = 0.3 \end{aligned}$$

Vậy bảng phân phối xác suất của  $Y$  sẽ là

$Y$	1	13
$\mathbb{P}$	0.7	0.3

■

**Giải bài 3.5.** Ta tìm  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$

• Nếu  $x \leq 0$  thì  $F_X(x) = 0$

• Nếu  $x > 0$  thì  $F_X(x) = \int_0^x e^{-y}dy = 1 - e^{-x}$

Vậy

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

(a)

$$P(3 \leq X) = 1 - P(X < 3) = 1 - F_X(3) = e^{-3}$$

(b) Ta tìm  $a$  sao cho  $F_X(a) = 0.1$ , tức là

$$1 - e^{-a} = 0.1$$

Suy ra  $a = 0.105$ 

(c) Ta có:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\sqrt{X} < y)$$

- Nếu  $y \leq 0$  thì  $F_Y(y) = 0$
- Nếu  $y > 0$  thì  $F_Y(y) = P(0 \leq X < y^2) = F_X(y^2) - F_X(0) = 1 - e^{-y^2}$

Vậy

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-y^2} & y > 0 \end{cases}$$

Từ đó,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 2ye^{-y^2} & y > 0 \end{cases}$$

■

**Giải bài 3.7.** Ta thấy rằng  $f_X(x)$  là một hàm đối xứng qua trục  $Ox$ . Do đó  $P(X < 0) = 1/2$ .

■

**Giải bài 3.9.**(a) Ta tìm  $c$  từ điều kiện  $f_X(x) \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  và  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ . Ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-1}^1 c(1 - x^2)dx = \frac{4c}{3}$$

Suy ra  $c = \frac{3}{4}$ .Ta thấy rằng với giá trị  $c = \frac{3}{4}$  thì  $f_X(x) \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .Vậy  $c = \frac{3}{4}$ 

(b) Ta có

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{4}x(1 - x^2)dx = 0$$

(c) Ta có

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{4} x^2 (1 - x^2) dx = \frac{1}{5}$$

Do đó,

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{5}$$

(d) Ta có  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ .

Với  $x < -1$  thì  $F_X(x) = 0$ .

Với  $-1 \leq x \leq 1$  thì

$$F_X(x) = \int_{-1}^x \frac{3}{4} (1 - t^2) dt = -\frac{1}{4} x^3 + \frac{3}{4} x + \frac{1}{2}$$

Với  $x > 1$  thì  $F_X(x) = 1$ .

Vậy

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < -1 \\ -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} & \text{nếu } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$$

■

**Giải bài 3.11.** Ta có

$$p_{\sqrt{X}}(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{nếu } x = 0 \\ 1/2 & \text{nếu } x = 1 \\ 1/4 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} E(\sqrt{X}) &= \sum_{i=1}^3 x_i p_{\sqrt{X}}(x_i) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 1 \\ E(X) &= \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_X(x_i) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$



Do đó,

$$\text{Var}(X) = EX - \left[ E(\sqrt{X}) \right]^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

■

### Giải bài 3.13.

(a) Với  $x < 0$  hoặc  $x > 4$  thì  $f_X(x) = F'_X(x) = 0$ .

Với  $0 < x < 1$  thì  $f_X(x) = F'_X(x) = 1/2$ .

Với  $1 < x < 4$  thì  $f_X(x) = F'_X(x) = 1/6$ .

Với  $x = 0$  ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F_X(x) - F_X(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x/2}{x} = 1/2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F_X(x) - F_X(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0 - 0}{x} = 0 \end{aligned}$$

Do đó,  $F_X$  không có đạo hàm tại  $x = 0$ .

Với  $x = 1$  ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F_X(1+x) - F_X(1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1+x}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{x} = 1/6 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F_X(1+x) - F_X(1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1+x}{2} - \frac{1}{2}}{x} = 1/2 \end{aligned}$$

Do đó,  $F_X$  không có đạo hàm tại  $x = 1$ .

Với  $x = 4$  ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{F_X(4+x) - F_X(4)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{F_X(4+x) - F_X(4)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{4+x}{6} + \frac{1}{3} - 1}{x} = 1/6 \end{aligned}$$

Do đó,  $F_X$  không có đạo hàm tại  $x = 4$ .

Vậy

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ 1/6 & \text{nếu } 1 < x < 4 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \text{ hoặc } x > 4 \end{cases}$$

(b) Do  $0.5 < 0.75 < 1$  nên  $1 < x_{0.75} < 4$ . Từ đó, ta có phương trình

$$F_X(x_{0.75}) = \frac{x_{0.75}}{6} + \frac{1}{3} = 0.75$$

Giải ra ta được  $x_{0.75} = 2.5$ .

(c) Ta có

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x dx + \int_1^4 \frac{1}{6} x dx \\ &= 1.5 \end{aligned}$$

(d) Ta có

$$\begin{aligned} E(1/X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} f_X(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2x} x dx + \int_1^4 \frac{1}{6x} x dx \\ &= \infty \end{aligned}$$

(e) Ta có

$$(i) F_Y(0) = P(Y < 0) = P(X \leq 1) = F(1) = 0.5.$$

(ii) Ta tính

$$\begin{aligned} EY &= -P(X \leq 1) + P(X > 1) \\ &= -F(1) + 1 - F(1) \\ &= 1 - 2F(1) \\ &= 0 \\ E(Y^2) &= P(X \leq 1) + P(X > 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Do đó

$$Var(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = 1 - 0^2 = 1$$

■

### Giải bài 3.15.

(a) Ta tìm  $k$  từ điều kiện  $f(x) \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  và  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ . Ta có,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = k \int_0^4 x^2(4-x) dx = k \frac{64}{3}$$

Suy ra  $k = \frac{3}{64}$ .

Ta thấy rằng với  $k = \frac{3}{64}$  thì  $f(x) \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Vậy  $k = \frac{3}{64}$ .

(b)  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy.$

- Nếu  $x < 0$  thì  $F(x) = 0$
- Nếu  $0 \leq x \leq 4$  thì  $F(x) = \frac{3}{64} \int_0^x y^2(4-y)dy = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{256}x^4$
- Nếu  $x > 4$  thì  $F(x) = 1$

Vậy

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{256}x^4 & 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

(c) Ta có,

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^4 \frac{3}{64}x^3(4-x)dx \\ &= 2.4 \\ EX^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx \\ &= \int_0^4 \frac{3}{64}x^4(4-x)dx \\ &= 6.4 \end{aligned}$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = 0.64$$

Xét  $g(x) = \frac{3}{64}x^2(4-x), 0 \leq x \leq 4$ . Ta có,

$$g'(x) = \frac{3}{64}x(8-3x)$$

Ta thấy  $g(x)$  đổi dấu từ dương sang âm khi qua giá trị  $x = \frac{8}{3}$ . Do đó  $g(x)$  đạt cực đại tại giá trị này. Vậy  $Mod(X) = \frac{8}{3}$

(d) Gọi  $A$  : “Côn trùng chết trước một tháng tuổi.”

Ta có  $A = \{X < 1\}$  và

$$P(A) = P(X < 1) = F(1) = \frac{1}{16} - \frac{3}{256} = 0.0508$$



### Giải bài 3.17.

Gọi  $A$  : “Nhận được lọ hồng từ thùng A”

(a)  $B$  : “Nhận được lọ hồng từ thùng B”

$X$  : “Số lọ hồng trong hai lọ lấy ra”

Ta có  $X$  lấy các giá trị 0, 1, 2 và  $A, B$  là các biến cố độc lập. Ta có

$$P(X = 0) = P(\bar{A} \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{18}{20} \frac{17}{20} = 0.765$$

$$P(X = 1) = P(A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = \frac{2}{20} \frac{17}{20} + \frac{18}{20} \frac{3}{20} = 0.22$$

$$P(X = 2) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{2}{20} \frac{3}{20} = 0.015$$

Từ đó, ta được bảng phân phối xác suất

$X$	0	1	2
$\mathbb{P}$	0.765	0.22	0.015

và hàm mật độ của  $X$

$$f(x) = \begin{cases} 0.765 & \text{khi } x = 0 \\ 0.22 & \text{khi } x = 1 \\ 0.015 & \text{khi } x = 2 \\ 0 & \text{khi } x \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

(b) Gọi  $Y$  : “số lọ hồng trong 3 lọ lấy ra từ thùng B”

Ta có,

$$P(Y = k) = \frac{C_3^k C_{17}^{3-k}}{C_{20}^3}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

và ta nhận được bảng phân phối xác suất

$Y$	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	0.596	0.358	0.045	0.001

và hàm mật độ của  $Y$

$$f(y) = \begin{cases} 0.596 & \text{khi } y = 0 \\ 0.358 & \text{khi } y = 1 \\ 0.045 & \text{khi } y = 2 \\ 0.001 & \text{khi } y = 3 \\ 0 & \text{khi } y \neq 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

■

### Giải bài 3.19.

- (a) Từ điều kiện  $f_X(x) \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  và  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ , ta tính được  $c \geq 0$  và

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^{\infty} cxe^{-x/2}dx = 4c$$

Suy ra  $c = 1/4$

- (b) Theo định nghĩa,  $F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx$ .

Nếu  $x < 0$  thì  $F_X(x) = 0$ .

Nếu  $x \geq 0$  thì  $F_X(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{4}te^{-t/2}dt = 1 - \frac{1}{2}(x+2)e^{-x/2}$ .

Vậy

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(x+2)e^{-x/2} & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$$

- (c) Ta có  $EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{4}x^2e^{-x/2}dx = 4$ .

- (d) Ta có

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{4}x^3 e^{-x/2}dx \\ &= 24 \\ \text{Var}(X) &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= 8 \\ \sigma(X) &= \sqrt{\text{Var}(X)} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

- (e) Do  $X$  là biến ngẫu nhiên liên tục nên với  $Med(X) = m$  ta phải có  $P(X \leq m) = 1/2$ , tức là  $F(m) = 1 - \frac{1}{2}(m+2)e^{-m/2} = \frac{1}{2}$ . Từ đó ta tìm được  $m = -1.5361$ .

■

### Giải bài 3.21.

- (a) Ta có,

$X$	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	0.42	0.425	0.14	0.015

- (b) Ta có,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leq 0 \\ 0.42 & \text{khi } 0 < x \leq 1 \\ 0.845 & \text{khi } 1 < x \leq 2 \\ 0.985 & \text{khi } 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{khi } x > 3 \end{cases}$$

- (c) Ta có thể tính bằng một trong hai cách sau:

- $P(0 < X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.425 + 0.14 + 0.015 = 0.58$
- $P(0 < X \leq 4) = P(1 \leq X < 4) = F(4) - F(1) = 1 - 0.42 = 0.58$

■

### Giải bài 3.23.

- (a) Xác suất lấy được transistor loại  $A$ ,  $B$  lần lượt là  $p_1 = \frac{100}{150} = \frac{2}{3}$  và  $p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{3}$ . Gọi  $X$  là số transistor được rút ra.  $X \in \{1, 2, \dots\}$ . Ta cần tìm

$$\begin{aligned} P(X \in \{9, 10\}) &= P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= p_1^8 p_2 + p_1^9 p_2 \\ &= 0.0217 \end{aligned}$$

- (b) Gọi  $n$  là số transistor ít nhất được rút ra. Theo giả thiết,

$$P(X = n) = p_1^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{3}$$

Ta tìm được

$$n > \frac{\log(1/3)}{\log(2/3)} = 2.7095$$

Vậy  $n = 3$ .

■

### Giải bài 3.25.

Gọi  $A_i$  : “Tung lần thứ  $i$  được 6 nút” ( $i = 1, 2, 3$ )

$X$  : “Số tiền thu được sau 1 lần chơi”

Ta có,

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) \\ &= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\ &= \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} = 0.579 \\ P(X = 2000) &= P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3) \\ &= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} = 0.347 \\ P(X = 4000) &= P(A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3) \\ &= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{5}{6} = 0.069 \\ P(X = 6000) &= P(A_1 A_2 A_3) \\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6} = 0.005 \end{aligned}$$

Từ đó, ta có được bảng phân phối xác suất của  $X$  như sau:

$X$	0	2000	4000	6000
$\mathbb{P}$	0.579	0.347	0.069	0.005

Từ đó,

$$EX = \sum_{i=1}^4 x_i P(X = x_i) = 1000$$

- (a) Để người chơi về lâu về dài huề vốn thì ta cần  $A = EX = 1000$  đ
- (b) Để trung bình mỗi lần người chơi mất 1 ngàn đ thì  $A = EX + 1000 = 2000$  đ.

■

### Giải bài 3.27.

- (a) Ta có

$$F_X(x) = P(X < x) = P(X \leq x) = \begin{cases} c\pi x^2 & \text{nếu } 0 \leq x < 25 \\ 1 & \text{nếu } x \geq 25 \end{cases}$$

- (i) Vì  $F_X$  liên tục trái nên  $\lim_{x \rightarrow 25^-} F_X(x) = F(25)$ , tức là  $c\pi 25^2 = 1$ . Vậy  $c = \frac{1}{\pi 25^2}$ .
- (ii) Với  $0 \leq x < 25$  thì  $f_X(x) = \frac{2}{25^2}x$ .  
 Với  $x > 25$  thì  $f_X(x) = 0$   
 Với  $x = 25$ , ta có

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F_X(25+t) - F_X(25)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1-1}{t} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F_X(25+t) - F_X(25)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{25^2}(25+t)^2 - 1}{t} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F_X(25+t) - F_X(25)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F_X(25+t) - F_X(25)}{t} = 0$$

Hay  $f_X(25) = F'_X(25) = 0$ .

Vậy

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{25^2}x & \text{nếu } 0 \leq x < 25 \\ 0 & \text{nếu } x \geq 25 \end{cases}$$

- (iii) Ta có

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{25} \frac{2}{25^2} x^2 dx = \frac{50}{3}$$

- (iv) Ta có

$$P(X \leq 10 | X \geq 5) = \frac{P(5 \leq X \leq 10)}{P(X \geq 5)} = \frac{F(10) - F(5)}{1 - F(5)} = \frac{1}{8}$$

- (b) Gọi  $Y$  là số tiền người chơi đạt được. Ta có

$$\begin{aligned} EY &= P(r < X \leq 2r) + 10P(X \leq r) - 1 \\ &= F(2r) - F(r) + 10F(r) - 1 \\ &= F(2r) + 9F(r) - 1 \end{aligned}$$



Theo giả thiết  $EY = 0.25$  ta suy ra

$$F(2r) + 9F(r) - 1 = \frac{13}{25^2}r^2 - 1 = 0.25$$

Vậy  $r = 7.7522$  cm.

■

### Giải bài 3.29.

(a)  $A = 2$  và

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$EX = \frac{2}{3}, Var(X) = 0.055$$

(b)  $A = 0.5$  và

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos x) & \text{khi } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x > \pi \end{cases}$$

$$EX = \frac{\pi}{2}, Var(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

(c)  $A = \pi$  và

$$F(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{khi } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}, Var(X) = \frac{\pi - 3}{\pi^2}$$

(d)  $A = 3$  và

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^3} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$EX = \frac{3}{2}, Var(X) = \frac{3}{4}$$

■

**Giải bài 3.31.** Ta có,

$X^2$	0	1	4
$\mathbb{P}$	0.3	0.5	0.2

$X + Y$	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	0.06	0.17	0.27	0.27	0.17	0.06

Từ đó,

$$\begin{aligned}
 EX^2 &= 0.13 \\
 EX^4 &= 3.7 \\
 Var(X^2) &= EX^4 - (EX^2)^2 \\
 &= 3.683 \\
 E(X + Y) &= 0.5 \\
 E[(X + Y)^2] &= 1.9 \\
 Var(X + Y) &= E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2 \\
 &= 1.65
 \end{aligned}$$

■

**Giải bài 3.33.** Ta có

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{nếu } X \geq 0 \\ -1 & \text{nếu } X < 0 \end{cases}$$

Do đó,

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } y \leq -1 \\ P(X < 0) & \text{nếu } -1 < y \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } y > 1 \end{cases}$$

Vậy

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } y \leq -1 \\ F_X(0) & \text{nếu } -1 < y \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } y > 1 \end{cases}$$

■

**Giải bài 3.35.** Trong giải tích cơ sở ta đã biết,

**Định nghĩa 7.1.** Cho  $A$  là một tập con khác trống của  $\mathbb{R}$ . Ta nói  $A$  là một khoảng trong  $\mathbb{R}$  nếu và chỉ nếu  $[x, y] \subset A$  với mọi  $x, y \in A$  sao cho  $x \leq y$ .

**Định lý 7.2.** Cho  $f$  là một hàm số thực liên tục trên một khoảng  $A$ . Lúc đó,  $f(A)$  là một khoảng trong  $\mathbb{R}$ .

Trở lại bài toán, ta cần tìm

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(F(X) < y)$$

- Với  $y > 1$ , ta có  $F_Y(y) = 1$ .
- Với  $y \leq 0$ , ta có  $F_Y(y) = 0$ .
- Với  $0 < y \leq 1$ , ta áp dụng định lý (7.2) trên với  $A = \mathbb{R}$  và  $f = F$ , cho ta  $F(\mathbb{R})$  là một khoảng trong  $\mathbb{R}$ . Mặt khác  $F(0) = 0, F(2) = 1 \in F(\mathbb{R})$ . Do đó, theo định nghĩa (7.1),  $[0, 1] \subset F(\mathbb{R})$ . Kết hợp với  $F(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$ , ta suy ra  $F(\mathbb{R}) = [0, 1]$  tức  $F$  toàn ánh trên  $\mathbb{R}$ . Do đó, với  $0 < y \leq 1$  tồn tại ảnh ngược  $F^{-1}(y)$ .  
Từ tính đơn điệu của  $F$ , ta có,

$$F_Y(y) = P(F(X) < y) = P(X < F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$$

Vậy

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } y \leq 0 \\ y & \text{nếu } 0 < y \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } y > 1 \end{cases}$$

**Nhận xét 7.3.** Ta thấy rằng  $Y \sim U(0, 1)$  và không phụ thuộc vào phân phối của  $X$ .

■

# Một số biến ngẫu nhiên thông dụng

**Giải bài 4.1.** Gọi  $X$  là số sản phẩm không đạt tiêu chuẩn trong 10 sản phẩm lấy ra. Ta có,  $X \sim B(10, \frac{2000}{8000}) = B(10, 0.25)$ .

Khi đó, xác suất để trong 10 sản phẩm lấy ra có 2 sản phẩm không đạt tiêu chuẩn là

$$P(X = 2) = C_{10}^2 (0.25)^2 (0.75)^8 = 0.282$$

■

**Giải bài 4.3.** Gọi  $X$  là số con trai trong một gia đình có 4 con thì  $X \sim B(4; 0.5)$

(a) Xác suất để có hai trai và hai gái trong bốn đứa con là

$$P(X = 2) = C_4^2 (0.5)^2 (0.5)^2 = 0.375$$

(b) Xác suất để có một con trai trong số bốn đứa con là

$$P(X = 1) = C_4^1 (0.5)^1 (0.5)^3 = 0.25$$

(c) Xác suất để cả bốn đều là trai là

$$P(X = 4) = C_4^4 (0.5)^4 (0.5)^0 = 0.0625$$

■

**Giải bài 4.5.** Gọi  $X$  là số trường hợp cần chăm sóc đặc biệt trong 20 ca sinh. Ta có,  $X \sim B(20; 0.01)$ .

(a) Xác suất để không có trường hợp nào cần chăm sóc đặc biệt là

$$P(X = 0) = C_{20}^0 (0.01)^0 (0.99)^{20} = 0.818$$

(b) Xác suất để có đúng một trường hợp cần chăm sóc đặc biệt là

$$P(X = 1) = C_{20}^1 (0.01)^1 (0.99)^{19} = 0.165$$

(c) Xác suất có nhiều hơn một trường hợp cần chăm sóc đặc biệt là

$$P(X > 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - (0.818 + 0.165) = 0.017$$

Khi xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối Poisson, nghĩa là  $X \sim P(20 \times 0.01) = P(0.2)$ , ta nhận được

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= e^{-0.2} = 0.819 \\ P(X = 1) &= e^{-0.2} \frac{0.2^1}{1!} = 0.164 \\ P(X > 1) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ &= 1 - (0.819 + 0.164) = 0.017 \end{aligned}$$

Kết luận : Với cỡ mẫu 20 và tỷ lệ bệnh  $p = 0.01$  thì kết quả của hai loại phân phối này xấp xỉ như nhau. ■

**Giải bài 4.7.** Gọi  $X$  là số người mắc bệnh  $A$  trong nhóm 400 người. Khi đó,  $X \sim B(400, 0.1)$

(a) Công thức tính xác suất để trong nhóm có nhiều nhất 50 người mắc bệnh  $A$  là

$$P(X \leq 50) = \sum_{i=0}^{50} C_{400}^i 0.1^i 0.9^{400-i}$$

(b) Do  $n = 400 \geq 20$  và  $p = 0.1$  không quá gần 0 hoặc 1, nên ta có thể áp dụng công thức xấp xỉ phân phối chuẩn.

$$\begin{aligned} P(X \leq 50) &= P\left(\frac{X - 400 \cdot (0.1)}{\sqrt{400 \cdot (0.1) \cdot (0.9)}} \leq \frac{50 - 400 \cdot (0.1)}{\sqrt{400 \cdot (0.1) \cdot (0.9)}}\right) \\ &\approx \Phi(1.667) \\ &= 0.953 \end{aligned}$$

■

**Giải bài 4.9.** Vì mỗi giờ sản xuất được 20 sản phẩm nên mỗi khoảng thời gian 30 phút máy sản xuất được 10 sản phẩm. Gọi  $X$  là số thứ phẩm máy sản xuất ra trong 30 phút. Theo giả thiết ta có  $X \sim B(10, 0.85)$ . Ta cần tìm

$$\begin{aligned} P(X \in \{8, 9\}) &= P(X = 8) + P(X = 9) \\ &= C_{10}^8 (0.85)^8 (0.15)^2 + C_{10}^9 (0.85)^9 (0.15)^1 \\ &= 0.6233 \end{aligned}$$

■

**Giải bài 4.11.**

Gọi  $A_i$  : "Xúc sắc thứ  $i$  xuất hiện ô người chơi đặt" ( $i = 1, 2, 3$ )

$B$  : "Người chơi thắng"

Ta có  $P(B) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6} = 0.00463$

Vậy sau nhiều lần chơi người làm cái sẽ thắng.

Gọi  $X$  là số tiền người làm cái thu được. Ta có bảng phân phối của  $X$  như sau:

$X$	-5000	1000
$\mathbb{P}$	0.00463	0.99537

Khi đó trung bình mỗi ván người làm cái sẽ thắng  $EX = 972.2222$  đ. ■

#### **Giải bài 4.13.**

(a) Trước hết ta lập bảng phân phối xác suất của  $X$  và  $Y$  như sau:

$X$	0	1
$\mathbb{P}$	0.2	0.8

$Y$	0	1	2
$\mathbb{P}$	0.64	0.32	0.04

Ta có,

$$\begin{aligned}
 P(X + Y = 0) &= P(X = 0, Y = 0) \\
 &= P(X = 0)P(Y = 0) \\
 &= 0.512 \\
 P(X + Y = 1) &= P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) \\
 &= P(X = 0)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 0) \\
 &= 0.384 \\
 P(X + Y = 2) &= P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1) \\
 &= P(X = 0)P(Y = 2) + P(X = 1)P(Y = 1) \\
 &= 0.096 \\
 P(X + Y = 3) &= P(X = 1, Y = 2) \\
 &= P(X = 1)P(Y = 2) \\
 &= 0.008
 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra bảng phân phối xác suất của  $X + Y$  là

$X + Y$	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	0.512	0.384	0.096	0.008

Kiểm tra  $X + Y \sim B(3, \frac{1}{5})$ . Ta có,

$$\begin{aligned} P(X + Y = 0) &= C_3^0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \\ P(X + Y = 1) &= C_3^1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\ P(X + Y = 2) &= C_3^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^1 \\ P(X + Y = 3) &= C_3^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^0 \end{aligned}$$

Vậy  $X + Y \sim B(3, \frac{1}{5})$ .

(b) Ta lập bảng phân phối xác suất của  $X$  và  $Y$  như sau:

$X$	$\parallel$	0	1
$\mathbb{P}$	$\parallel$	0.5	0.5

$Y$	$\parallel$	0	1	2
$\mathbb{P}$	$\parallel$	0.64	0.32	0.04

Ta có,

$$\begin{aligned} P(X + Y = 0) &= P(X = 0, Y = 0) \\ &= P(X = 0)P(Y = 0) \\ &= 0.32 \\ P(X + Y = 1) &= P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) \\ &= P(X = 0)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 0) \\ &= 0.48 \\ P(X + Y = 2) &= P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1) \\ &= P(X = 0)P(Y = 2) + P(X = 1)P(Y = 1) \\ &= 0.18 \\ P(X + Y = 3) &= P(X = 1, Y = 2) \\ &= P(X = 1)P(Y = 2) \\ &= 0.02 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra bảng phân phối xác suất của  $X + Y$  là

$X + Y$	$\parallel$	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	$\parallel$	0.32	0.48	0.18	0.02

Giả sử  $X + Y$  có phân bố nhị thức dạng  $B(3, p)$ . Khi đó,

$$P(X + Y = 0) = C_3^0 p^0 (1 - p)^3 = 0.32$$

Ta suy ra,  $p = 0.316$

Mặt khác, với giá trị  $p$  này,

$$P(X + Y = 3) = C_3^3 p^3 (1 - p)^0 = p^3 = 0.0316 > 0.02 \text{ (vô lí)}$$

Vậy  $X + Y$  không có phân bố nhị thức.

■

**Giải bài 4.15.** Gọi  $X$  là số bì thư máy đọc sai trong mỗi phút.

Ta có,  $X \sim B(5000, 0.0004)$

(a) Số bì thư trung bình mỗi phút máy đọc sai là

$$EX = 5000 \cdot (0.0004) = 2$$

(b) Số bì thư tin chắc nhất trong mỗi phút máy đọc sai là số bì thư mà xác suất máy đọc sai là lớn nhất, tức là  $Mod(X)$ . Ta có,

$$5000 \cdot (0.0004) - 0.9996 \leq Mod(X) \leq 5000 \cdot (0.0004) + 0.9996$$

tức là  $1.0004 \leq Mod(X) \leq 2.9996$

Suy ra  $Mod(X) = 2$ .

(c) Xác suất để trong một phút máy đọc sai ít nhất 3 bì thư là

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) \\ &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \end{aligned}$$

Do  $n = 5000 \geq 100$ ,  $p = 0.0004 \leq 0.01$ ,  $np = 2 \leq 20$ . Nên ta có thể tính các xác suất xấp xỉ theo luật Poisson như sau,

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - e^{-2} \left( 1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) \\ &= 0.323 \end{aligned}$$

■

**Giải bài 4.17.**



(a) Gọi  $X$  là số thứ phẩm trong 10 sản phẩm được kiểm tra.  $X \in \{0, 1, 2\}$ . Ta có

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{C_{23}^{10}}{C_{25}^{10}} = 0.35 \\ P(X = 1) &= \frac{C_2^1 C_{23}^9}{C_{25}^{10}} = 0.5 \end{aligned}$$

Xác suất quá trình sản xuất được báo cáo đạt yêu cầu là

$$P(X \in \{0, 1\}) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.85$$

Gọi  $Y$  là số lần quá trình sản xuất được báo cáo đạt yêu cầu trong 8 lần kiểm tra. Ta có  $Y \sim B(8, 0.85)$ .

Ta cần tính

$$\begin{aligned} P(X \geq 7) &= P(X = 7) + P(X = 8) \\ &= C_8^7 (0.85)^7 (0.15)^1 + C_8^8 (0.85)^8 (0.15)^0 \\ &= 0.6572 \end{aligned}$$

(b) Gọi  $Z$  là số lần quá trình sản xuất được báo cáo không đạt yêu cầu trong 8 lần kiểm tra. Ta có  $Z \sim B(8, 0.15) \approx P(8 \times 0.15 = 1.2)$ .

Do đó,

$$P(Y \geq 7) = P(Z \leq 1) = e^{-1.2} \left( \frac{1.2^0}{0!} + \frac{1.2^1}{1!} \right) = 0.6626$$

(c) Theo giả thiết, ta cần tính

$$\begin{aligned} P(X = 0 | X \leq 1) &= \frac{P(X = 0, X \leq 1)}{P(X \leq 1)} \\ &= \frac{P(X = 0)}{P(X \leq 1)} \\ &= \frac{0.35}{0.85} = 0.4118 \end{aligned}$$

■

**Giải bài 4.19.** Ta có

$$P(X \geq 1 | X \leq 1) = \frac{P(X \geq 1, X \leq 1)}{P(X \leq 1)} = \frac{P(X = 1)}{P(X \leq 1)} = \frac{e^{-5.5}}{e^{-5} + e^{-5.5}} = \frac{5}{6}$$

■

**Giải bài 4.21.**

(a) Xác suất không phải tất cả 4 chiếc ô tô đều được thuê là

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= e^{-2} \left( 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} \right) \\ &= 0.857 \end{aligned}$$

(b) Xác suất tất cả 4 chiếc ô tô đều được thuê là

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.857 = 0.143$$

(c) Xác suất cửa hàng không đáp ứng được yêu cầu là

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= P(X \geq 4) - P(X = 4) \\ &= 0.143 - e^{-2} \frac{2^4}{4!} \\ &= 0.053 \end{aligned}$$

(d) Trung bình số ô tô được thuê là  $EX = 2$

(e) Ta có,

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - e^{-2} \left( 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} \right) \\ &= 0.017 < 0.02 \end{aligned}$$

Như vậy số ô tô cần thiết để xác suất không đáp ứng được nhu cầu thuê bé hơn 2% là 5.

■

### **Giải bài 4.23.**

(a) Theo giả thiết, ta có  $X \sim P(\lambda)$  và

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= 3P(X = 0) \\ \iff \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} &= 3\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} \\ \iff \lambda &= 3 \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 4) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= e^{-3} \left( \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} \right) \\ &= 0.6161 \end{aligned}$$

(b) Ta có  $P(X = 0) = e^{-3} = 0.0498$ . Theo giả thiết,  $U \sim B(100, 0.0498)$ . Do đó,

$$\begin{aligned} P(U \leq 1) &= P(U = 0) + P(U = 1) \\ &= C_{100}^0 (0.0498)^0 (0.9502)^{100} + C_{100}^1 (0.0498)^1 (0.9502)^{99} \\ &= 0.0377 \end{aligned}$$

■

**Giải bài 4.25.** Gọi  $X_i$  là số khách hàng xuất hiện trong phút thứ  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Theo giả thiết các  $X_i$  độc lập nhau và  $X_i \sim P(5)$ .

Gọi  $Y$  là số khách hàng xuất hiện trong khoảng thời gian 3 phút. Ta có  $Y = X_1 + X_2 + X_3$ . Theo bài (4.20), thì  $Y \sim P(15)$ .

Ta cần tìm

$$P(Y \geq 10) = 1 - P(Y \leq 9) = 1 - \sum_{k=0}^9 e^{-15} \frac{15^k}{k!} = 0.9301$$

■

**Giải bài 4.27.** Ta có  $X \sim P(\lambda)$  và  $p = P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$ .

Gọi  $Y$  là số bánh quy không có nho khô trong 20 bánh trong hộp. Khi đó  $Y \sim B(20, p)$ .

Ta có điều kiện

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= 0.925 \\ \iff P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) &= 0.925 \\ \iff C_{20}^0 p^0 q^{20} + C_{20}^1 p^1 q^{19} + C_{20}^2 p^2 q^{18} &= 0.925 \quad \text{với } q = 1 - p \\ \iff 171q^{20} - 360q^{19} + 190q^{18} - 0.925 &= 0 \end{aligned}$$

Giải phương trình này ta được  $q = 0.9501$  tức  $p = 0.0499$ .

Từ đó  $\lambda = -\ln(0.0499) = 2.9977 \approx 3$ .

Chú ý rằng, ta có thể kiểm tra với  $\lambda = 3$ , ta có

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &\approx 0.9502^{20} + 20(0.9502)^{19}(0.0498) \\ &\quad + 190(0.9502)^{18}(0.0498)^2 \approx 0.925 \end{aligned}$$

Tuy nhiên  $\lambda$  không nhất thiết phải là số nguyên vì nó là số **trung bình** nho khô có trong một cái bánh. ■

**Giải bài 4.29.**

(a) Gọi

$A_i$ : "sản phẩm thứ  $i$ , được sản xuất bởi máy đầu tiên, là chính phẩm" ( $i = 1, 2, \dots$ )

$X$  là số sản phẩm được sản xuất bởi máy đầu tiên trước khi nó tạo ra thứ phẩm đầu tiên. Ta có  $P(A_i) = 0.98$  với mọi  $i = 1, 2, \dots$  và

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(\overline{A_1}) = 0.02 \\ P(X = 1) &= P(A_1 \overline{A_2}) = 0.98(0.02) \\ &\dots \\ P(X = n) &= P(A_1 A_2 \dots A_n \overline{A_{n+1}}) = (0.98)^n (0.02) \\ &\dots \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n) \\ &= 0.02 \sum_{n=0}^{\infty} n(0.98)^n \end{aligned} \quad (7.4)$$

Đặt  $p = 0.98 < 1$ , ta cần tìm  $\sum_{n=0}^{\infty} np^n$ . Ta có

$$\sum_{k=0}^n p^k = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p} \quad (7.5)$$

Lấy đạo hàm theo  $p$  hai vế của (7.5),

$$\sum_{k=0}^n kp^{k-1} = \frac{np^{n+1} - (n+1)p^n + 1}{(1-p)^2} \quad (7.6)$$

Nhân hai vế của (7.6) cho  $p$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n kp^k &= \frac{np^{n+2} - (n+1)p^{n+1} + p}{(1-p)^2} \\ &= \frac{np^{n+1}(p-1) - p^{n+1} + p}{(1-p)^2} \\ &= \frac{np^{n+1}}{p+1} - \frac{p^{n+1}}{(1-p)^2} + \frac{p}{(1-p)^2} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} np^n = 0$ . Thật vậy, do  $p < 1$  nên  $\frac{1}{p} > 1$  hay  $\frac{1}{p} = 1 + r$  với  $r > 0$  nào đó. Ta có

$$np^n = \frac{n}{(\frac{1}{p})^n} = \frac{n}{(1+r)^n}$$

Mà  $(1+r)^n \geq C_n^2 r^2 = \frac{n(n-1)}{2} r^2$  (do khai triển nhị thức Newton). Nên

$$np^n \leq \frac{2}{(n-1)r^2} \rightarrow 0 \quad \text{khi } n \rightarrow \infty$$

Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} np^n = 0$ .

Từ đó, kết hợp với (7.7) ta suy ra

$$\sum_{k=0}^{\infty} kp^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n kp^k = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{0.98}{0.02^2} = 2450$$

Thay vào (7.4) ta được

$$EX = 0.02(2450) = 49$$

(b) Gọi  $Y$  là số thứ phẩm trong 10 sản phẩm được chọn. Ta có  $Y \sim B(10, 0.02)$ . Ta cần tìm

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) \\ &= C_{10}^0 (0.02)^0 (0.98)^{10} + C_{10}^1 (0.02)^1 (0.98)^9 + C_{10}^2 (0.02)^2 (0.98)^8 \\ &= 0.9991 \end{aligned}$$

(c) Ta xấp xỉ  $Y$  bởi phân phối Poisson sau:  $Y \sim P(10(0.02)) = P(0.2)$ . Do đó,

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) \\ &= e^{-0.2} \left( \frac{0.2^0}{0!} + \frac{0.2^1}{1!} + \frac{0.2^2}{2!} \right) \\ &= 0.9989 \end{aligned}$$

(d) Gọi

$n$  là số sản phẩm ít nhất phải được lấy ra thỏa yêu cầu.

$Z$  là số thứ phẩm trong  $n$  sản phẩm.

Ta có  $Z \sim B(n, 0.02)$  và

$$\begin{aligned} P(Z \geq 1) &\geq \frac{1}{2} \\ \iff 1 - P(Z = 0) &\geq \frac{1}{2} \\ \iff P(Z = 0) &\leq \frac{1}{2} \\ \iff C_n^0 (0.02)^0 (0.98)^n &\leq \frac{1}{2} \\ \iff 0.98^n &\leq \frac{1}{2} \\ \iff n &\geq \frac{\ln(1/2)}{\ln(0.98)} = 34.3096 \end{aligned}$$

Vậy  $n = 35$ .

■

**Giải bài 4.31.** Vì  $X \sim N(\mu, 0.01\mu^2)$  nên  $Y = \frac{X - \mu}{0.1\mu} \sim N(0, 1)$ .

(a) Ta cần tính

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 1.15\mu) &= P\left(\frac{X - \mu}{0.1\mu} \geq \frac{1.15\mu - \mu}{0.1\mu}\right) \\
 &= P(Y \geq 1.5) \\
 &= 1 - \Phi(1.5) \\
 &= 1 - 0.9332 = 0.0668
 \end{aligned}$$

(b) Gọi chiều dài xe cần tìm là  $x_{0.1}$ . Ta cần phải có  $P(X \geq x_{0.1}) = 0.9$  hay  $P(X \leq x_{0.1}) = 0.1$ , tức là  $P\left(\frac{X - 4}{0.4} \leq \frac{x_{0.1} - 4}{0.4}\right) = \Phi\left(\frac{x_{0.1} - 4}{0.4}\right) = 0.1$ .

Suy ra

$$x_{0.1} = 4 + 0.4z_{0.1} = 4 - 0.4z_{0.9} = 4 - 0.4(1.282) \approx 3.49$$

■

**Giải bài 4.33.** Gọi  $X$  là trọng lượng trái cây thì  $X \sim N(500, 4^2)$ . Với  $Y = \frac{X - 500}{4}$  thì  $Y \sim N(0, 1)$ . Do đó,

(a) Tỷ lệ trái cây loại 1 là

$$\begin{aligned}
 P(X > 505) &= P\left(\frac{X - 500}{4} > \frac{505 - 500}{4}\right) \\
 &= P(Y > 1.25) \\
 &= 1 - \Phi(1.25) \\
 &= 0.106
 \end{aligned}$$

(b) Tỷ lệ trái cây loại 2 là

$$\begin{aligned}
 P(495 \leq X \leq 505) &= P\left(\frac{495 - 500}{4} \leq \frac{X - 500}{4} \leq \frac{505 - 500}{4}\right) \\
 &= P(-1.25 \leq Y \leq 1.25) \\
 &= 0.788
 \end{aligned}$$

(c) Tỷ lệ của loại 3 là

$$\begin{aligned}
 P(X < 495) &= P\left(\frac{X - 500}{4} < \frac{495 - 500}{4}\right) \\
 &= P(Y < -1.25) \\
 &= 0.106
 \end{aligned}$$

Vậy, trái cây thu hoạch được có khoảng 11% loại 1, 78% loại 2 và 11% loại 3.



**Giải bài 4.35.** Gọi  $X$  là chiều cao của người trưởng thành. Ta có,  $X \sim N(175, 4^2)$ .  
Đặt  $Y = \frac{X - 175}{4}$  thì  $Y \sim N(0, 1)$

(a) tỷ lệ người trưởng thành có tầm vóc trên 180 cm là

$$\begin{aligned} P(X > 180) &= 1 - P(X \leq 180) \\ &= 1 - P\left(\frac{X - 175}{4} \leq \frac{180 - 175}{4}\right) \\ &= 1 - P(Y \leq 1.25) \\ &= 1 - \Phi(1.25) \\ &= 1 - 0.894 = 0.106 \end{aligned}$$

(b) tỷ lệ người trưởng thành có chiều cao từ 166 cm đến 177 cm là

$$\begin{aligned} P(166 \leq X \leq 177) &= P\left(\frac{166 - 175}{4} \leq \frac{X - 175}{4} \leq \frac{177 - 175}{4}\right) \\ &= P(-2.25 \leq Y \leq 0.5) \\ &= \Phi(0.5) - \Phi(-2.25) \\ &= \Phi(0.5) + \Phi(2.25) - 1 \\ &= 0.692 + 0.988 - 1 = 0.68 \end{aligned}$$

(c) Ta có,

$$\begin{aligned} P(X < h_0) &= P\left(\frac{X - 175}{4} \leq \frac{h_0 - 175}{4}\right) \\ &= P\left(Y \leq \frac{h_0 - 175}{4}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{h_0 - 175}{4}\right) \\ &= 0.33 \end{aligned}$$

Ta thấy  $0.33 < 0.5$  nên  $\frac{h_0 - 175}{4} < 0$ . Do đó,  $\Phi\left(\frac{175 - h_0}{4}\right) = 1 - 0.33 = 0.67$ .

Suy ra,  $\frac{175 - h_0}{4} = 0.44$ , tức là  $h_0 = 173.24$

(d) Ta tìm  $a$  từ điều kiện sau:

$$P(175 - a \leq X \leq 175 + a) = 0.9$$

Ta có,

$$\begin{aligned} P(175 - a \leq X \leq 175 + a) &= P\left(\frac{175 - a - 175}{4} \leq \frac{X - 175}{4} \leq \frac{175 + a - 175}{4}\right) \\ &= P\left(\frac{-a}{4} \leq Y \leq \frac{a}{4}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{a}{4}\right) - 1 \end{aligned}$$

Ta suy ra  $\Phi\left(\frac{a}{4}\right) = 0.95$ , tức là  $a = 6.6$

■

**Giải bài 4.37.** Ta có

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(2)}\right\} \implies \ln[f_X(X)] = \ln\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right) - \frac{X^2}{4}$$

Hơn nữa  $E(X^2) = \text{Var}(X) + (EX)^2 = 2 + 0^2 = 2$ . Do đó

$$\begin{aligned} H &= E\left[-\ln\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right) + \frac{X^2}{4}\right] \\ &= \ln(2\sqrt{\pi}) + \frac{1}{4}E(X^2) \\ &= \ln(2\sqrt{\pi}) + \frac{2}{4} \approx 1.766 \end{aligned}$$

■



# Lí thuyết mẫu

## Giải bài 5.1.

(a) Ta có bảng tần số sau:

$x_i$	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
$n_i$	1	2	2	4	8	4	8	5	2	1

Từ đó ta tính được,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i \\ &= 65.811 \\ s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 \\ &= 4.436 \\ s &= 2.106\end{aligned}$$

(b) Ta có bảng tần suất sau:

$x_i$	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
$f_i$	0.027	0.055	0.135	0.216	0.108	0.216	0.108	0.054	0.054	0.027

Từ bảng trên, ta thấy rằng

$$\begin{aligned}P(X \geq 66) &= 0.541 \geq \frac{1}{2} \\ P(X \leq 66) &= 0.568 \geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Do đó, trung vị của chiều cao sinh viên lớp này là 66.

■

**Giải bài 5.3.** Ta có bảng tần số sau:

$x_i$	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
$n_i$	1	2	2	3	1	2	4	4	3	2

Trung bình mẫu:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = 48.125$$

Phương sai mẫu:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = 7.245$$

Độ lệch tiêu chuẩn:

$$s = \sqrt{s^2} = 2.692$$

■

**Giải bài 5.5.** Ta có,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i &= \sum_{i=1}^n (a + bx_i) \\ &= na + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i &= a + b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \bar{y} &= a + b\bar{x} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a + bx_i - (a + b\bar{x}))^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n b^2 (x_i - \bar{x})^2 \\ &= b^2 s_x^2 \\ s_y &= |b| s_x \end{aligned}$$

■

**Giải bài 5.7.** Ta có giá trị trung tâm của từng khoảng là

$$5.5, 15.5, 25.5, 35.5, 45.5, 55.5, 65.5, 75.5, 85.5, 95.5$$

Ta sử dụng phép biến đổi sau:

$$y_i = \frac{x_i - 55.5}{10}$$

Khi đó, giá trị của  $y_i$  sẽ là  $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ . Từ đó ta tính được,

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i y_i \\ &= -0.653 \\ s_y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (y_i - \bar{y})^2 \\ &= 8.349\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 10\bar{y} + 55.5 \\ &= 48.97 \\ s_x^2 &= 10^2 s_y^2 \\ &= 834.9\end{aligned}$$

■

**Giải bài 5.9.**

$$n = 8, \bar{x} = 3.0775, s^2 = 0.096$$

■

**Giải bài 5.11.**

$$n = 97, \bar{x} = 19.133, s^2 = 0.054$$

■

# Ước lượng tham số thống kê

**Giải bài 6.1.** Ta có  $n = 100 > 30$ ,  $\sigma^2$  chưa biết. Khoảng ước lượng 95% cho giá trị trung bình thật có dạng

$$\left( \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

Trong đó,  $\alpha = 0.05$ ,  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$ ,  $\bar{x} = 0.1$ ,  $s = 0.014$ . Do đó, khoảng ước lượng 95% cho giá trị trung bình thật là  $(0.0973, 0.1027)$  ■

**Giải bài 6.3.** Ta có  $n = 8 < 30$ ,  $X$  có phân phối chuẩn,  $\sigma = 300$  đã biết. Do đó khoảng tin cậy cho 90% cho sức bền của loại ống trên có dạng,

$$\left( \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Ta có  $\alpha = 0.1$ ,  $z_{0.95} = 1.65$ ,  $\bar{x} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i = 5325$ . Thay vào biểu thức trên ta có khoảng tin cậy cần tìm là  $(5149.991, 5500.009)$ . ■

**Giải bài 6.5.**

(a) Ta viết lại bảng tần số sau:

$x$ (cm)	142.5	147.5	152.5	157.5	162.5	167.5
Số người	1	3	7	9	5	2

Do đó, ta nhận được  $n = 27$ ,  $\bar{x} = 156.2$ ,  $s^2 = 37.68$ .

(b) Ta có,  $n = 27 < 30$ ,  $\sigma^2$  chưa biết. Do đó, khoảng tin cậy của  $\mu$  với độ tin cậy 0.95 là

$$\left( \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

Với độ tin cậy 0.95, ta có  $\alpha = 0.05$  và  $t_{0.975}^{26} = 2.056$ . Thay vào biểu thức trên ta tìm được khoảng tin cậy cho  $\mu$  với độ tin cậy 0.95 là  $(153.77, 158.63)$

■

**Giải bài 6.7.**

- (a) Ta có  $n = 100 > 30$ ,  $\sigma = 100$ . Do đó, khoảng tin cậy cho tuổi thọ trung bình của bóng đèn có dạng

$$\left( \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Trong đó,  $\bar{x} = 1000$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$ .

Vậy khoảng tin cậy 95% cho tuổi thọ trung bình của bóng đèn là  $(980.4, 1019.6)$ .

- (b) Ta có dung sai của ước lượng là  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{100}{10} = 15$ . Từ đó suy ra

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.5$$

Tra bảng ta tìm được  $\alpha = 0.13362$  và do đó độ tin cậy là  $1 - \alpha = 0.8664 = 86.64\%$

- (c) Ta biết rằng khi  $n$  càng lớn thì dung sai càng nhỏ. Hơn nữa, ta thấy rằng khi  $n = 29 < 30$  thì  $t_{0.975}^{28} \frac{100}{\sqrt{29}} = 38.0304 > 25$ . Do đó giá trị  $n$  phải lớn hơn hoặc bằng 30. Từ điều kiện

$$1.96 \cdot \frac{100}{\sqrt{n}} \leq 25$$

Suy ra  $n \geq 61.4656$ .

Vậy ta cần thử nghiệm ít nhất 62 bóng

■

**Giải bài 6.9.**

- (a)  $n = 53$ , trung bình mẫu  $\bar{x} = 12.21$ , độ lệch chuẩn  $s = 0.103$ .

- (b) Ta có, kích thước mẫu  $n = 53 \geq 30$ ,  $\sigma^2$  chưa biết. Do đó, với độ tin cậy 0.95, khoảng tin cậy của  $\mu$  là

$$\left( \bar{x} - z_{0.975} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.975} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

Thay  $\bar{x}$ ,  $s$  và  $z_{0.975} = 1.96$  vào biểu thức trên, ta tìm được khoảng tin cậy của  $\mu$  là

$$(12.18, 12.24)$$

- (c) Ta biết rằng khi  $n$  càng lớn thì dung sai càng nhỏ. Hơn nữa, với  $n = 53$  trong câu b) ta thấy  $\varepsilon = 0.028 > 0.02$ . Do đó, giá trị  $n$  phải lớn hơn 53. Từ điều kiện

$$z_{0.975} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq 0.02$$

Suy ra  $n \geq 101.89$ .

Vậy ta phải quan sát ít nhất 102 trường hợp.

■

**Giải bài 6.11.**

- (a) Từ bảng số liệu của mẫu, ta có  $n = 128$ ,  $\bar{x} = 1391.41$  và  $s = 234.45$ .  
 (b) Ta có  $n = 128 \geq 30$ ,  $\sigma^2$  chưa biết. Với độ tin cậy 0.95, khoảng tin cậy cho  $\mu$  là

$$\left( \bar{x} - z_{0.975} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.975} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

Thay  $\bar{x}$ ,  $s$  và  $z_{0.975} = 1.96$ , ta được

$$(1350.79, 1432.03)$$

- (c) Ta biết rằng khi  $n$  càng lớn thì dung sai càng nhỏ. Hơn nữa, với  $n = 128$  trong câu b) ta thấy  $\varepsilon = 40.6 > 30$ . Do đó, giá trị  $n$  phải lớn hơn 128. Từ điều kiện

$$z_{0.975} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq 30$$

Suy ra  $n \geq 234.63$ .

Vậy ta phải quan sát ít nhất 235 bóng đèn.

■

**Giải bài 6.13.** Ta có  $n = 2000$ ,  $f = \frac{1380}{2000} = 0.69$ ,  $nf = 1380 > 5$ ,  $n(1 - f) = 620 > 5$ . Do đó, khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ phiếu bầu có dạng

$$\left( f - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, f + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right)$$

tức là tỉ lệ phiếu bầu tối thiểu là

$$f - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

Thay  $f = 0.69$ ,  $n = 2000$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $z_{0.975} = 1.96$  vào biểu thức trên ta được 0.6697, tức là 66.97%.

■

**Giải bài 6.15.** Để sai số không vượt quá 2% thì

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \leq 0.02$$

Trong đó,  $f = 0.9$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.95} = 1.65$ . Do đó,

$$n \geq 612.5625$$

Vậy ta cần phải khám ít nhất 613 người.

■

**Giải bài 6.17.**

(a) Khoảng tin cậy cho tỉ lệ  $p$  với độ tin cậy  $1 - \alpha$  là

$$\left( f - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, f + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right)$$

Theo giả thiết ta có tần suất khỏi bệnh là  $f = \frac{40}{50} = 0.8$ .

Với độ tin cậy 0.95 ta có  $\alpha = 0.05$  và  $z_{0.975} = 1.96$ . Do đó, khoảng tin cậy cho tỉ lệ  $p$  với độ tin cậy 0.95 là (0.69, 0.91).

Với độ tin cậy 0.99 ta có  $\alpha = 0.01$  và  $z_{0.995} = 2.58$ . Do đó, khoảng tin cậy cho tỉ lệ  $p$  với độ tin cậy 0.99 là (0.65, 0.946).

(b) Ta có sai số của ước lượng là

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

Với độ tin cậy 0.95 ta có  $\alpha = 0.05$  và  $z_{0.975} = 1.96$ . Do đó để sai số không vượt quá 0.02 ta cần điều kiện

$$1.96 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}} \leq 0.02$$

Suy ra  $n \geq 1536.64$ .

Vậy ta cần quan sát ít nhất 1537 trường hợp.

■

**Giải bài 6.19.** Ta có  $f = \frac{20}{500} = 0.04$ ,  $nf = 20 > 5$ ,  $n(1-f) = 480 > 5$ . Do đó, khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ cá được đánh dấu trong hồ có dạng

$$\left( f - z_{1+\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, f + z_{1+\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right)$$

Trong đó,  $\alpha = 0.05$ ,  $z_{1+\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$ .

Do đó, khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ cá được đánh dấu trong hồ là (0.0228, 0.0572).

Từ đó, khoảng tin cậy 95% cho số cá có trong hồ là (34965.03, 877719.3)

■

**Giải bài 6.21.**

(a) Ta có  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = 35.89$ ,  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = 3.21$ ,  $s = 1.792$ .

Ta có  $n = 100 > 30$ ,  $\sigma^2$  chưa biết. Do đó, khoảng tin cậy 95% cho khối lượng trung bình các quả cam có dạng

$$\left( \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

Trong đó,  $\alpha = 0.1$ ,  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.95} = 1.96$ . Từ đó, khoảng tin cậy 95% cho khối lượng trung bình các quả cam là (35.539, 36.241)

- (b) Ta có  $f = \frac{5}{100} = 0.05$ ,  $nf = 5 \geq 5$ ,  $n(1 - f) = 95 \geq 5$ . Do đó, khoảng ước lượng cho tỷ lệ loại 2 với độ tin cậy 90% có dạng

$$\left( f - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, f + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right)$$

Trong đó,  $\alpha = 0.1$ ,  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.95} = 1.65$ . Vậy khoảng ước lượng cho tỷ lệ loại 2 với độ tin cậy 90% là  $(0.014, 0.086)$

■



# Kiểm định giả thuyết thống kê

**Giải bài 7.1.** Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 380 \\ H_1 : \mu \neq 380 \end{cases}$$

Đây là trường hợp  $n = 36 \geq 30$  và  $\sigma^2$  chưa biết, nên ta dùng

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} \\ &= \frac{\sqrt{36}(350 - 380)}{40} \\ &= -4.5 \end{aligned}$$

Ta thấy  $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$ . Do đó ta bác bỏ giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là lời báo cáo của giám đốc không đáng tin cậy. ■

**Giải bài 7.3.** Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 25 \\ H_1 : \mu < 25 \end{cases}$$

Đây là trường hợp  $n = 15 < 30$  và  $\sigma^2$  chưa biết,  $X$  có phân phối chuẩn, nên ta dùng

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} \\ &= \frac{\sqrt{15}(24 - 25)}{2} \\ &= -1.9365 \end{aligned}$$

Ta thấy  $t < t_{\alpha}^{n-1} = t_{0.05}^{14} = -t_{0.95}^{14} = -1.761$ . Do đó ta bác bỏ giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là sức mua của khách hàng hiện nay thực sự giảm sút. ■

**Giải bài 7.5.** Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 14 \\ H_1 : \mu < 14 \end{cases}$$

Đây là trường hợp  $n = 25 < 30$  và  $\sigma^2$  chưa biết,  $X$  có phân phối chuẩn, nên ta dùng

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} \\ &= \frac{\sqrt{25}(12.5 - 14)}{2.5} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Ta thấy  $t < t_{\alpha}^{n-1} = t_{0.05}^{24} = -t_{0.95}^{24} = -1.711$ . Do đó ta bác bỏ giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là điều kiện chăn nuôi kém đi làm cho lượng sữa giảm xuống. ■

**Giải bài 7.7.** Ta tính được

$$\begin{aligned} k &= 6 \\ n &= 100 \\ \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = 0.9856 \\ s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = 0.000433 \\ s &= 0.0208 \end{aligned}$$

Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu \neq 1 \end{cases}$$

Đây là trường hợp  $n = 100 > 30$  và  $\sigma^2$  chưa biết, nên ta dùng

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} \\ &= \frac{\sqrt{100}(0.9856 - 1)}{0.0208} \\ &= -6.9204 \end{aligned}$$

Ta thấy  $|z| \leq z_{0.975} = 1.96$ . Do đó ta bác bỏ giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là máy hoạt động không bình thường. ■

**Giải bài 7.9.**

(a) Ta đưa về bảng giá trị sau

x	155	165	175	185	195	205
Số người	3	9	11	3	2	1

Ta tính được

$$k = 6$$

$$n = 29$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = 173.2759$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = 143.3498$$

$$s = 11.9729$$

(b) Ta có  $n = 29 < 30$ ,  $\sigma^2$  chưa biết. Do đó, khoảng tin cậy cho trung bình cholesterol trong dân số có dạng

$$\left( \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

Trong đó,  $\alpha = 0.05$ ,  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} = t_{0.975}^{28} = 2.048$ .

Thay vào ta tìm được khoảng tin cậy 95% cho trung bình cholesterol trong dân số là  $(168.7226, 177.8292)$ .

(c) Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 175 \\ H_1 : \mu \neq 175 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} \\ &= \frac{\sqrt{29}(173.2759 - 175)}{11.9729} \\ &= -0.7755 \end{aligned}$$

Ta thấy  $|t| \leq t_{0.975}^{28} = 2.048$ . Do đó ta chấp nhận giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là giá trị mẫu phù hợp với tài liệu.



**Giải bài 7.11.**

(a) Ta tính được

$$\begin{aligned} k &= 7 \\ n &= 36 \\ \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = 2.6389 \\ s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = 3.3802 \\ s &= 1.8385 \end{aligned}$$

Ta có  $n = 36 \geq 30$ ,  $\sigma^2$  chưa biết. Do đó, khoảng tin cậy cho số khuyết tật trung bình ở mỗi sản phẩm sau khi cải tiến có dạng

$$\left( \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

Trong đó,  $\alpha = 0.1$ ,  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.95} = 1.65$ .

Thay vào ta tìm được khoảng tin cậy 90% cho số khuyết tật trung bình ở mỗi sản phẩm sau khi cải tiến là (2.1333, 3.1445).

(b) Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 3 \\ H_1 : \mu < 3 \end{cases}$$

Đây là trường hợp  $n = 36 \geq 30$  và  $\sigma^2$  chưa biết, nên ta dùng

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} \\ &= \frac{\sqrt{36}(2.6389 - 3)}{1.8385} \\ &= -1.1785 \end{aligned}$$

Ta thấy  $z \geq z_{0.05} = -z_{0.95} = -1.65$ . Do đó ta chấp nhận giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là cải tiến không hiệu quả.



**Giải bài 7.13.** Đặt  $Z = Y - X$  để chỉ trọng lượng thay đổi sau khi ăn kiêng. Ta có bảng  $z_i = y_i - x_i$  như sau

---

$z_i$	-5	-1	-5	0	-6	-4	-7	-6	5	-10
$z_i$	-1	-1	-6	-4	5	0	-4	-2	1	-9

Ta tính được

$$\begin{aligned}
 n &= 20 \\
 \bar{z} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = -3 \\
 s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 = 16.5263 \\
 s &= 4.0653
 \end{aligned}$$

Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu \neq 0 \end{cases}$$

Đây là trường hợp  $n = 20 < 30$  và  $\sigma^2$  chưa biết, nên ta dùng

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\sqrt{n}(\bar{z} - \mu)}{s} \\
 &= \frac{\sqrt{20}(-3 - 0)}{4.0653} \\
 &= -3.3002
 \end{aligned}$$

Ta thấy  $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} = t_{0.975}^{19} = 2.093$ . Do đó ta bác bỏ giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là chế độ ăn kiêng có tác dụng làm thay đổi trọng lượng. ■

**Giải bài 7.15.** Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

Ta tính được

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \\
 &= \frac{18 - 24}{\sqrt{\frac{3^2}{20} + \frac{3^2}{20}}} \\
 &= -6.3246
 \end{aligned}$$

Ta thấy  $|z| > z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.65$ . Do đó, ta bác bỏ giả thuyết  $H_0$  nghĩa là hai loại chất nổ lỏng này có tốc độ đốt cháy khác nhau. ■

**Giải bài 7.17.** Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X > \mu_Y \end{cases}$$

Ta tính được

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{(50 - 1)7^2 + (40 - 1)9.2^2}{50 + 40 - 2} \\ &= 64.795 \\ s &= 8.0495 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} t &= \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \\ &= \frac{60 - 52}{8.0495\sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{40}}} \\ &= 4.6851 \end{aligned}$$

Ta thấy  $t > t_{1-\alpha}^{n_1+n_2-2} = t_{0.95}^{88} \approx z_{0.95} = 1.65$ . Do đó, ta bác bỏ giả thuyết  $H_0$  nghĩa là hàm lượng đường trong máu sau 5 giờ làm việc đã giảm đi. ■

**Giải bài 7.19.** Gọi  $X, Y$  lần lượt là trọng lượng trẻ sơ sinh ở nông thôn và thành thị. Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$$

Ta tính được

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{(8000 - 1)0.3^2 + (2000 - 1)0.2^2}{8000 + 2000 - 2} \\ &= 0.08 \\ s &= 0.2828 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \\
 &= \frac{3 - 3.2}{0.2828 \sqrt{\frac{1}{8000} + \frac{1}{2000}}} \\
 &= -28.2885
 \end{aligned}$$

Ta thấy  $t < t_{1-\alpha}^{n_1+n_2-2} = t_{0.95}^{9998} \approx z_{0.95} = 1.65$ . Do đó, ta bác bỏ giả thuyết  $H_0$  nghĩa là trọng lượng trung bình của trẻ sơ sinh ở thành thị cao hơn ở nông thôn. ■

**Giải bài 7.21.** Ta tính được

$$\begin{aligned}
 n_1 &= 10 \\
 n_2 &= 10 \\
 \bar{x} &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i = 16.015 \\
 \bar{y} &= \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i = 16.005 \\
 s_x^2 &= \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2 = 0.000917 \\
 s_x &= 0.0303 \\
 s_y^2 &= \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{y})^2 = 0.00065 \\
 s_y &= 0.0255
 \end{aligned}$$

Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

Ta tính được

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2} \\
 &= \frac{(10 - 1)0.000917 + (10 - 1)0.00065}{10 + 10 - 2} \\
 &= 0.000783 \\
 s &= 0.028
 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \\
 &= \frac{16.015 - 16.005}{0.028 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} \\
 &= 0.7986
 \end{aligned}$$

Ta thấy  $|t| < t_{1-\alpha}^{n_1+n_2-2} = t_{0.95}^{18} = 1.734$ . Do đó, ta chấp nhận giả thuyết  $H_0$  nghĩa là hai máy rót nước vào bình như nhau. ■

### Giải bài 7.23.

(a) Ta đưa về bảng giá trị sau

Trọng lượng	3100	3300	3500	3700	3900
Số bé trai	1	3	8	10	3
Số bé gái	2	10	10	5	1

Ta tính được

$$\begin{aligned}
 k &= 5 \\
 N_1 &= 25 \\
 N_2 &= 28 \\
 \bar{x} &= \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^k n_i x_i = 3588 \\
 \bar{y} &= \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^k n_i y_i = 3450 \\
 s_x^2 &= \frac{1}{N_1 - 1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = 40266.67 \\
 s_x &= 200.6656 \\
 s_y^2 &= \frac{1}{N_2 - 1} \sum_{i=1}^k n_i (y_i - \bar{y})^2 = 37407.41 \\
 s_y &= 193.4099
 \end{aligned}$$

(b) Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases}$$



Ta tính được

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{(N_1 - 1)s_x^2 + (N_2 - 1)s_y^2}{N_1 + N_2 - 2} \\
 &= \frac{(25 - 1)40266.67 + (28 - 1)37407.41}{25 + 28 - 2} \\
 &= 38752.94 \\
 s &= 196.8577
 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s\sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}} \\
 &= \frac{3588 - 3450}{196.8577\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{28}}} \\
 &= 2.5476
 \end{aligned}$$

Ta thấy  $|t| > t_{1-\alpha}^{n_1+n_2-2} = t_{0.95}^{51} \approx z_{0.95} = 1.65$ . Do đó, ta bác bỏ giả thuyết  $H_0$  nghĩa là trọng lượng bé trai và bé gái lúc sơ sinh khác nhau.

(c) Nhập hai mẫu lại, ta được

Trọng lượng	3100	3300	3500	3700	3900
Số trẻ sơ sinh	3	13	18	15	4

Ta tính được

$$\begin{aligned}
 k &= 5 \\
 N &= 53 \\
 \bar{z} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i z_i = 3515.094 \\
 s_z^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k n_i (z_i - \bar{z})^2 = 42844.7 \\
 s_z &= 206.9896
 \end{aligned}$$

Ta có  $N = 53 \geq 30$ ,  $\sigma^2$  chưa biết. Do đó, khoảng tin cậy cho sức nặng trung bình của trẻ sơ sinh có dạng

$$\left( \bar{z} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_z}{\sqrt{N}}, \bar{z} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_z}{\sqrt{N}} \right)$$

Trong đó,  $\alpha = 0.05$ ,  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$ .

Thay vào ta tìm được khoảng tin cậy 95% cho sức nặng trung bình của trẻ sơ sinh là  $(3459.367, 3570.821)$ .

■

**Giải bài 7.25.** Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.98 \\ H_1 : p < 0.98 \end{cases}$$

Ta có  $n = 500$ ,  $f = \frac{500 - 28}{500} = 0.944$ ,  $nf = 472 \geq 5$  và  $n(1 - f) = 28 \geq 5$ .

Do đó, ta dùng

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{n}(f - p)}{\sqrt{pq}} \\ &= \frac{\sqrt{500}(0.944 - 0.98)}{\sqrt{0.98 \times 0.02}} \\ &= -5.7499 \end{aligned}$$

Ta thấy  $z < z_\alpha = z_{0.05} = -z_{0.95} = -1.65$ . Do đó ta bác bỏ giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là chất lượng làm việc của máy không còn tốt như trước. ■

**Giải bài 7.27.** Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.8 \\ H_1 : p \neq 0.8 \end{cases}$$

Ta có  $n = 36$ ,  $f = \frac{25}{36} = 0.6944$ ,  $nf = 25 \geq 5$  và  $n(1 - f) = 11 \geq 5$ .

Do đó, ta dùng

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{n}(f - p)}{\sqrt{pq}} \\ &= \frac{\sqrt{36}(0.6944 - 0.8)}{\sqrt{0.8 \times 0.2}} \\ &= -1.584 \end{aligned}$$

Ta thấy  $|z| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$ . Do đó ta chấp nhận giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là nguồn tin này đáng tin cậy. ■

**Giải bài 7.29.**

(a) Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.05 \\ H_1 : p \neq 0.05 \end{cases}$$

Ta có  $n = 800$ ,  $f = \frac{24}{800} = 0.03$ ,  $nf = 24 \geq 5$  và  $n(1 - f) = 776 \geq 5$ .

Do đó, ta dùng

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{n}(f - p)}{\sqrt{pq}} \\ &= \frac{\sqrt{800}(0.03 - 0.05)}{\sqrt{0.05 \times 0.95}} \\ &= -2.5955 \end{aligned}$$

Ta thấy  $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.58$ . Do đó ta bác bỏ giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là biện pháp kỹ thuật mới làm thay đổi tỷ lệ phế phẩm.

(b) Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.02 \\ H_1 : p \neq 0.02 \end{cases}$$

Ta có  $n = 800$ ,  $f = \frac{24}{800} = 0.03$ ,  $nf = 24 \geq 5$  và  $n(1 - f) = 776 \geq 5$ .

Do đó, ta dùng

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{n}(f - p)}{\sqrt{pq}} \\ &= \frac{\sqrt{800}(0.03 - 0.02)}{\sqrt{0.02 \times 0.98}} \\ &= 2.0203 \end{aligned}$$

Ta thấy  $|z| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.58$ . Do đó ta chấp nhận giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là nhà máy báo cáo tỷ lệ phế phẩm là chấp nhận được.

■

**Giải bài 7.31.** Gọi

$p_1$  : tỷ lệ nữ ở xã A

$p_2$  : tỷ lệ nữ ở xã B

Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 n_1 &= 250 \geq 30 \\
 n_2 &= 160 \geq 30 \\
 f_1 &= \frac{140}{250} = 0.56 \\
 f_2 &= \frac{80}{160} = 0.5 \\
 \hat{p} &= \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2} \\
 &= \frac{250 \times 0.56 + 160 \times 0.5}{250 + 160} = 0.5366
 \end{aligned}$$

Ta tính được

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \\
 &= \frac{0.56 - 0.5}{\sqrt{0.5366(1 - 0.5366)\left(\frac{1}{250} + \frac{1}{160}\right)}} \\
 &= 1.1885
 \end{aligned}$$

Ta thấy  $|z| < z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$ . Do đó ta chấp nhận giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là tỉ lệ nữ ở hai xã bằng nhau. ■

**Giải bài 7.33.** Gọi

$p_1$  : tỉ lệ trẻ sơ sinh có trọng lượng trên 3000 gam ở thành phố

$p_2$  : tỉ lệ trẻ sơ sinh có trọng lượng trên 3000 gam ở nông thôn

Ta cần kiểm định các giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 n_1 &= 150 \geq 30 \\
 n_2 &= 200 \geq 30 \\
 f_1 &= \frac{100}{150} = 0.6667 \\
 f_2 &= \frac{98}{200} = 0.49 \\
 \hat{p} &= \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2} \\
 &= \frac{150 \times 0.6667 + 200 \times 0.49}{150 + 200} = 0.5657
 \end{aligned}$$

Ta tính được

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \\
 &= \frac{0.6667 - 0.49}{\sqrt{0.5657(1 - 0.5657)\left(\frac{1}{150} + \frac{1}{200}\right)}} \\
 &= 3.3005
 \end{aligned}$$

Ta thấy  $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$ . Do đó ta bác bỏ giả thuyết  $H_0$ . Nghĩa là tỉ lệ trẻ sơ sinh có trọng lượng trên 3000 gam ở thành phố và nông thôn khác nhau ở mức ý nghĩa 5%. ■