Trường.................................

Khoa..............................

Lý thuyết luyện thi đại học môn toán

KHẢO SÁT HÀM SỐ

Vấn đề 1: ÔN TẬP – CÔNG THỨC

I. Tam thức bậc hai:

- $\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$

❖ Cho phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$

Giả sử phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thì:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

- Pt có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$
- Pt có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$
- Pt vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \ne 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- Pt có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$
- Pt có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \end{cases}$
- Pt có 2 nghiệm phân biệt cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- Pt có 2 nghiệm phân biệt cùng âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

II. Đa thức bậc ba:

❖ Cho phương trình : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Giả sử phương trình có 3 nghiệm $x_1; x_2; x_3$ thì:

$$S = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a};\ x_1.x_2 + x_2.x_3 + x_3.x_1 = \frac{c}{a};$$

$$P = x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$$

III. Đạo hàm:

BẢNG ĐẠO HÀM	
$(kx)' = k$	$(ku)' = k.u'$
$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha.u'.u^{\alpha-1}$.
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'.e^u$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a}$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$
Quy tắc tính đạo hàm	
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(uv)' = u'v + v'u$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}\ (v \ne 0)$	$y'_x = y'_u.u'_x$
Đạo hàm của một số hàm thông dụng	
1. $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	
2. $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e} \Rightarrow y' = \frac{adx^2+2aex+be-cd}{(dx+e)^2}$	

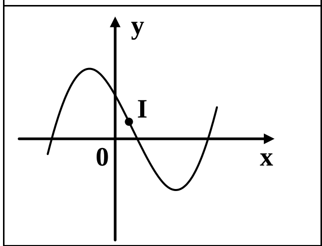
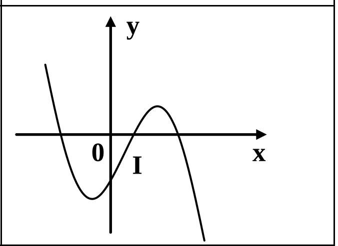
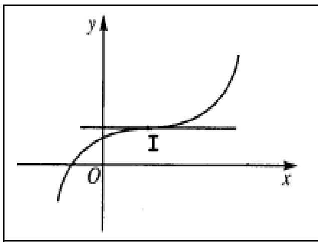
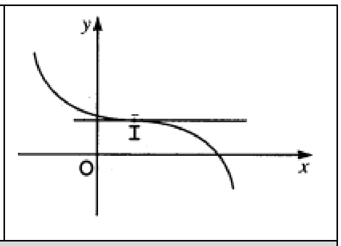
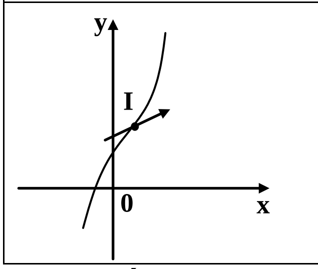
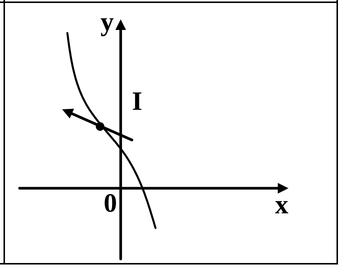
Vấn đề 2: CÁC BƯỚC KHẢO SÁT HÀM SỐ.

1. Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Xét sự biến thiên của hàm số:
  - Tính y′.
  - Tìm các điểm tại đó đạo hàm y′ bằng 0 hoặc không xác định.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
  - Lập bảng biến thiên ghi rõ dấu của đạo hàm, chiều biến thiên, cực trị của hàm số.
- Vẽ đồ thị của hàm số:
  - Tìm điểm uốn của đồ thị (đối với hàm số bậc ba và hàm số trùng phương).
    – Tính y′′.
    – Tìm các điểm tại đó y′′ = 0 và xét dấu y′′.
  - Vẽ các đường tiệm cận (nếu có) của đồ thị.
  - Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị như giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đồ thị không cắt các trục toạ độ hoặc việc tìm toạ độ giao điểm phức tạp thì có thể bỏ qua). Có thể tìm thêm một số điểm thuộc đồ thị để có thể vẽ chính xác hơn.
  - Nhận xét về đồ thị: Chỉ ra trục đối xứng, tâm đối xứng (nếu có) của đồ thị.

2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$:

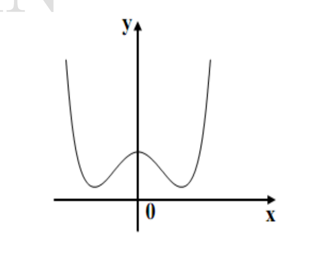
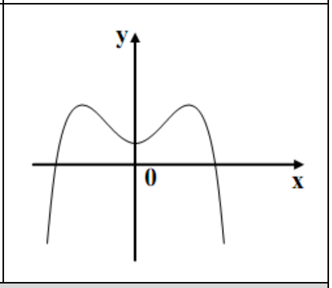
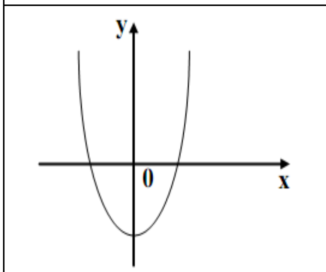
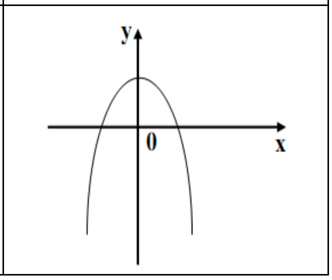
- Tập xác định D = R.
- Đồ thị luôn có một điểm uốn và nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.
- Các dạng đồ thị:

y’ = 0 có 2 nghiệm phân biệt ⇔ D’ = $b^2 - 3ac > 0$	
a > 0	**a < 0**
	
y’ = 0 có nghiệm kép ⇔ D’ = $b^2 - 3ac = 0$	
a > 0	**a < 0**
	
y’ = 0 vô nghiệm ⇔ D’ = $b^2 - 3ac < 0$	
a > 0	**a < 0**
	

3. Hàm số trùng phương

$$y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0):$$

- Tập xác định D = R.
- Đồ thị luôn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Các dạng đồ thị:

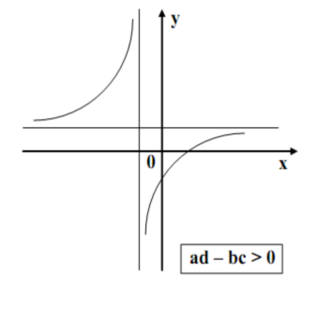
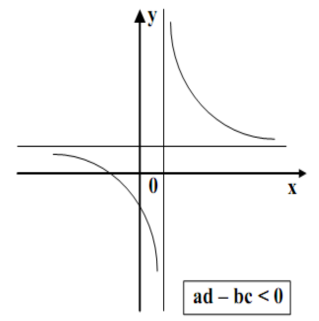
y’ = 0 có 3 nghiệm phân biệt ⇔ ab < 0	
a > 0	**a < 0**
	
y’ = 0 có 1 nghiệm phân biệt ⇔ ab > 0	
a > 0	**a < 0**
	

4. Hàm số nhất biến

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \ (c \neq 0, ad - bc \neq 0):$$

- Tập xác định D = $R \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

• Đồ thị có một tiệm cận đứng là $x = -\frac{d}{c}$ và một tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$. Giao điểm của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.
• Các dạng đồ thị:

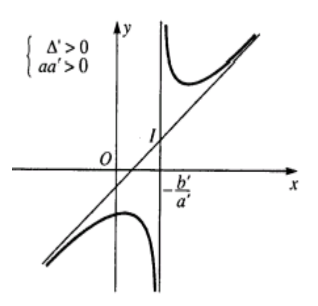
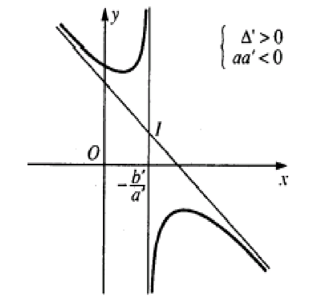
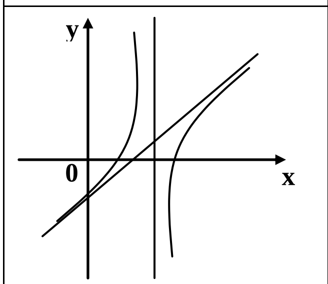
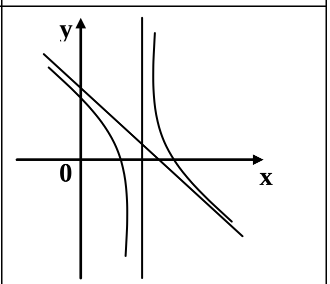
ad – bc > 0	**ad – bc < 0**
	

5. Hàm số hữu tỷ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

($a.a' \neq 0$, tử không chia hết cho mẫu)

• Tập xác định D = $R \setminus \left\{-\frac{b'}{a'}\right\}$.

• Đồ thị có một tiệm cận đứng là $x = -\frac{b'}{a'}$ và một tiệm cận xiên. Giao điểm của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.
• Các dạng đồ thị:

y′ = 0 có 2 nghiệm phân biệt	
a > 0	a < 0
	
y′ = 0 vô nghiệm	
a > 0	a < 0
	

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN KHẢO SÁT HÀM SỐ

Vấn đề 1. SỰ TIẾP XÚC GIỮA HAI ĐƯỜNG, TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG CONG

Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0) \qquad (y_0 = f(x_0))$$

Dạng 1: Lập phương trình tiếp tuyến của đường cong (C): y = f(x)

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): y =f(x) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$

• Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$.
Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = y_0$.
• Tính y′ = f′ (x). Suy ra $y'(x_0) = f'(x_0)$.
• Phương trình tiếp tuyến Δ là:

$$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$$

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): y =f(x), biết Δ có hệ số góc k cho trước.

Cách 1: Tìm toạ độ tiếp điểm.
• Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$.
• Δ có hệ số góc k ⇒ $f'(x_0) = k$ (1)
• Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. Từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.
• Phương trình đường thẳng Δ có dạng:

$$y = kx + m.$$

• Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (*)$$

• Giải hệ (*), tìm được m. Từ đó viết phương trình của Δ.

Chú ý: Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:

- Δ tạo với chiều dương trục hoành góc α thì k = tanα
- Δ song song với đường thẳng d: y = ax + b thì k = a
- Δ vuông góc với đường thẳng d: y = ax + b (a ≠ 0) thì $k = -\frac{1}{a}$
- Δ tạo với đường thẳng d: y = ax + b một góc α thì $\left|\frac{k-a}{1+ka}\right| = \tan\alpha$

Bài toán 3: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): y = f(x), biết Δ **đi qua** điểm $A(x_A; y_A)$.

<u>Cách 1:</u> Tìm toạ độ tiếp điểm.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$
- Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0)$ (1)
- Giải phương trình (1), tìm được x_0. Từ đó viết phương trình của Δ.

<u>Cách 2:</u> Dùng điều kiện tiếp xúc.

- Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc k: $y - y_A = k(x - x_A)$
- Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (*)$$

- Giải hệ (*), tìm được x (suy ra k). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.

Dạng 2: Tìm điều kiện để hai đường tiếp xúc

Điều kiện cần và đủ để hai đường (C_1): y = f(x) và (C_2): y = g(x) tiếp xúc nhau là hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} (*)$$

Nghiệm của hệ (*) là hoành độ của tiếp điểm của hai đường đó.

Dạng 3: Tìm những điểm trên đường thẳng d mà từ đó có thể vẽ được 1, 2, 3, … tiếp tuyến với đồ thị (C): y = f(x)

Giả sử d: ax + by +c = 0. $M(x_M; y_M) \in d$.

- Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k: $y = k(x - x_M) + y_M$
- Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$$

- Thế k từ (2) vào (1) ta được: $f(x) = (x - x_M).f'(x) + y_M$ (3)
- Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = Số nghiệm x của (3)

Dạng 4: Tìm những điểm mà từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến với đồ thị (C): y = f(x) và 2 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau

Gọi $M(x_M; y_M)$.

- Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k: $y = k(x - x_M) + y_M$
- Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$$

- Thế k từ (2) vào (1) ta được: $f(x) = (x - x_M).f'(x) + y_M$ (3)
- Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) ⇔ (3) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.
- Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau ⇔ $f'(x_1).f'(x_2) = -1$

Từ đó tìm được M.

Chú ý: Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì $\begin{cases} (3) \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$

<u>Vấn đề 2</u>. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA CÁC ĐỒ THỊ

1. Cho hai đồ thị (C_1): y = f(x) và (C_2): y = g(x).

Để tìm hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) ta giải phương trình: f(x) = g(x) (*) (gọi là phương trình hoành độ giao điểm).

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của hai đồ thị.

2. Đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$.

Vấn đề 3. BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ

• Cơ sở của phương pháp:

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ (1)

- Số nghiệm của phương trình (1) = Số giao điểm của (C_1): y = f(x) và (C_2): y = g(x)
- Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của (C_1): y = f(x) và (C_2): y = g(x)

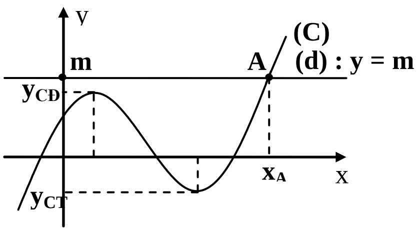
• Để biện luận số nghiệm của phương trình F(x, m) = 0 (*) bằng đồ thị ta biến đổi (*) về một trong các dạng sau:

Dạng 1: $F(x, m) = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ (1)

Khi đó (1) có thể xem là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường: (C): y = f(x) và d: y = m

• d là đường thẳng cùng phương với Ox

• Dựa vào đồ thị (C) ta biện luận số giao điểm của (C) và d. Từ đó suy ra số nghiệm của (1)



Dạng 2: $F(x, m) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(m)$ (2)

- Thực hiện tương tự, có thể đặt g(m) = k.
- Biện luận theo k, sau đó biện luận theo m.

Đặc biệt: Biện luận số nghiệm của phương trình bậc ba bằng đồ thị

• Cơ sở của phương pháp:

Xét phương trình bậc ba:

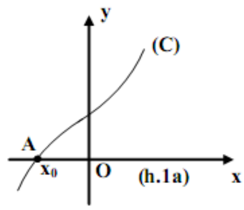
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ (a \neq 0)$ (1) có đồ thị (C)

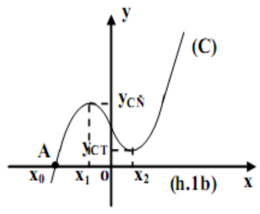
- Số nghiệm của (1) = Số giao điểm của (C) với trục hoành

Bài toán 1: Biện luận số nghiệm của phương trình bậc 3

• **Trường hợp 1**: (1) chỉ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ (C) và Ox có 1 điểm chung

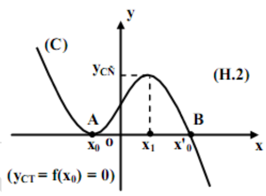
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f \text{ không có cực trị} \quad (h.1a) \\ \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \end{cases} \quad (h.1b) \end{array}\right.$$

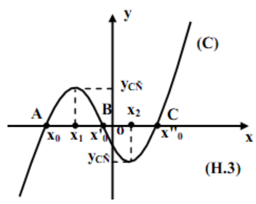




• **Trường hợp 2**: (1) có đúng 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ (C) tiếp xúc với Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} = 0 \end{cases} \quad (h.2)$$





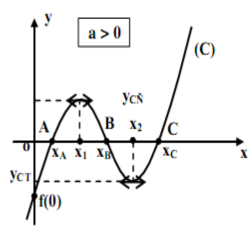
• **Trường hợp 3:** (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt

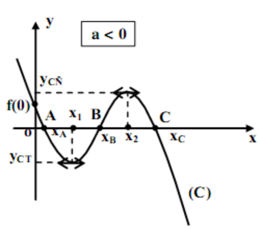
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \end{cases} \quad (h.3)$$

Bài toán 2: Phương trình bậc ba có 3 nghiệm cùng dấu

• **Trường hợp 1:** (1) có 3 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow$ (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương

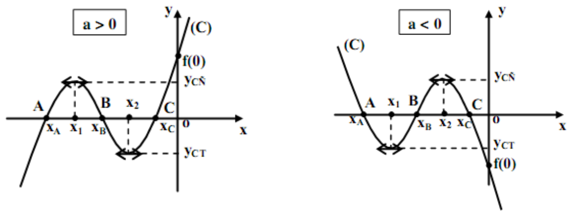
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \\ x_{CĐ} > 0,\ x_{CT} > 0 \\ a.f(0) < 0 \text{ (hay } ad < 0) \end{cases}$$





• **Trường hợp 2:** (1) có 3 nghiệm có âm phân biệt ⇔ (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \\ x_{CĐ} < 0,\ x_{CT} < 0 \\ a.f(0) > 0 \text{ (hay ad > 0)} \end{cases}$$



Vấn đề 4. HÀM SỐ CÓ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ (hàm số chẵn)

Gọi $(C): y = f(x)$ và $(C_1): y = f(|x|)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Vẽ đồ thị (C) và chỉ giữ lại phần đồ thị nằm phía bên phải trục tung.

Bước 2. Lấy đối xứng phần đồ thị ở bước 1 qua trục tung ta được đồ thị (C_1).

2. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

Gọi $(C): y = f(x)$ và $(C_2): y = |f(x)|$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Vẽ đồ thị (C).

Bước 2. Giữ lại phần đồ thị của (C) nằm phía trên trục hoành. Lấy đối xứng phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành của (C) qua trục hoành ta được đồ thị (C_2).

3. Đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$

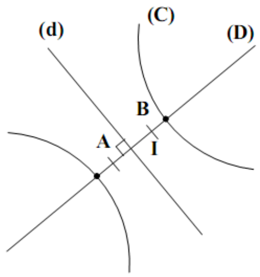
Gọi $(C_1): y = f(|x|)$, $(C_2): y = |f(x)|$ và $(C_3): y = |f(|x|)|$. Dễ thấy để vẽ (C_3) ta thực hiện các bước vẽ (C_1) rồi (C_2) (hoặc (C_2) rồi (C_1)).

Vấn đề 5. ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRÊN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: Tìm cặp điểm trên đồ thị (C): y = f(x) đối xứng qua đường thẳng d: y = ax + b

Cơ sở của phương pháp: A, B đối xứng nhau qua d ⇔ d là trung trực của đoạn AB

- Phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d: y = ax + b có dạng: Δ: $y = -\frac{1}{a}x + m$
- Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C): $f(x) = -\frac{1}{a}x + m$ (1)
- Tìm điều kiện của m để Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. Khi đó x_A, x_B là các nghiệm của (1).
- Tìm toạ độ trung điểm I của AB.
- Từ điều kiện: A, B đối xứng qua d ⇔ I ∈ d, ta tìm được m ⇒ x_A, x_B ⇒ y_A, y_B ⇒ A, B.



Chú ý:

- A, B đối xứng nhau qua trục hoành $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = -y_B \end{cases}$
- A, B đối xứng nhau qua trục tung $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = y_B \end{cases}$
- A, B đối xứng nhau qua đường thẳng y = b $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ y_A + y_B = 2b \end{cases}$
- A, B đối xứng nhau qua đường thẳng x = a $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2a \\ y_A = y_B \end{cases}$

Dạng 2: Tìm cặp điểm trên đồ thị (C): y = f(x) đối xứng qua điểm I(a; b)

Cơ sở của phương pháp: A, B đối xứng nhau qua I $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AB.

- Phương trình đường thẳng d qua I(a; b), có hệ số góc k có dạng: $y = k(x-a)+b$.
- Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $f(x) = k(x-a)+b$ (1)
- Tìm điều kiện để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt

A, B. khi đó x_A, x_B là 2 nghiệm của (1).

- Từ điều kiện: A, B đối xứng qua I $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AB, ta tìm được k $\Rightarrow x_A, x_B$.

Chú ý:

A, B đối xứng qua gốc toạ độ O $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = -y_B \end{cases}$

Dạng 3: Khoảng cách

Kiến thức cơ bản:

1. Khoảng cách giữa hai điểm A, B:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2. Khoảng cách từ điểm $M(x_0;\ y_0)$ đến đường thẳng Δ: ax + by + c = 0:

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3. Diện tích tam giác ABC:

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$$

Nhận xét: Ngoài những phương pháp đã nêu, bài tập phần này thường kết hợp với phần hình học giải tích, định lý Vi-et nên cần chú ý xem lại các tính chất hình học, các công cụ giải toán trong hình học giải tích, áp dụng thành thạo định lý Vi-et trong tam thức bậc hai.

LƯỢNG GIÁC

Vấn đề 1: ÔN TẬP

I. Góc và cung lượng giác:

1. Giá trị lượng giác của một số góc:

A	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
Cotα	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2. Cung liên kết: **(cos đối, sin bù, phụ chéo)**

	$-x$	$\pi - x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} + x$
Sin	–sinx	sinx	cosx	–sinx	cosx
Cos	cosx	–cosx	sinx	–cosx	–sinx
Tan	–tanx	–tanx	cotx	tanx	–cotx
Cot	–cotx	–cotx	tanx	cotx	–tanx

II. Công thức lượng giác:

1. Công thức cơ bản:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$
$$\tan a.\cot a = 1$$
$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$
$$1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

2. Công thức cộng:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \text{sins}\,\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \text{sins}\,\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha.\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$$

3. Công thức nhân đôi, nhân ba:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$= (\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

4. Công thức hạ bậc:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = 1 - \sin^2 x$$
$$= (1-\cos x)(1+\cos x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = 1 - \cos^2 x$$
$$= (1-\cos x)(1+\sin x)$$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x + \sin y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

6. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

➢ ***Một số chú ý cần thiết:***

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2.\sin^2 x.\cos^2 x$$
$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3.\sin^2 x.\cos^2 x$$
$$\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x.\cos^4 x$$
$$= (1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x)^2 - 2\sin^4 x.\cos^4 x$$
$$= \frac{1}{8}\sin^4 2x - \sin^2 2x + 1$$

***Trong một số phương trình lượng giác**, đôi khi ta phải sử dụng cách đặt như sau*:

Đặt $t = \tan x$

Khi đó: $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

<u>Vấn đề 2:</u> PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. <u>Phương trình cơ bản:</u>

- $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
- $\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

<u>Trường hợp đặc biệt:</u>

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

II. <u>Phương trình bậc hai hay bậc n của một hàm lượng giác:</u>

- $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$ (1)
- $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$ (2)
- $a\tan^2 x + b\tan x - c = 0$ (3)
- $a\cot^2 x + a\cot x + c = 0$ (4)

<u>Cách giải</u>:

- Đặt t là một trong các hàm lượng giác.

Giải phương trình theo t và dễ dàng tìm được nghiệm của phương trình đã cho.

III. <u>Phương trình</u> $a.\sin x + b.\cos x = c$

<u>Cách giải</u>:

- Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ **:** phương trình vô nghiệm
- Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$ **:** Ta chia hai vế của

phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$. Pt trở thành:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha.\sin x + \sin\alpha.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

<u>Lưu ý</u>: $\left(\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Biến thể:

$$a.\sin x + b.\cos x = c\sin y + d\cos y$$

Trong đó: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

$$a.\sin x + b.\cos x = c\sin y \text{ (có thể } c.\cos y\text{)}$$

Trong đó: $a^2 + b^2 = c^2$

IV. Phương trình

$$a.\sin^2 x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2 x = d$$

Cách giải:

Cách 1:

- Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Pt trở thành: a = d.(kiểm tra đúng sai và két luận có nhận nghiệm $\cos x = 0$ hay không?)

- Xét $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$. Phương trình trở thành:

$$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$

Đặt $t = \tan x$ ta dễ dàng giải được phương trình.

Cách 2:

Dùng công thức hạ bậc đưa về phương trình III.

Chú ý: Đối với dạng **phương trình thuần nhất bậc 3 hay bậc 4 đối với sin và cos** ta cũng có cách giải hoàn toàn tương tự.

V. Phương trình

$$a(\sin x + \cos x) + b.\sin x.\cos x + c = 0$$

Cách giải:

Đặt $t = \sin x + \cos x$

Điều kiện: $|t| \le \sqrt{2}\left(\text{Do } t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

Ta có: $t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x.\cos x$

$$\Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

Pt trở thành: $a.t + b\frac{t^2 - 1}{2} + c = 0$

Ta dễ dàng giải được.

Chú ý: Đối với dạng phương trình

$$a(\sin x - \cos x) + b.\sin x.\cos x + c = 0$$

Bằng cách đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

ta sẽ giải được với cách giải hoàn toàn tương tự như trên.

VI. Phương trình $A.B = 0$

Cách giải:

- Dùng các công thức biến đổi đưa về dạng $A.B = 0$

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$$

Vấn đề 3: KĨ THUẬT NHẬN BIẾT

- Xuất hiện $\sqrt{3}$ nghĩ đến phương trình III.
- Xuất hiện $\sqrt{3}$ và góc lượng giác lớn nghĩ đến dạng biến thể của phương trình III.
- Xuất hiện góc lớn thì dùng công thức tổng thành tích để đưa về các góc nhỏ.
- Xuất hiện các góc có cộng thêm $k\frac{\pi}{4}, k\frac{\pi}{2}, k\pi$ thì có thể dùng công thức tổng thành tích, tích thành tổng hoặc cung liên kết, hoặc công thức cộng để làm mất các $k\frac{\pi}{4}, k\frac{\pi}{2}, k\pi$
- Xuất hiện $\sqrt{2}$ thì nghĩ đến phương trình III hoặc cũng có khả năng là các vế còn lại nhóm được $(\sin x \pm \cos x)$ để triệt $\sqrt{2}$ vì

$$t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

- Khi đã đơn giản các góc, mà chưa đưa về được phương trình quen thuộc thì nghĩ ngay đến khả năng "nhóm nhà, nhóm cửa". Lưu ý, khả năng tách phương trình bậc hai theo sin (hoặc cos) về tích hai phương trình bậc nhất.

Chú ý: Góc lớn là góc có số đo lớn hơn 2x. Ta chỉ sử dụng công thức nhân ba khi đã đưa bài toán về sinx, $\sin^2 x$ hoặc cosx, $\cos^2 x$.

Vấn đề 4: GIẢI TAM GIÁC

I. Công thức sin, cos trong tam giác:

Do $A + B + C = \pi$ nên:

a. $\sin(A + B) = \sin C$

b. $\cos(A + B) = -\cos C$

Do $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$ nên:

a. $\sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) = \cos\frac{C}{2}$

b. $\cos(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})=\sin\frac{C}{2}$

II. Định lí hàm số sin:

$$\frac{a}{SinA}=\frac{b}{SinB}=\frac{c}{SinC}=2R$$

III. Định lí hàm số cosin:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

IV. Công thức đường trung tuyến:

$$m_a{}^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

V. Công thức đường phân giác:

$$l_a=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

VI. Các công thức tính diện tích tam giác:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{abc}{4R}=pr$$
$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ĐẠI SỐ

Vấn đề 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. Phương trình bậc hai

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có $\Delta=b^2-4ac$.

✓ $\Delta<0$: phương trình vô nghiệm.

✓ $\Delta=0$: phương trình có nghiệm kép $x=-\frac{b}{2a}$.

✓ $\Delta>0$: (3) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

II. Định lý Vi–et (thuận và đảo)

✓ Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thì $\begin{cases}S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\P=x_1.x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$

✓ Nếu biết $\begin{cases}S=x+y\\P=x.y\end{cases}$ thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2-SX+P=0$.

III. Bảng xét dấu của tam thức bậc hai

f(x) = ax² + bx + c $(a\neq 0)$

$\Delta<0$:

x	$-\infty$			$+\infty$
y	Cùng dấu a			

$\Delta=0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
y	Cùng dấu a	0	Cùng dấu a

$\Delta>0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
y	Cùng	0	trái	0	Cùng

IV. Cách xét dấu một đa thức:

- Tìm nghiệm của đa thức gồm cả nghiệm tử và nghiệm mẫu (nếu đa thức là phân thức)
- Lập bảng xét dấu
- Xét dấu theo quy tắc “Thượng cùng, lẻ đổi, chẵn không”

Chú ý: Không nhận những điểm mà hàm số không xác định.

Vấn đề 2: PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

I. Phương trình bậc 3:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \, (a\neq 0)$$

- Bước 1: nhẩm 1 nghiệm $x=\alpha$
- Bước 2: chia ax^3+bx^2+cx+d cho $(x-\alpha)$ (dùng sơ đồ Horner), đưa (4) về phương trình tích $(x-\alpha)(ax^2+Bx+C)=0$.

Chú ý: trường hợp nghiệm phương trình bậc lớn hơn 3 ta cũng có thể giải tương tự.

➢ **Cách nhẩm nghiệm hữu tỉ**: Nghiệm là một trong các tỉ số (ước của d với ước của a)

II. Phương trình bậc 4 đặc biệt:

1. Phương trình trùng phương:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \; (a\neq 0)$$

Đặt $t = x^2,\ t\geq 0$. (5) $\Leftrightarrow$ $at^2 + bt + c = 0$.

2. Phương trình đối xứng:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0 \; (a\neq 0)$$

Bước 1: Chia 2 vế cho x^2,

$$pt \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x\pm\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Bước 2: Đặt $t=x\pm\frac{1}{x}$, đưa (8) về phương trình bậc hai theo t.

3. Phương trình trùng phương tịnh tiến:

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$$

Đặt $t=x+\frac{a+b}{2}$, đưa (7) về phương trình trùng phương theo t

4. Phương trình cân bằng hệ số theo phép cộng:

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = e$ với $a + c = b + d$

Đặt $t = (x + a)(x + c)$, đưa (6) về phương trình bậc 2 theo t

5. Phương trình cân bằng hệ số theo phép nhân:

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=mx^2$ **với** $ab=cd=p$

Đặt $t=x+\frac{ad}{2}$ hoặc $t=(x+a)(x+d)$

6. Phương pháp hệ số bất định:

Giả sử phương trình bậc 4:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

và có phân tích thành

$$(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) = 0$$

Lúc đó ta có:

$$\begin{cases} a_1+a_2=a \\ a_1a_2+b_1+b_2=b \\ a_1b_2+a_2b_1=c \\ b_1b_2=d \end{cases}$$

Tiếp theo tiến hành nhẩm tìm các hệ số a_1; b_1; a_2; b_2. Bắt đầu từ $b_1b_2 = d$ và chỉ thử với các giá trị nguyên.

Chú ý: Phương pháp hệ số bất định này còn áp dụng rất nhiều ở các dạng toán đòi hỏi nhóm đặt thừa số chung hay phân chia phân số.

III. Phương pháp tham số, hằng số biến thiên:

Phương pháp: Coi các giá trị tham số, hằng số là biến. Còn biến được coi làm hằng số.

IV. Phương trình

$$a\left[f(x)\right]^2+b.f(x).g(x)+c\left[g(x)\right]^2=0$$

Trong đó bậc f(x) và g(x) $\leq$ 2.

- Xét g(x) = 0 thỏa phương trình?
- Xét $g(x)\neq 0$ chia hai vế cho $\left[g(x)\right]^2$ đặt $t=\frac{f(x)}{g(x)}$.

Vấn đề 3: PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ.

I. Các công thức:

1. Các hằng đẳng thức đáng nhớ:

- $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases} A, & A\geq 0 \\ -A, & A<0 \end{cases}$
- $A^2\pm AB+B^2=\left(A\pm\frac{B}{2}\right)^2+\frac{3B^2}{4}$
- $(A\pm B)^3=A^3\pm B^3\pm 3AB(A\pm B)$
- $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

2. Phương trình – bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối:

- $|A|=|B|\Leftrightarrow A^2=B^2\Leftrightarrow A=\pm B$
- $|A|=B\Leftrightarrow\begin{cases} B\geq 0 \\ A=\pm B \end{cases}$

- $|A| < |B| \Leftrightarrow -|B| < A < |B|$
- $|A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ -B < A < B \end{cases}$
- $|A| > B \Leftrightarrow B < 0 \vee \begin{cases} B \geq 0 \\ A < -B \vee A > B \end{cases}$

3. **Phương trình – bất phương trình vô tỷ**:

- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \vee B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$
- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow B \geq 0 \wedge A = B^2$
- $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$
- $\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B \end{cases}$
- $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \wedge B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$
- $\sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A < B$
- $\sqrt[2n+1]{A} = B \Leftrightarrow A = B^{2n+1}$
- $\sqrt[2n]{A} = \sqrt[2n]{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \vee B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$
- $\sqrt[2n]{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^{2n} \end{cases}$

II. <u>Các dạng toán thường gặp</u>:

1. Phương trình vô tỷ:

a. Dạng cơ bản:

❖ $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \geq 0$

❖ $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

❖ $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$. Đặt điều kiện bình phương hai vế

Chú ý: Ở đây ta có thể không đặt điều kiện, cứ bình phương các vế để mất căn, phương trình mới là phương trình hệ quả của phương trình đã cho. Do đó khi giải tìm nghiệm ta phải thử lại.

❖ $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)}$

Với $f(x) + h(x) = g(x) + k(x)$

– Ta biến đổi phương trình về dạng

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{h(x)} = \sqrt{k(x)} - \sqrt{g(x)}$$

– Bình phương, giải phương trình hệ quả.

❖ $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$

$\Rightarrow \quad A + B + 3\sqrt[3]{A.B}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) = C$

– Sử dụng phép thế : $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = C$

– Ta được phương trình:

$$A + B + 3\sqrt[3]{A.B.C} = C$$

– Thử lại nghiệm.

b. Đặt ẩn phụ:

<u>Dạng 1</u>: **Đặt ẩn phụ đưa về phương trình 1 ẩn mới**:

$ax^2 + bx + c = \sqrt{px^2 + qx + r}$ trong đó $\dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q}$

<u>Cách giải</u>: Đặt $t = \sqrt{px^2 + qx + r}$ điều kiện $t \geq 0$

<u>Dạng 2</u>: **Phương trình dạng:**

$$\alpha\left(P(x) + Q(x)\right) + \beta\left(\sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}\right)$$
$$\pm 2\alpha\sqrt{P(x).Q(x)} + \gamma = 0\left(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\right)$$

<u>Cách giải</u>**:** Đặt $t = \sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}$

$$\Rightarrow t^2 = P(x) + Q(x) \pm 2\sqrt{P(x).Q(x)}$$

<u>Dạng 3</u>: **Phương trình dạng**:

$$\alpha P(x) + \beta Q(x) + \gamma\sqrt{P(x).Q(x)} = 0 \quad \left(\alpha\beta\gamma \neq 0\right)$$

<u>Cách giải</u>:

* Nếu $P(x) = 0 \Rightarrow pt \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{cases}$

* Nếu $P(x) \neq 0$ chia hai vế cho $P(x)$ sau đó đặt $t = \sqrt{\dfrac{Q(x)}{P(x)}}$ với $t \geq 0$

<u>Dạng 4</u>: **Phương trình đối xứng với hai căn thức**:

$$\sqrt{a + cx} + \sqrt{b - cx} + d\sqrt{(a + cx)(b - cx)} = n$$

<u>Cách giải</u>**:** Đặt $t = \sqrt{a + cx} + \sqrt{b - cx}$

$$\left(\sqrt{a + b} \leq t \leq \sqrt{2(a + b)}\right)$$

<u>Dạng 5</u>**: Phương trình dạng:**

$$\sqrt{x + a^2 - b + 2a\sqrt{x - b}} + \sqrt{x + a^2 - b - 2a\sqrt{x - b}} = cx + m$$

<u>Cách giải</u>: Đặt $t = \sqrt{x - b}$ điều kiện: $t \geq 0$

Đưa phương trình về dạng:

$$|t+a|+|t-a|=c(t^2+b)+m$$

Dạng 6: **Phương pháp tham số, hằng số biến thiên.**

$$6x^2-10x+5-(4x-1)\sqrt{6x^2-6x+5}=0$$

c. Sử dụng ẩn phụ đưa về hệ đối xứng, hệ nửa đối xứng:

Dạng 1: Phương trình dạng

$$x^n+a=b\sqrt[n]{bx-a}$$

Cách giải: Đặt $y=\sqrt[n]{bx-a}$ khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases}x^n-by+a=0\\ y^n-bx+a=0\end{cases}$$

Dạng 2: Phương trình dạng:

$$\sqrt{ax+b}=r(ux+v)^2+dx+e$$

trong đó $a,u,r\neq 0$ và $u=ar+d, v=br+e$

Cách giải: Đặt $uy+v=\sqrt{ax+b}$ khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases}uy+v=r(ux+v)^2+dx+e\\ ax+b=(uy+v)^2\end{cases}$$

Dạng 3: Phương trình dạng:

$$\sqrt[n]{a-f(x)}+\sqrt[m]{b+f(x)}=c$$

Cách giải: Đặt $u=\sqrt[n]{a-f(x)}, v=\sqrt[m]{b+f(x)}$

Khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases}u+v=c\\ u^n+v^m=a+b\end{cases}$$

d. Nhân lượng liên hiệp:

Dạng 1: Phương trình có dạng:

$$\sqrt{f(x)+a}\pm\sqrt{f(x)}=b$$

Cách giải: Nhân lượng liên hợp của vế trái khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{f(x)+a}\pm\sqrt{f(x)}=b\\ \sqrt{f(x)+a}\mp\sqrt{f(x)}=\dfrac{a}{b}\end{cases}$$

Dạng 2: Phương trình dạng:

$$\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}=a\big(f(x)-g(x)\big)$$

Chú ý: Bài toán nhân liên hiệp thường dùng nếu ta nhẩm được nghiệm của bài toán và nghiệm đó là nghiệm duy nhất.

Ta nên biến đổi để nhân cho lượng liên hiệp tổng để việc chứng minh nghiệm duy nhất được dễ dàng.

e. Phương pháp hàm số:

Dạng 1: Chứng minh nghiệm duy nhất

Để chứng minh phương trình $f(x) = g(x)$ (*) có nghiệm duy nhất, ta thực hiện các bước sau:

- Chọn được nghiệm x_0 của phương trình.
- Xét các hàm số $y = f(x)$ (C_1) và $y = g(x)$ (C_2). Ta cần chứng minh một hàm số đồng biến và một hàm số nghịch biến. Khi đó (C_1) và (C_2) giao nhau tại một điểm duy nhất có hoành độ x_0. Đó chính là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chú ý: Nếu một trong hai hàm số là hàm hằng $y = C$ thì kết luận trên vẫn đúng.

Dạng 2: Biện luận tham số m

- Đặt ẩn phụ theo các phương pháp trên.
- Chuyển m theo ẩn phụ m
- Dùng công cụ đạo hàm để định m thỏa bài toán.

f. Phương pháp đánh giá:

Phương pháp này chủ yếu dựa vào các bất đẳng thức, đạo hàm để dánh giá so sánh vế trái và vế phải. Nghiệm bài toán là khi ta đi giải quyết dấu bằng xảy ra khi nào của các đẳng thức trái và phải.

2. Bất phương trình vô tỷ:

Phương pháp giải bất phương trình cũng được chia thành các dạng giống như giải phương trình.

Chú ý:

- Luôn đặt điều kiện trước khi bình phương.
- Một số công thức bổ sung:

a. $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\end{cases}$ **hoặc** $\begin{cases}f(x)<0\\ g(x)<0\end{cases}$

b. $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)<0\end{cases}$ **hoặc** $\begin{cases}f(x)<0\\ g(x)>0\end{cases}$

c. $\dfrac{\sqrt{A}}{B}>1\Leftrightarrow\begin{cases}B>0\\ A>B^2\end{cases}$

d. $\dfrac{\sqrt{A}}{B}<1\Leftrightarrow\begin{cases}B<0\\ A\geq 0\end{cases}$ **hoặc** $\begin{cases}B>0\\ A\geq 0\\ A<B^2\end{cases}$

Vấn đề 4: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Cách giải:

Đặt $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

1. $D\neq 0$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=D_x/D \\ y=D_y/D \end{cases}$.

2. $D=0,\ D_x\neq 0$ hoặc $D_y\neq 0$: Hệ phương trình vô nghiệm.

3. $D = D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm thỏa $a_1x + b_1y = c_1$ hoặc $a_2x + b_2y = c_2$.

II. Hệ chứa một phương trình bậc nhất:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ f(x,y)=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{b}(c-ax) \\ f\left(x,\frac{1}{b}(c-ax)\right)=d \end{cases}$$

III. Hệ đối xứng loại 1:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} f(x,y)=f(y,x) \\ g(x,y)=g(y,x) \end{cases}$$

Cách giải: Đặt $\begin{cases} u=x+y \\ v=xy \end{cases}$ với $u^2\geq 4v$

IV. Hệ đối xứng loại 2:

Dạng 1: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ với $\begin{cases} f(x,y)=g(y,x) \\ g(x,y)=f(y,x) \end{cases}$

Cách giải:

$$\begin{cases} f(x;y)-g(x;y)=0 \\ f(x;y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)h(x;y)=0 \\ f(x;y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ f(x;y)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} h(x;y)=0 \\ f(x;y)=0 \end{cases}$$

Dạng 2: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ trong đó chỉ có một phương trình đối xứng.

Cách giải:

Cách 1: Đưa phương trình đối xứng về dạng tích giải y theo x rồi thế vào phương trình còn lại.

Cách 2: Đưa phương trình đối xứng về dạng $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ với hàm f đơn điệu.

V. Hệ đẳng cấp bậc 2:

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2 \end{cases}$$

Cách giải:

- Xét y = 0.
- Xét $y\neq 0$ khi đó đặt $x=ty$ và giải phương trình bậc hai ẩn t

VI. Hệ bậc hai mở rộng:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)=0 \\ \alpha.f(x,y)+\beta.g(x,y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)=0 \\ (ax+by+c)(px+qy+r)=0 \end{cases}$$

Chú ý: Một số bài toán cần phải đặt ẩn phụ để chuyển về các dạng toán đã biết. Ngoài ra phương pháp đánh giá và phương pháp hàm số cũng có thể được dùng để giải.

MŨ - LOGARIT

Vấn đề 1: CÔNG THỨC

I. Hàm số mũ y = a^x (a > 0)

1. **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$
2. **Tập giá trị:** $G = (0; +\infty)$
3. **Tính đơn điệu:**
   - 0 < a < 1: Hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$
   - a > 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
4. **Một số công thức cơ bản:**

– $a^0 = 1\ (a \neq 0)$ – $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

– $a^m.a^n = a^{m+n}$ – $a^m : a^n = a^{m-n}$

– $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$ – $(ab)^m = a^m.b^m$

– $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ – $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

II. Hàm số logarit y = $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$

Định nghĩa: y = $\log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

1. **Tập xác định:** $D = (0; +\infty)$
2. **Tập giá trị:** $G = \mathbb{R}$
3. **Tính đơn điệu:**
   - 0 < a < 1: Hàm nghịch biến trên D
   - a > 1: Hàm số đồng biến trên D
4. **Một số công thức cơ bản:**

– $a^{\log_a x} = x$ – $e^{\ln x} = x$

– $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ – $\log_a x^{2n} = 2n\log_a |x|$

– $\log_{a^\alpha} b^\beta = \dfrac{\beta}{\alpha}\log_a b$ – $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

– $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ – $\log_a b.\log_b c = \log_a c$

– $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$

– $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

III. Phương trình và bất phương trình mũ cơ bản:

1. $\begin{cases} a^{f(x)} = b \\ 0 < a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$

2. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x), g(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

3. $\begin{cases} a^{f(x)} > b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b > 0 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} b \leq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \end{array}\right.$

4. $\begin{cases} a^{f(x)} > b \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b > 0 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} b \leq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \end{array}\right.$

5. $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

6. $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

IV. Phương trình và bất phương trình logarit cơ bản:

1. $\begin{cases} \log_a f(x) = b \\ 0 < a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = a^b$

2. $\begin{cases} \log_a f(x) = \log_a g(x) \\ 0 < a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

3. $\begin{cases} \log_a f(x) > b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) < a^b$

4. $\begin{cases} \log_a f(x) > b \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > a^b$

5. $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$

6. $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$

V. Các dạng toán thường gặp:

1. **Phương trình mũ:**

   a. ***Đưa về cùng cơ số:***

   Với a > 0, a ≠ 1: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

   Chú ý: Trong trường hợp cơ số có chứa ẩn số thì:
   $a^M = a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) = 0$

   b. ***Logarit hoá:***
   $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = \left(\log_a b\right).g(x)$

c. Đặt ẩn phụ:

Dạng 1:

$$P(a^{f(x)})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=a^{f(x)},\ t>0 \\ P(t)=0 \end{cases},$$

trong đó P(t) là đa thức theo t.

Dạng 2:

$$\alpha a^{2f(x)}+\beta(ab)^{f(x)}+\gamma b^{2f(x)}=0$$

Cách giải:

Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, rồi đặt $t=\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$

Dạng 3:

$$a^{f(x)}+b^{f(x)}=m,\ \text{với}\ \ ab=1.$$

Cách giải: Đặt $t=a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)}=\frac{1}{t}$

d. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số:

Xét phương trình: f(x) = g(x) (1)

- Đoán nhận x_0 là một nghiệm của (1).
- Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến của f(x) và g(x) để kết luận x_0 là nghiệm duy nhất.
- Nếu f(x) đồng biến (hoặc nghịch biến) thì $f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$

e. Đưa về phương trình các phương trình đặc biệt:

- Phương trình tích: A.B = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$
- Phương trình $A^2+B^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

f. Phương pháp đối lập:

Xét phương trình: f(x) = g(x) (1)

Nếu ta chứng minh được: $\begin{cases} f(x) \geq M \\ g(x) \leq M \end{cases}$ thì

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=M \\ g(x)=M \end{cases}$$

2. Bất phương trình mũ:

Cách giải: Tương tự như phương trình mũ.

Chú ý: Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì: $a^M>a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N)>0$

3. Phương trình logarit:

a. Đưa về cùng cơ số

Với a > 0, a ≠ 1:

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0 \quad (g(x)>0) \end{cases}$$

b. Mũ hóa

Với a > 0, a ≠ 1:

$$\log_a f(x)=b \Leftrightarrow a^{\log_a f(x)}=a^b$$

c. Đặt ẩn phụ

d. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

e. Đưa về phương trình đặc biệt

f. Phương pháp đối lập

Chú ý:

- Các phương pháp liệt kê không nêu cách giải có cách giải tương tự phương trình mũ.

Khi giải phương trình logarit cần chú ý điều kiện để biểu thức có nghĩa.

- Với a, b, c > 0 và a, b, c ≠ 1 thì:

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

4. Bất phương trình logarit:

Cách giải: Tương tự như phần phương trình.

Chú ý: Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:

$$\log_a B>0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1)>0;$$

$$\frac{\log_a A}{\log_a B}>0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1)>0$$

5. Hệ phương trình mũ – logarit:

Cách giải: Kết hợp các cách giải của phương trình mũ – logarit ở trên và phần giải phương trình và hệ phương trình đại số.

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

BẢNG NGUYÊN HÀM

Hàm số f(x)	Họ nguyên hàm F(x)	Hàm số f(x)	Họ nguyên hàm F(x)+C
a	ax + C		
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$(ax+b)^\alpha$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$		
e^x	e^x+C	e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
sinx	-cosx + C	sin(ax+b)	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
cosx	sinx + C	cos(ax+b)	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	tgx + C	$\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}\mathrm{tg}(ax+b)+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	-cotgx + C	$\frac{1}{\sin^2(ax+b)}$	$-\frac{1}{a}\cot g(ax+b)+C$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+C$	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
tgx	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert+C$
cotgx	$\ln\lvert\sin x\rvert+C$		

Vấn đề 1: NGUYÊN HÀM

I. Định nghĩa:

Hàm số $F(x)$ gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên (a,b) nếu $F'(x)=f(x),\ \forall x\in(a,b)$.

Chú ý: Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thì mọi hàm số có dạng $F(x)+C$ (C là hằng số) cũng là nguyên hàm của $f(x)$ và chỉ những hàm số có dạng $F(x)+C$ mới là nguyên hàm của $f(x)$. Ta gọi $F(x)+C$ là họ nguyên hàm hay tích phân bất định của hàm số $f(x)$ và ký hiệu là $\int f(x)dx$.

Như vậy: $\int f(x)dx=F(x)+C$

II. Tính chất:

1. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx;\ (k\neq 0)$
2. $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$
3. $\int f(x)dx=F(x)+C$ thì $\int f(u)du=F(u)+C$

Vấn đề 2: TÍCH PHÂN

I. Định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

II. Tính chất:

1. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx\ \ (k\neq 0)$
3. $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
5. Nếu $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx\geq 0$
6. Nếu $f(x)\geq g(x)$ thì $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$, $\forall x\in[a;b]$
7. Nếu $m\leq f(x)\leq M,\ \forall x\in[a;b]$ thì $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$

Chú ý:

- Muốn tính tích phân bằng định nghĩa ta phải biến đổi hàm số dưới dấu tích phân thành tổng hoặc hiệu của những hàm số đã biết nguyên hàm.
- Nếu hàm số dưới dấu tích phân là hàm số hữu tỷ có bậc của tử lớn hơn hoặc bằng bậc của mẫu ta phải thực hiện phép chia tử cho mẫu.

Vấn đề 3: TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ

I. Công thức:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(x)].\varphi'(x)dx = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

II. Những phép đổi biến phổ thông:

Hàm số có chứa $[\varphi(x)]^n$	Đặt $t = \varphi(x)$
Hàm số có mẫu số	Đặt t là mẫu số
Hàm số có chứa $\sqrt{\varphi(x)}$	Đặt $t = \varphi(x)$ hay $t = \sqrt{\varphi(x)}$
Tích phân chứa $\frac{dx}{x}$	Đặt $t = \ln x$
Tích phân chứa e^x	Đặt $t = e^x$
Tích phân chứa $\frac{dx}{\sqrt{x}}$	Đặt $t = \sqrt{x}$
Tích phân chứa $\frac{dx}{x^2}$	Đặt $t = \frac{1}{x}$
Tích phân chứa $\cos xdx$	Đặt $t = \sin x$
Tích phân chứa $\frac{dx}{\cos^2 x}$	Đặt $t = tgx$
Tích phân chứa $\frac{dx}{\sin^2 x}$	Đặt $t = \cot gx$.
Tích phân chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$	Đặt x = asint, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
Tích phân chứa $\frac{1}{a^2 + x^2}$	Đặt x = atant, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Vấn đề 4: TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

I. Công thức:

$$\int_a^b uv'dx = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vu'dx$$

hay $$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Các bước thực hiện:

- Bước 1:

Đặt $\begin{cases} u = u(x) \\ dv = v'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'(x)dx \text{ (Đạo hàm)} \\ v = v(x) \text{ (nguyên hàm)} \end{cases}$

- Bước 2: Thế vào công thức (1).
- Bước 3: Tính $(uv)\Big|_a^b$ và suy nghĩ tìm cách tính tiếp $\int_a^b vdu$

II. Những cách đặt thông thường:

	u	dv
$\int P(x).e^x dx$	$P(x)$	$e^x dx$
$\int P(x).\cos xdx$	$P(x)$	$\cos xdx$
$\int P(x).\sin xdx$	$P(x)$	$\sin xdx$
$\int P(x).\ln xdx$	$\ln x$	$P(x)$

Chú ý :

Tích phân hàm hữu tỉ:

- Nếu mẫu là bậc nhất thì lấy tử chia mẫu
- Nếu mẫu là bậc hai có nghiệm kép thì đưa về hằng đẳng thức
- Nếu mẫu là bậc hai có hai nghiệm thì đồng nhất thức
- Nếu mẫu là bậc hai vô nghiệm thì đổi biến số.

Tích phân hàm lương giác:

- Nếu sinx,cosx có số mũ chẳn thì hạ bậc $\left(\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\right)$
- Nếu sinx,cosx có số mũ lẻ thì tách ra rồi đặt t
- Nếu có $\tan^2 x$ hoặc $\cot^2 x$ thì thêm bớt 1
- Nếu có tanx,cotx có thể đưa về sinx,cosx rồi đặt t
- Nếu có sina.cosb,sina.sinb,cosa.cosb thì dùng công thức biến đổi tích thành tổng.
- Nhiều bài chúng ta phải biến đổi các hàm lượng giác để đưa về các dạng có khả năng tính được.

Chú ý: Tích phân trong các đề thi đại học thường ra dưới dạng kết nhiều dạng tính tích phân. Vì thế, từ tích phân ban đầu ta biến đổi về tổng hoặc hiệu các tích phân. Khi đó, từng tích phân dễ dàng tích được bằng các phương pháp trên. (thường là một tích phân đổi biến và một tích phân từng phần).

Vấn đề 5: TÍCH PHÂN CÓ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Giả sử cần tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)|dx$.

Bước 1. Lập bảng xét dấu (BXD) của hàm số f(x) trên đoạn [a; b], giả sử f(x) có BXD:

X	a		x_1		x_2		b
f(x)		+	0	–	0	+	

Bước 2. Tính

$$I = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^{x_1} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{b} f(x)dx.$$

Chú ý: Nếu trong khoảng (a; b) phương trình f(x) = 0 không có nghiệm thì:

$$\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Vấn đề 6: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

I. Tính diện tích hình phẳng:

1. Trường hợp 1:

Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b$ là:

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx}$$

2. Trường hợp 2:

Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = g(x)$ là:

$$\boxed{S = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx}$$

Trong đó α, β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của f(x) = g(x).

Chú ý:

❖ Nếu trong khoảng $(\alpha; \beta)$ phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thì:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx = \left|\int_\alpha^\beta [f(x) - g(x)]dx\right|}$$

❖ Nếu tích S giới hạn bởi x = f(y) và x = g(y) thì ta đổi vai trò x cho y trong công thức trên.

II. Tính thể tích khối tròn xoay:

1. Trường hợp 1.

Thể tích khối tròn xoay V do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) \ge 0\ \ \forall x \in [a;\ b]$, y = 0, x = a và x = b (a < b) **quay quanh trục Ox** là:

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)dx}$$

2. Trường hợp 2.

Thể tích khối tròn xoay V do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y) \ge 0\ \ \forall y \in [c;\ d]$, x = 0, y = c và y = d (c < d) **quay quanh trục Oy** là:

$$\boxed{V = \pi\int_c^d g^2(y)dy}$$

3. Trường hợp 3. Thể tích khối tròn xoay V do hình phẳng giới hạn bởi các đường y = f(x), $y = g(x)$, x = a và x = b $\left(a < b,\ f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0\ \forall x \in [a;\ b]\right)$ **quay quanh trục Ox** là:

$$\boxed{V = \pi\int_a^b |f^2(x) - g^2(x)|dx}$$

4. Trường hợp 4. Thể tích khối tròn xoay V do hình phẳng giới hạn bởi các đường x = f(y), $x = g(y)$, y = c và y = d $\left(c < d,\ f(y) \ge 0,\ g(y) \ge 0\ \forall y \in [c;\ d]\right)$ **quay quanh trục Oy** là:

$$\boxed{V = \pi\int_c^d |f^2(y) - g^2(y)|dy}$$

Chú ý: Cách giải tích phân có dấu giá trị tuyệt đối đã nêu ở trên.

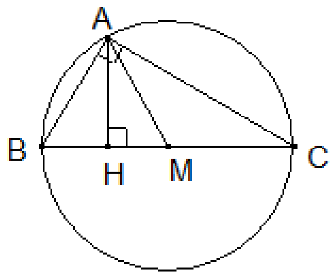
Chuyên đề: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I. Kiến thức cơ bản:

1. Kiến thức hình học 9 – 10:

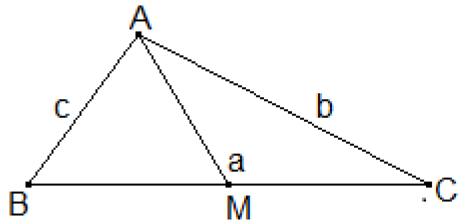
1.1 Hệ thức lượng trong tam giác vuông:

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH, đường trung tuyến AM. Ta có:

• $AB^2 + AC^2 = BC^2$	• $AH^2 = BH.CH$	
• $AB^2 = BH.BC$	• $AC^2 = CH.BC$	
• $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$	• $AH.BC = AB.AC$	
• $\sin B = \dfrac{b}{a}$, $\cos B = \dfrac{c}{a}$, $\tan B = \dfrac{b}{c}$, $\cot B = \dfrac{c}{b}$		
M là trung điểm BC nên MA = MB = MC và M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC		

1.2 Hệ thức lượng trong tam giác thường:

Cho tam giác ABC có các cạnh lần lượt là a, b, c, đường trung tuyến AM.

• **Định lý hàm cos:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	
• **Định lý hàm sin:** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$	
• **Định lý đường trung tuyến:** $m_a^2 = AM^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$	

1.3 Các công thức tính diện tích:

Tam giác ABC: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH = p.r$ $= \dfrac{abc}{4R} = \dfrac{1}{2}.AB.AC.\operatorname{Sin}A$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	**Hình thang ABCD (AB // CD), đường cao DH:** $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AB + CD).DH$	**Hình vuông ABCD cạnh a:** $S_{ABCD} = AB.AC$ $= \dfrac{1}{2}AC.BD = a^2$
Hình chữ nhật ABCD: $S_{ABCD} = AB.AD$	**Diện tích hình thoi ABCD:** $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD$	**Diện tích hình tròn:** $S_{(O;R)} = \pi.R^2$
Diện tích hình bình hành: S = cạnh đáy x chiều cao	**Diện tích tam giác đều:** $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$	**Tam giác vuông tại A:** $S = \dfrac{1}{2}AB.AC$

1.4 Tam giác - Các trường hợp bằng nhau - đồng dạng của tam giác:

a. *Trường hợp bằng nhau và đồng dạng của tam giác thường:*

Tam giác ABC có các góc A;B;C các cạnh đối diện tương ứng a;b;c. Chu vi 2p. Diện tích S

Tính chất:

- Hai tam giác bằng nhau thì các yếu tố tương ứng bằng nhau.
- Hai tam giác đồng dạng thì :
  - Tỷ số giữa các yếu tố(không kể góc; và diện tích) tương ứng bằng nhau và bằng tỷ số đồng dạng.
  - Tỷ số diện tích bằng bình phương tỷ số đồng dạng.
- Hai tam giác đồng dạng nếu có 1 yếu tố về độ dài tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

b. *Trường hợp bằng nhau và đồng dạng của tam giác vuông*:

Do 2 tam giác vuông có góc vuông tương ứng bằng nhau nên có sự đặc biệt so với tam giác thường:

- Hai cạnh góc vuông bằng nhau (tỷ lệ).
- Một góc nhọn tương ứng bằng nhau và 1 cạnh góc vuông bằng nhau (tỷ lệ).
- Một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng nhau (tỷ lệ).

1.5 Định lý Thalet:

- Những đường thẳng song song định ra trên 2 cát tuyến những đoạn thẳng tỷ lệ.
- Trong tam giác 1 đường thẳng song song với cạnh đáy khi và chỉ khi nó định ra trên 2 cạnh kia những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.
- Trong tam giác đường thẳng song song với một cạnh thì tạo với 2 cạnh kia 1 tam giác đồng dạng với tam giác đã cho ban đầu.

1.6 Các yếu tố cơ bản trong tam giác:

- Ba đường trung tuyến đồng quy tại 1 điểm: trọng tâm G cách đỉnh bằng $\frac{2}{3}$ mỗi đường.

Mỗi đường trung tuyến chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

- Ba đường cao đồng quy tại một điểm: trực tâm H.
- Ba đường trung trực đồng quy tại một điểm gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp, còn gọi là tâm của tam giác.
- Ba đường phân giác trong đồng quy tại một điểm gọi là tâm đường tròn nội tiếp.

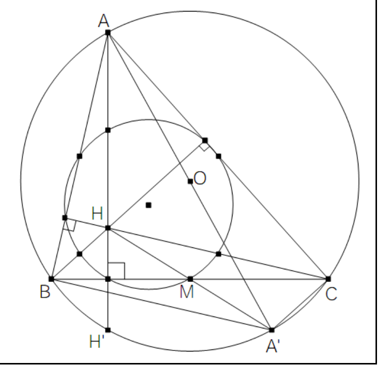
Mỗi đường phân giác chia cạnh đối diện thành hai phần tỉ lệ với hai cạnh bên tương ứng.

1.7 Các tính chất đặc biệt:

Cho tam giác nhọn ABC, nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AA’, M trung điểm BC, H là trực tâm, H’ đối xứng với H qua BC.

Ta có:

- BHCA’ là hình bình hành có tâm là M nên A’ là điểm đối xứng của H qua M
- H’ nằm trên đường tròn tâm O.
- 9 điểm gồm trung điểm 3 cạnh tam giác, trung điểm AH, BH, CH, và các chân đường cao nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm OH được gọi là đường tròn Euler.

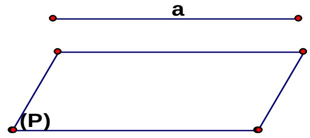


2. Kiến thức hình học 11:

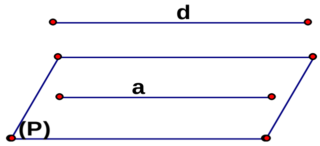
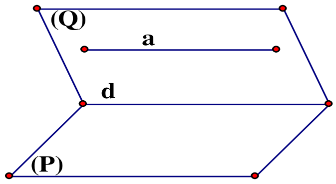
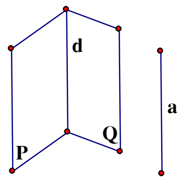
Quan hệ song song:

Bài 1: ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

Định nghĩa:

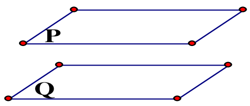
Một đường thẳng và một mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.	$a//(P) \Leftrightarrow a \cap (P) = \varnothing$	

Định lý:

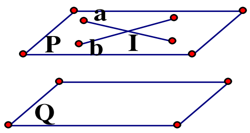
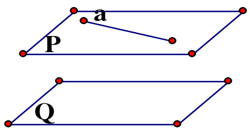
ĐL1: *Nếu đường thẳng d không nằm trên mặt phẳng (P) và song song với đường thẳng a nằm trên mặt phẳng (P) thì đường thẳng d song song với mặt phẳng (P)*	$\begin{cases} d \not\subset (P) \\ d//a \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d//(P)$	
ĐL2: Nếu một đường thẳng song song với mặt phẳng thì nó song song với giao tuyến của mặt phẳng đó và mặt phẳng bất kỳ chứa nó.	$\begin{cases} a//(P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases} \Rightarrow d//a$	
ĐL3: Nếu một đường thẳng song song với 2 mặt phẳng cắt nhau thì nó song song với giao tuyến của hai mặt phẳng đó.	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P)//a \\ (Q)//a \end{cases} \Rightarrow d//a$	

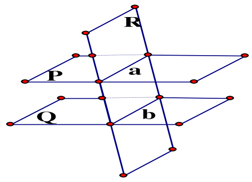
Bài 2: HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Định nghĩa:

Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.	$(P)//(Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \varnothing$	

Định lý:

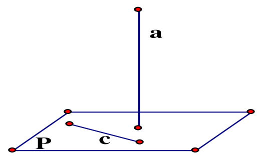
ĐL1: *Điều kiện cần và đủ để 2 mặt phẳng song song là trong mặt phẳng này chứa 2 đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia.*	$\begin{cases} a, b \subset (P) \\ a \cap b = I \\ a//(Q), b//(Q) \end{cases} \Rightarrow (P)//(Q)$	
ĐL2: *Nếu 2 mặt phẳng song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.*	$\begin{cases} (P)//(Q) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a//(Q)$	

ĐL3: Cho 2 mặt phẳng song song. Mặt phẳng nào cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và 2 giao tuyến song song với nhau.	$\begin{cases}(P)//(Q)\\(R)\cap(P)=a\\(R)\cap(Q)=b\end{cases}\Rightarrow a//b$	

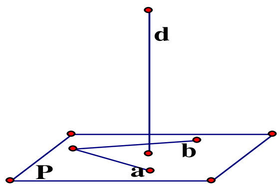
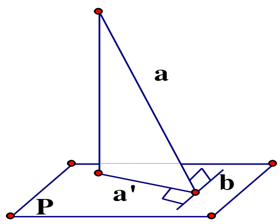
Quan hệ vuông góc:

Bài 1: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Định nghĩa:

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng khi và chỉ khi nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.	$a\perp(P)\Leftrightarrow a\perp c,\forall c\subset(P)$	

Định lý:

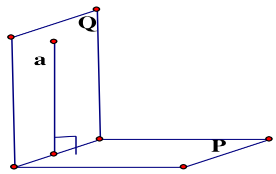
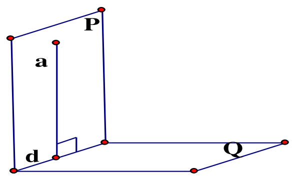
ĐL1: *Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P).*	$\begin{cases}d\perp a,\ d\perp b\\a,b\subset(P)\\a\cap b=A\end{cases}\Rightarrow d\perp(P)$	
ĐL2: (định lý 3 đường vuông góc): *Cho đường thẳng a có hình chiếu trên mặt phẳng (P) là đường thẳng a'. Khi đó một đường thẳng b chứa trong (P) vuông góc với a khi và chỉ khi nó vuông góc với a'.*	$\begin{cases}a\not\perp(P),b\subset(P)\\b\perp a\\a'=a/(P)\end{cases}\Leftrightarrow\ b\perp a'$	

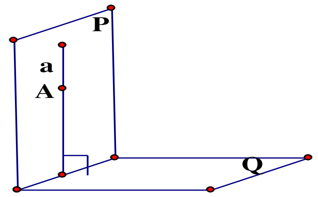
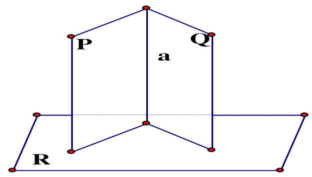
Bài 2: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa:

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.	$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\widehat{((P),(Q))}=90^0$	

Định lý:

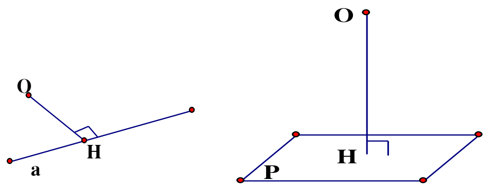
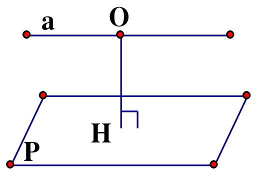
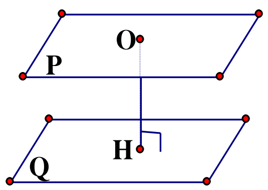
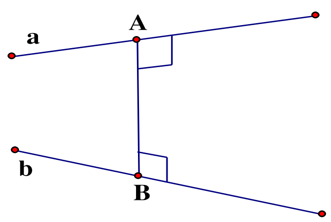
ĐL1: *Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.*	$\begin{cases}a\perp(P)\\a\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow(Q)\perp(P)$	
ĐL2: *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với (Q).*	$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=d\\a\subset(P),a\perp d\end{cases}\Rightarrow a\perp(Q)$	

ĐL3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P)	$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\ A\in(P)\\ A\in a\\ a\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow a\subset(P)$	
ĐL4: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.	$\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\ (P)\perp(R)\\ (Q)\perp(R)\end{cases}\Rightarrow a\perp(R)$	

Bài 3: MỐI LIÊN HỆ QUAN HỆ SONG SONG VÀ VUÔNG GÓC

1. $\begin{cases}a//b\\ a\perp(P)\end{cases}\Rightarrow b\perp(P)$	**2.** $\begin{cases}a\perp(P)\\ b\perp(P)\end{cases}\Rightarrow a//b$	**3.** $\begin{cases}(P)//(Q)\\ a\perp(P)\end{cases}\Rightarrow a\perp(Q)$
4. $\begin{cases}a\perp(P)\\ a\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow (P)//(Q)$	**5.** $\begin{cases}a\perp b\\ (P)\perp b\end{cases}\Rightarrow a//(P)\text{ hay } a\subset(P)$	

Bài 4: KHOẢNG CÁCH

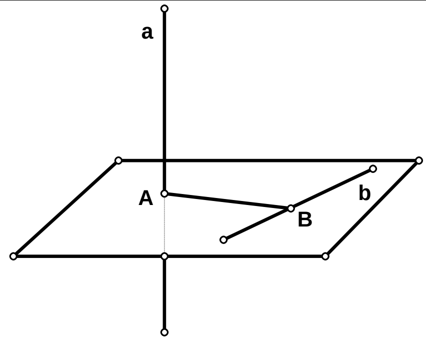
1. Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, đến 1 mặt phẳng: Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a (hoặc đến mặt phẳng (P)) là khoảng cách giữa hai điểm O và H, trong đó H là hình chiếu của điểm O trên đường thẳng a (hoặc trên mặt phẳng (P)) d(O; a) = OH; d(O; (P)) = OH	
2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song: Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với đường thẳng a là khoảng cách từ điểm O bất kỳ thuộc đường thẳng a đến mặt phẳng (P)	
3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.	
4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau : Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.	

<u>Phương pháp</u>: Dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Cách 1: Giả sử a ⊥ b:

- Dựng mặt phẳng (P) chứa b và vuông góc với a tại A.
- Dựng AB ⊥ b tại B

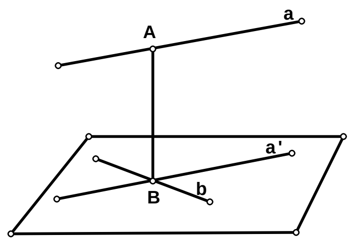
⇒ AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



Cách 2: Sử dụng mặt phẳng song song.

- Dựng mặt phẳng (P) chứa b và song song với a.
- Dựng hình chiếu vuông góc a’ của a trên (P).
- Từ giao điểm B của a’ và b, dựng đường thẳng vuông góc với (P) rồi lấy giao điểm A của đường thẳng này với a.

⇒ AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

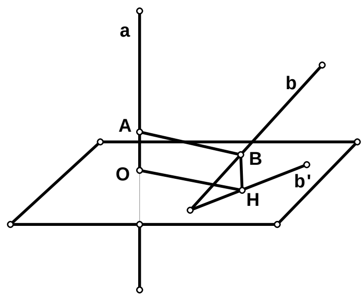


Cách 3: Sử dụng mặt phẳng vuông góc.

- Dựng mặt phẳng (P) ⊥ a tại O.
- Dựng hình chiếu b′ của b trên (P).
- Dựng OH ⊥ b′ tại H.
- Từ H, dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại B.
- Từ B, dựng đường thẳng song song với OH, cắt a tại A.

⇒ AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

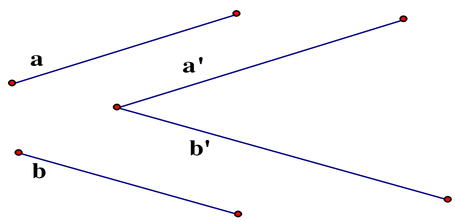
Chú ý: d(a,b) = AB = OH.



Bài 5: GÓC

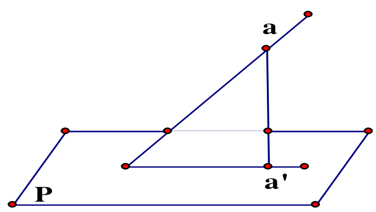
1. Góc giữa 2 đường thẳng trong không gian:
Góc giữa 2 đường thẳng trong không gian là góc hợp bởi hai đường thẳng cùng phương với chúng, xuất phát từ cùng một điểm.

Lưu ý: $0^0 \le \left(\widehat{a,b}\right) \le 90^0$



2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

- <u>Đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng</u>: Là góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó lên mặt phẳng.
- <u>Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng</u>: góc giữa chúng bằng 90^0

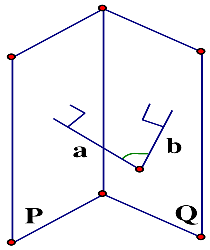


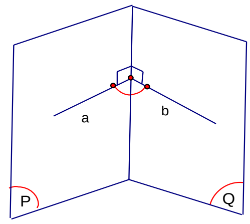
<u>Phương pháp</u>: Xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

- Tìm giao điểm O của a với (P).
- Chọn điểm A ∈ a và dựng AH ⊥ (P). Khi đó $\widehat{AOH} = \left(\widehat{a,(P)}\right)$

3. Góc giữa hai mặt phẳng:

- Góc giữa 2 mặt phẳng là góc tạo bởi 2 đường thẳng lần lượt vuông góc với 2 mặt phẳng
- Hoặc là góc giữa 2 đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại 1 điểm





Phương pháp: Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

- Tìm hai đường thẳng a, b: a ⊥ (P), b ⊥ (Q). Khi đó: $\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right)$.
- Giả sử (P) ∩ (Q) = c. Từ I ∈ c, dựng $\begin{cases} a\subset (P), a\perp c \\ b\subset (Q), b\perp c \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right)$

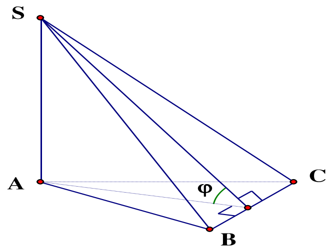
[Tìm mặt phẳng (R) vuông góc với giao tuyến c = (P) ∩ (Q)

(R) ∩ (P) = a; (R) ∩ (Q) = b $\Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right)$]

4. Diện tích hình chiếu:

Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu (H') của (H) trên (P').

Khi đó ta có: $S'=S.\cos\left(\widehat{P,P'}\right)$



Lưu ý: Ngoài những vấn đề đã nêu thêm phương pháp giải, học sinh nên chú ý các định lý được in nghiêng cũng chính là phương pháp thường được sử dụng để giải quyết các vấn đề.

MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP

✓ **Hình lăng trụ:** là hình đa diện có 2 đáy song song và các cạnh không thuộc hai đáy thì song song và bằng nhau và gọi là các cạnh bên.

✓ **Hình hộp:** là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành

✓ **Hình lăng trụ đứng:** là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy.

✓ **Hình lăng trụ đều:** là lăng trụ đứng và có đáy là đa giác đều.

✓ **Hình hộp đứng:** là hình hộp có cạnh bên vuông góc với đáy.

✓ **Hình hộp chữ nhật:** là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật . Ba độ dài của ba cạnh xuất phát từ một đỉnh gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật.

✓ **Hình lập phương:** là hình hộp chữ nhật có ba kích thước bằng nhau.

✓ **Hình chóp:** là hình đa diện có một mặt là một đa giác còn các mặt khác đều là các tam giác có chung đỉnh.

✓ **Hình tứ diện:** là hình chóp có đáy là hình tam giác.

✓ **Hình chóp đều:** là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên đều bằng nhau. Đường thẳng nối từ đỉnh đến tâm đa giác đều gọi là trục của hình chóp. Trục của hình chóp vuông góc với mặt phẳng đáy.

✓ **Hình chóp cụt:** là hình đa diện tạo ra từ hình chóp có hai đáy là hai đa giác đồng dạng nằm trong hai mặt phẳng song song, các mặt bên là các hình thang.

3. Kiến thức hình học 12:

Diện tích – thể tích khối đa diện:

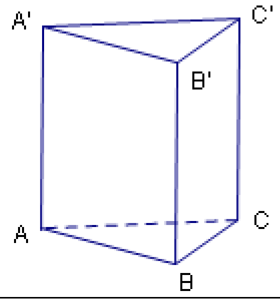
- ✓ **Diện tích xung quanh**: bằng tổng diện tích các mặt bên.
- ✓ **Diện tích toàn phần**: bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy.

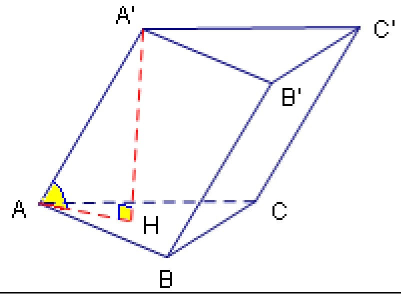
1. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ:

$$V = B.h$$

với **B**: là diện tích đáy hình lăng trụ

h: là đường cao hình lăng trụ





THỂ TÍCH KHỐI HỘP CHỮ NHẬT:

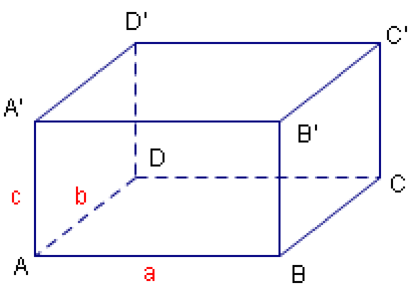
$$V = a.b.c$$

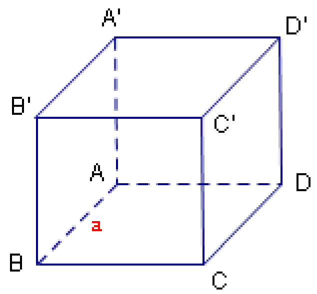
Với **a, b c** là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp chữ nhật.

THỂ TÍCH HÌNH LẬP PHƯƠNG:

$$V = a^3$$

Với **a** là độ dài cạnh hình lập phương



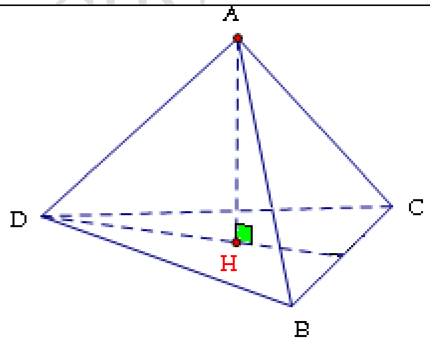


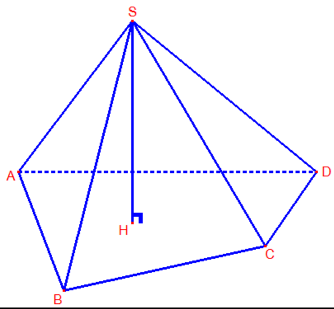
2. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP:

$$V = \frac{1}{3}B.h$$

với **B**: là diện tích đáy

h: là đường cao

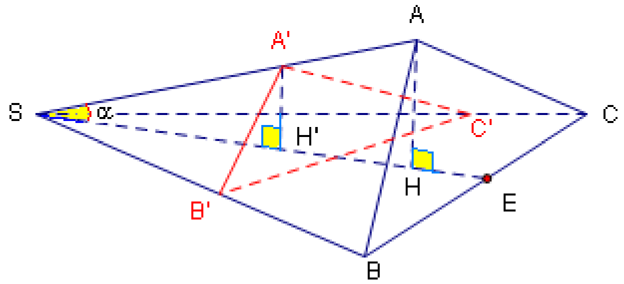




3. TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN:

Cho khối tứ diện SABC và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có:

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}$$

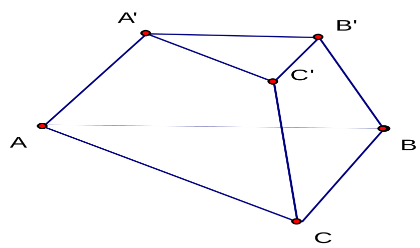


4. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CỤT:

$$V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$$

với **B, B'**: là diện tích đáy

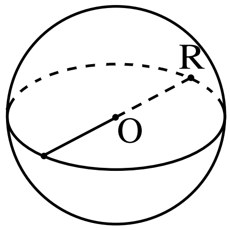
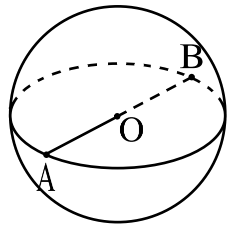
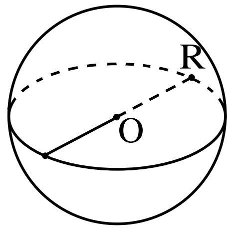
h: là đường cao



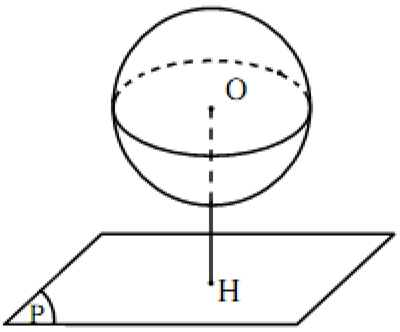
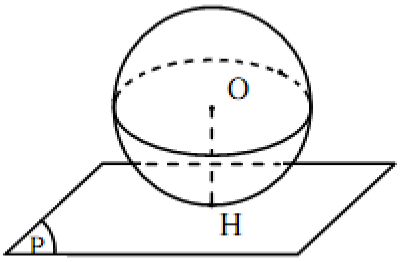
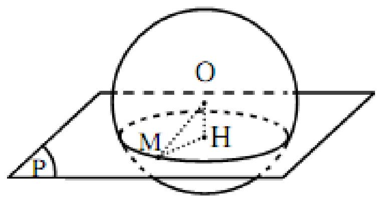
KHỐI TRÒN XOAY

MẶT CẦU

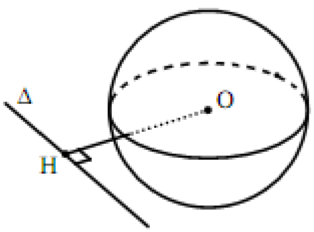
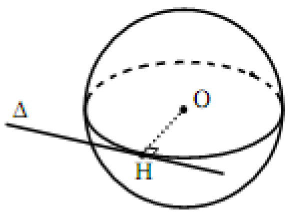
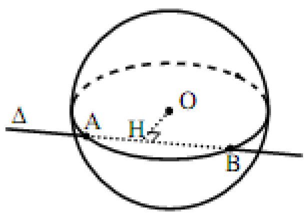
I. Định nghĩa:

1. Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu tâm O và bán kính bằng R. $S(O;R)=\{M/OM=R\}$  	**2.** Tập hợp các điểm trong không gian nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông gọi là mặt cầu đường kính AB. $S(AB)=\{M/\angle AMB=90^0\}$  	**3.** Khối cầu B(O;R) là tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $OM\le R$ $B(O;R)=\{M/OM\le R\}$ 

II. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt cầu S(O;R) và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) và đặt d = OH		
➢ **d** > **R**: $(P)\cap(S)=\varnothing$  	➢ **d = R**: (P) tiếp xúc (S) tại H Ta có H: tiếp điểm; (P) tiếp diện.  	➢ **d** < **R**: (P) cắt (S) theo giao tuyến là 1 đường tròn có tâm là H bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$ 

III. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng:

Cho mặt cầu S(O;R) và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ và đặt d = OH		
➢ **d** > **R**: Δ và mặt cầu không có điểm chung  	➢ **d = R**: Δ và mặt cầu có 1 điểm chung là H. Δ gọi là tiếp tuyến của mặt cầu tại H. H là tiếp điểm của Δ và mặt cầu.  	➢ **d** < **R**: Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt. 

IV. Mặt cầu ngoại tiếp – nội tiếp khối đa diện:

	Mặt cầu ngoại tiếp	**Mặt cầu nội tiếp**
Hình đa diện	Tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu	Tất cả các mặt của hình đa diện đều tiếp xúc với mặt cầu
Hình trụ	Hai đường tròn đáy của hình trụ nằm trên mặt cầu	Mặt cầu tiếp xúc với các mặt đáy và mọi đường sinh của hình trụ
Hình nón	Mặt cầu đi qua đỉnh và đường tròn đáy của hình nón	Mặt cầu tiếp xúc với mặt đáy và mọi đường sinh của hình nón

V. Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện:

- Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của hình đa diện gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện. Tâm là điểm cách đều các đỉnh của hình đa diện, bán kính là khoảng cách từ tâm đến một trong các đỉnh đó.
- **Cách xác định tâm mặt cầu**:

• Cách 1: Nếu (n – 2) đỉnh của đa diện nhìn hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông thì tâm của mặt cầu là trung điểm của đoạn thẳng nối hai đỉnh đó.

• Cách 2: Để xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- Xác định trục Δ của đáy (Δ là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).
- Xác định mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên.
- Giao điểm của (P) và Δ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

VI. Xác định tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp:

- Mặt cầu nội tiếp hình chóp là mặt cầu ở trong hình chóp và tiếp xúc với tất cả mặt bên và mặt đáy của hình chóp đó. Tâm là điểm cách đều tất cả các mặt bên và đáy, bán kính là khoảng cách từ tâm đến một trong các mặt ấy.
- Tứ diện luôn có mặt cầu nội tiếp, các hình chóp khác có thể không có mặt cầu nội tiếp.
- **Cách xác định tâm mặt cầu**: Tâm mặt cầu nội tiếp (nếu có) là giao điểm các mặt phân giác của các nhị diện hợp bởi các mặt bên và đáy.
- Bán kính: $r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$

DIỆN TÍCH – THỂ TÍCH

	Cầu	**Trụ**	**Nón**
Diện tích	$S = 4\pi R^2$	$S_{xq} = 2\pi Rh$ $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$	$S_{xq} = \pi Rl$ $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$
Thể tích	$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$	$V = \pi R^2 h$	$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

HÌNH HỌC TỌA ĐỘ OXY

Vấn đề 1: TỌA ĐỘ PHẲNG

I. Định lý:

Cho $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$

1. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$
2. $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
3. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

II. Tính chất vectơ:

Cho $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

1. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$
2. $k\vec{a} = (ka_1, ka_2)$
3. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$
4. $m\vec{a} \pm n\vec{b} = (ma_1 \pm nb_1; ma_2 \pm nb_2)$
5. $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$
6. $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a} = k.\vec{b} \\ a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \end{array}\right.$
7. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$
8. $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$
9. $\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{AC} = (b_1, b_2)$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$

III. Dạng toán thường gặp:

1. A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$.
2. A, B, C lập thành tam giác $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overrightarrow{AC}$.
3. A,B,C,D là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
4. M trung điểm AB: $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$
5. M chia AB theo tỉ số $k \neq 1$:

$$M\left(\dfrac{x_A - k.x_B}{1-k}; \dfrac{y_A - k.y_B}{1-k}\right)$$

6. Trọng tâm $G: \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$
7. Trực tâm H: Giải hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$
8. E chân phân giác trong: $\dfrac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}} = -\dfrac{AB}{AC}$

   F chân phân giác ngoài: $\dfrac{\overrightarrow{FB}}{\overrightarrow{FC}} = \dfrac{AB}{AC}$
9. Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

   Giải hệ: $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$

Vấn đề 2: ĐƯỜNG THẲNG

I. Phương trình đường thẳng:

1. Phương trình tổng quát Δ: $\begin{cases} \text{qua } M(x_0; y_0) \\ \text{VTPT}: \vec{n} = (A; B) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \Delta:\ A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta:\ Ax + By + C = 0$$

2. Phương trình tham số Δ: $\begin{cases} \text{qua } M(x_0; y_0) \\ \text{VTCP}: \vec{a} = (a_1; a_2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \Delta: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \end{cases} (t \in R)$$

3. Phương trình chính tắc Δ: $\begin{cases} \text{qua } M(x_0; y_0) \\ \text{VTCP}: \vec{a} = (a_1; a_2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \Delta: \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2}$$

II. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

1. $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$
2. $(\Delta_1) // (\Delta_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$
3. $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

III. Vị trí tương đối của hai điểm đối với một đường thẳng:

Cho hai điểm $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ và đường thẳng (d): Ax + By + C = 0, ta có:

❖ M_1 hoặc M_2 nằm trên (d)

$\Leftrightarrow (Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)=0$.

❖ M_1, M_2 nằm khác phía so với (d) $\Leftrightarrow (Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)<0$.

❖ M_1, M_2 nằm cùng phía so với (d)

$\Leftrightarrow (Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)>0$.

IV. Góc của hai đường thẳng:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

V. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Cho $(\Delta): Ax+By+C=0$ và $M(x_0;y_0)$

$$\Rightarrow d\ (M,\Delta) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

VI. Chú ý:

❖ Trục Ox có pttq : $y=0$

❖ Trục Oy có pttq : $x=0$

❖ Đường thẳng song song hoặc trùng với Oy :

$$ax+c=0\ (b=0)$$

❖ Đường thẳng song song hoặc trùng với Ox :

$$by+c=0\ (a=0)$$

❖ Đường thẳng đi qua gốc tọa độ:

$$ax+by=0\ (c=0)$$

❖ Đường thẳng cắt Ox tại $A(a;0)$ và Oy tại $B(0;b)$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a,b\neq 0)$$

❖ Đường thẳng qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k là : $y-y_0=k(x-x_0)$

❖ Đường thẳng d qua điểm $M(x_0;y_0)$ và song song với đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ có phương trình tổng quát là:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

❖ Đường thẳng d qua điểm $M(x_0;y_0)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ có phương trình tổng quát là :

$$b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$$

❖ Cho $(\Delta): Ax+By+C=0$

1. $(d)//(\Delta) \Rightarrow (d): Ax+By+m=0$

2. $(d)\perp(\Delta) \Rightarrow (d): Bx-Ay+m=0$

VII. Dạng toán thường gặp:

Dạng 1 : Tìm hình chiếu của một điểm M trên một đường thẳng d :

Cách 1:

- **Bước 1**: Gọi H là hình chiếu của M trên d suy ra tọa độ của H theo t
- **Bước 2**: Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{MH}$ theo t , tìm VTCP $\vec{u}$ của d
- **Bước 3**: Giải phương trình $\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0$ có t suy ra tọa độ H

Cách 2:

- **Bước 1**: Viết phương trình đường thẳng qua d' qua M và vuông góc với d
- **Bước 2**: Giải hệ : $\begin{cases} d \\ d' \end{cases}$ có tọa độ điểm H

Dạng 2 : Tìm điểm đối xứng của một điểm M qua một đường thẳng d

- **Bước 1**: Tìm hình chiếu H của M trên d
- **Bước 2**: gọi M' là hình điểm đối xứng cửa M qua d thì H là trung điểm của đoạn MM' , dựa vào công thức tọa độ trung điểm suy ra tọa độ M'

Vấn đề 3: ĐƯỜNG TRÒN

I. Phương trình đường tròn:

1. Phương trình chính tắc đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R:

$$\Leftrightarrow (C):\ (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

2. Phương trình tổng quát đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R:

$$\Leftrightarrow (C):\ x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

$$(ĐK: a^2+b^2-c>0) \text{ và } R=\sqrt{a^2+b^2-c}$$

II. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn:

1. Phương trình tiếp tuyến **TẠI** $M(x_0;y_0)$:

$$\Delta: \begin{cases} \text{qua } M(x_0;y_0) \\ \text{VTPT } \overrightarrow{IM}=(x_0-a;y_0-b) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta:\ (x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$

$\Leftrightarrow \Delta:\ x.x_0+y.y_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$

2. Điều kiện tiếp xúc: $d(I,\Delta)=R$

III. Phương trình đường thẳng đi qua 2 tiếp điểm:

Cho $M(x_M;y_M)$ nằm ngoài đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R. Từ M dựng 2 tiếp tuyến tiếp xúc đường tròn tại 2 điểm A, B. Phương trình đường thẳng AB có dạng:

$$(x-a)(x_M-a)+(y-b)(y_M-b)=R^2$$

IV. Phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn:

Bước 1: Xét tiếp tuyến vuông góc với 0x : $x=a+R$ và $x=a-R$. Kiểm tra tiếp tuyến thỏa mãn điều kiện đầu bài?

Bước 2: Xét tiếp tuyến không vuông góc với 0x có dạng: $y=kx+m$. Để tìm k và m: Ta giải hệ lập được từ điều kiện tiếp xúc.

- Nếu (C_1) và (C_2) ngoài nhau: có 4 tiếp tuyến chung.
- Nếu (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài: có 3 tiếp tuyến chung.
- Nếu (C_1) và (C_2) cắt nhau: có 2 tiếp tuyến chung.
- Nếu (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong: có 1 tiếp tuyến chung.
- Nếu (C_1) và (C_2) lồng nhau: không có tiếp tuyến chung.

Vấn đề 4: ELÍP

I. Định nghĩa:

Cho F_1,F_2 cố định và $F_1F_2=2c\ \ (c>0)$

$$M\in(E)\Leftrightarrow MF_1+MF_2=2a\quad (a>c>0)$$

II. Phương trình chính tắc:

$$(E)\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (a,b>0)$$

III. Các tính chất:

1. Tiêu điểm : $F_1(-c;o),\quad F_2(c;o)$.
2. Tiêu cự : $F_1F_2=2c$.
3. Đỉnh trục lớn: $A_1(-a;0),\quad A_2(a;0)$.
4. Đỉnh trục bé : $B_1(0;-b),\quad B_2(0;b)$.
5. Độ dài trục lớn: $A_1A_2=2a$.
6. Độ dài trục bé : $B_1B_2=2b$.
7. Tâm sai : $e=\dfrac{c}{a}<1$.
8. Bán kính qua tiêu điểm : $\begin{cases}MF_1=a+e.x_M\\MF_2=a-e.x_M\end{cases}$
9. Phương trình cạnh hình chữ nhật cơ sở:
$$\begin{cases}x=\pm a\\y=\pm b\end{cases}$$
10. Phương trình đường chuẩn $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$

IV. Phương trình tiếp tuyến của Elip:

1. Phương trình tiếp tuyến **TẠI** $M(x_0;y_0)$:
$$\Delta:\frac{x.x_0}{a^2}+\frac{y.y_0}{b^2}=1\ \ (a,b>0)$$
2. Điều kiện tiếp xúc:

Cho: $(E)\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a,b>0)$ và đường thẳng $(\Delta):Ax+By+C=0$

(Δ) tiếp xúc (E) $\Leftrightarrow A^2a^2+B^2b^2=C^2$

Vấn đề 5: Các dạng toán tam giác

Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết điểm C(a;b) và hai đường thẳng cắt nhau d_1,d_2 không đi qua C lần lượt có phương trình tham số :

$$d_1:\begin{cases}x=x_1+a_1t_1\\y=y_1+b_1t_1\end{cases}\quad\text{và}\quad d_2:\begin{cases}x=x_2+a_2t_2\\y=y_2+b_2t_2\end{cases}$$

Hãy tìm tọa độ các đỉnh A, B trong các trường hợp :

Dạng 1: d_1,d_2 **là hai đường cao**.

Giả sử d_1 là đường cao AM , d_2 là đường cao BN

- Viết phương trình BC: (BC có VTCP là VTPT của d_1 đi qua C)
- Giải hệ $\begin{cases}BC\\d_2\end{cases}\Rightarrow$ tọa độ điểm B

Tương tự :

- Viết phương trình AC (AC có VTCP là VTPT của d_2 và đi qua C)
- Giải hệ $\begin{cases}AC\\d_1\end{cases}$ có tọa độ điểm A

Dạng 2: d_1,d_2 **là hai đường trung tuyến**.

Giả sử d_1: là trung tuyến AM ; d_2 là trung tuyến BN

- $M\in d_1$ suy ra tọa độ M theo t_1
- M là trung điểm CB suy ra tọa độ B theo t_1

- B $\in$ d_2 nên có hệ theo t_1 và t_2 . Giải hệ có t_1 suy ra tọa độ điểm B

Tương tự :

- N$\in d_2$ suy ra tọa độ N theo t_2
- N là trung điểm CA suy ra tọa độ A theo t_2
- A$\in$ d_1 nên có hệ theo t_1 và t_2 . Giải hệ có t_2 suy ra tọa độ điểm A

Chú ý: Có thể giải theo cách khác :

- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ;
- Tìm điểm đối xứng D của C qua G
- Viết phương trình đường thẳng qua d'$_1$ qua D song song với d_2
- Viết phương trình đường thẳng qua d'$_2$ qua D song song với d_1
- Giải hệ $\begin{cases} d'_1 \\ d_1 \end{cases} \Rightarrow$ tọa độ A ;
- Giải hệ $\begin{cases} d'_2 \\ d_2 \end{cases} \Rightarrow$ tọa độ B

<u>Dạng 3</u>: d_1, d_2 **là hai đường phân giác trong của góc A và góc B.**

- Tìm tọa độ điểm C_1 là điểm đối xứng của C qua d_1; $C_1 \in AB$
- Tìm tọa độ điểm C_2 là điểm đối xứng của C qua d_2; $C_2 \in AB$
- Viết phương trình tham số C_1C_2 là phương trình của AB
- Tọa độ của A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} C_1C_2 \\ d_1 \end{cases}$
- Tọa độ của B là nghiệm của hệ : $\begin{cases} C_1C_2 \\ d_2 \end{cases}$

<u>Dạng 4</u>: d_1 là đường cao, d_2 là trung tuyến.

Giả sử d_1: đường cao AM; d_2: trung tuyến BN

- Viết phương trình cạnh CB (như trên)
- Giải hệ $\begin{cases} CB \\ d_2 \end{cases}$ tìm tọa độ điểm B
- Dùng tính chất trung điểm N thuộc BN , N là trung điểm AC và A thuộc AM suy ra tọa độ điểm A

<u>Dạng 5</u>: d_1 **là đường cao ,** d_2 **là phân giác trong.**

Giả sử d_1: đường cao AM; d_2: phân giác trong BN

- Viết phương trình cạnh CB
- Giải hệ $\begin{cases} CB \\ d_2 \end{cases} \Rightarrow$ tọa độ điểm B
- Tìm tọa độ điểm C_2 là điểm đối xứng của C qua d_2 (C_2 thuộc AB)
- Viết phương trình BC_2 (BA)
- Giải hệ $\begin{cases} BA \\ d_1 \end{cases} \Rightarrow$tọa độ điểm A .

<u>Dạng 6</u>: d_1 **là trung tuyến ,** d_2 **là phân giác trong**

Giả sử d_1: đường trung tuyến AM; d_2: phân giác trong BN

- $\begin{cases} M \in d_2 \\ MA = MC \Rightarrow \\ A \in d_1 \end{cases}$ tọa độ điểm B.
- Tìm C_2 là điểm đối xứng của C qua d_2
- Viết phương trình tham số BC_2 (BA)
- Giải hệ $\begin{cases} BA \\ d_1 \end{cases} \Rightarrow$tọa độ điểm A

<u>Nhận xét</u>:

- Học sinh chỉ cần nắm kĩ các dạng 1, 2, 3 thì các dạng khác đơn giản hơn.
- Nếu bài toán có liên quan đến đường cao cần chú ý đến điểm hình chiếu của đỉnh đã biết trên đường cao hoặc VTPT của đường cao hoặc tìm VTCP của cạnh và viết phương trình tham số của cạnh tam giác
- Nếu bài toán có liên quan đến trung tuyến cần lưu ý đến tính chất trung điểm .
- Nếu bài toán có yếu tố đường phân giác trong cần lưu ý đến điểm đối xứng của đỉnh đã biết qua đường phân giác trong đó.

Chú ý: Đề thi đại học thường sử dụng các tính chất đối xứng tâm (điểm), đối xứng trục (đường) – liên quan đến Phép biến hình 11. Ngoài ra sự kết hợp giữa các tính chất của đường tròn và tam giác cũng là dạng toán rất thường gặp.

HÌNH HỌC TỌA ĐỘ OXYZ

Vấn đề 1: TỌA ĐỘ ĐIỂM VÀ VECTƠ

I. Tọa độ của véctơ:

Trong không gian với hệ tọa độ Oyz

1. $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3) \Leftrightarrow \vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$
2. $\vec{i}=(1,0,0)$; $\vec{j}=(0,1,0)$; $\vec{k}=(0,0,1)$
3. Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có :

- $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \\ a_3=b_3 \end{cases}$
- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$
- $k.\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
- $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

II. Tọa độ điểm :

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz

1. $M(x_M;y_M;z_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}+z_M\vec{k}$
2. Cho $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$ ta có:

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

3. Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k $(\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB})$ thì ta có :

$$x_M=\frac{x_A-kx_B}{1-k};\quad y_M=\frac{y_A-ky_B}{1-k};\quad z_M=\frac{z_A-kz_B}{1-k}$$

(Với $k\neq-1$)

➢ Đặc biệt khi M là trung điểm AB (k = – 1) thì ta có:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2};z_M=\frac{z_A+z_B}{2}$$

III. Tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng:

1. Nếu $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ thì:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

2. Vectơ tích có hướng $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ vuông góc vơi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
3. $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$.
4. $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$.
5. $V_{\text{HộpABCDA'B'C'D'}}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$.
6. $V_{\text{Tứdiện ABCD}}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$.

IV. Điều kiện khác:

1. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương:

$$\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}\Leftrightarrow\exists k\in R:\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}$$

2. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc:

$$\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$$

3. Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$
4. A,B,C,D là bốn đỉnh của tứ diện $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.
5. G là trọng tâm của tam giác ABC:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\end{cases}$$

6. G là trọng tâm tứ diện ABCD

$\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C+X_D}{4}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\end{cases}$$

7. G là trọng tâm của tứ diện ABCD:

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}.$$

8. Chiều cao AH kẻ từ đỉnh A của tứ diện ABCD:

$$AH=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}$$

Vấn đề 2: MẶT PHẲNG

I. Phương trình mặt phẳng:

1. Trong không gian Oxyz phương trình dạng

$Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

là phương trình tổng quát của mặt phẳng, trong đó $\vec{n} = (A;B;C)$ là một vectơ pháp tuyến của nó.

2. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (A;B;C)$ làm vectơ pháp tuyến có dạng :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

3. Mặt phẳng (P) đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ làm cặp vectơ chỉ phương thì mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n} = \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

II. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng:

1. Cho hai mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và (Q):$A'x + B'y + C'z + D' = 0$

- (P) cắt (Q) $\Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'$
- (P) // (Q) $\Leftrightarrow A : A' = B : B' = C : C' \neq D : D'$
- (P) ≡ (Q) $\Leftrightarrow A : B : C : D = A' : B' : C' : D'$

2. Cho hai mặt phẳng cắt nhau :

$$\begin{cases} (P): Ax + By + Cz + D = 0 \\ (Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}.$$

Phương trình chùm mặt phẳng xác định bởi (P) và (Q) là:

$$m(Ax + By + Cz + D) + n(A'x + B'y + C'z + D') = 0 \quad (\text{với } m^2 + n^2 \neq 0)$$

III. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng:

Khoảng cách từ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$d(M_0,\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

IV. Góc gĩa hai mặt phẳng:

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng :

$$\begin{cases} (P): Ax + By + Cz + D = 0 \\ (Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}. \text{ Ta có:}$$

$$\cos\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}$$

$$= \frac{|A.A' + B.B' + C.C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \quad \left(0^0 \leq \varphi \leq 90^0\right)$$

$\varphi = 90^0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \Leftrightarrow$ hai mặt phẳng vuông góc nhau.

V. Các dạng bài tập:

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng:

- Tìm VTPT $\vec{n} = (A;B;C)$ và điểm đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$
- Dạng: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Dạng 2: Viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm A, B, C:

- Tính $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$
- Mp (ABC) có VTPT là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ và qua A
- Kết luận.

Dạng 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc BC

Mặt phẳng $(\alpha) \perp$ BC nên có VTPT là BC qua A

Chú ý:

- Trục Ox chứa $\vec{i} = (1;0;0)$
- Trục Oy chứa $\vec{j} = (0;1;0)$
- Trục Oz chứa $\vec{k} = (0;0;1)$

Dạng 4: Viết phương tình mp (β) là mặt phẳng trung trực của AB.

- Mặt phẳng $(\beta) \perp$ AB. Nên có VTPT là AB đi qua I là trung điểm của AB
- Kết luận.

Dạng 5: Viết phương tình mặt phẳng (β) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

- $(\beta)//(\alpha)$. Nên phương trình (β) có dạng:

$$Ax + By + Cz + D' = 0$$

- $M_0 \in (\beta) \Rightarrow D'$
- Kết luận.

Dạng 6: Viết phương trình mp (P) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mp (Q)

- Mặt phẳng (P) có cặp VTCP là: $\overrightarrow{AB}$ và VTPT của (Q) là $\vec{n}_Q$

- Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_Q\right]$ và qua A
- Kết luận.

Dạng 7: Viết phương trình mp (α) đi qua các điểm là hình chiếu của điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ trên các trục toạ độ.

- Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu của điểm M trên Ox, Oy, Oz. Thì $M_1(x_0;0;0)$, $M_2(0;y_0;0)$, $M_3(0;0;x_0)$
- Phương trình mặt phẳng (α) là:

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y} + \frac{z}{z_0} = 1$$

Dạng 8: Viết phương trình mp (α) đi qua điểm M_0 và vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

- (P) có VTPT là $\vec{n}_P$
- (Q) có VTPT là $\vec{n}_Q$
- Mp (α) có VTPT là $\left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right]$ và qua $\mathbf{M_0}$
- Kết luận.

Dạng 9: Tọa độ điểm M' đối xứng của M qua mặt phẳng (α)

- Gọi M' (x'; y'; z') là điểm đối xứng của M qua (α)
- Gọi d là đường thẳng đi qua M và $d \perp (\alpha)$. Nên d có VTCP là $\vec{n}$
- Viết phương trình tham số của d
- Gọi $\{H\} = d \cap (\alpha)$
- Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} (d): \\ (\alpha): \end{cases} \Rightarrow$ Tọa độ điểm H
- Vì H là trung điểm của MM' $\Rightarrow$ Tọa độ điểm M'

Dạng 10: Viết phương trình mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu (S) tại tiếp điểm A.

- Xác định tâm I của mặt cầu (S)
- Mặt phẳng (α): Mp tiếp diện có VTPT : $\overrightarrow{IA}$
- Viết phương trình tổng quát.

Vấn đề 3: ĐƯỜNG THẲNG

I. Phương trình đường thẳng:

1. Phương trình tham số của đường thẳng:

Cho điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ là điểm thuộc đường thẳng Δ và $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ là VTCP của đường thẳng Δ. Phương trình tham số của đường thẳng Δ:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \quad (t \in R) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

2. Phương trình chính tắc của đuờng thẳng:

Cho điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ là điểm thuộc đường thẳng Δ và $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ là VTCP của đường thẳng Δ. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

II. Vị trí tương đối của các đường thẳng và các mặt phẳng:

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

Cho hai đường thẳng (Δ) đi qua M có VTCP $\vec{a}$ và (Δ') đi qua M' có VTCP $\vec{a'}$.

- (Δ) chéo (Δ') $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'} \neq 0$
- (Δ) cắt (Δ') $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'} = 0$ với $\left[\vec{a}, \vec{a'}\right] \neq \vec{0}$
- (Δ) // (Δ') $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}, \vec{a'}] = \vec{0} \\ M \notin \Delta' \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \left[\vec{a}; \vec{a'}\right] = \vec{0} \\ \left[\vec{a}; \overrightarrow{MM'}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$
- (Δ) ≡ (Δ') $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}, \vec{a'}] = \vec{0} \\ M \in \Delta' \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \left[\vec{a}; \vec{a'}\right] = \vec{0} \\ \left[\vec{a}; \overrightarrow{MM'}\right] = \vec{0} \end{cases}$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng:

Cho đường thẳng (Δ) đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ có VTPT $\vec{n} = (A;B;C)$.

- (Δ) cắt (α) $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n} \neq 0$
- (Δ) // (α) $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases}$

- (Δ) nằm trên (α) $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$

III. Khoảng cách:

1. Khoảng cách từ M đến đường thẳng (Δ) đi qua M_0 có VTCP $\vec{a}$.

$$d(M,\Delta) = \frac{\left|[\overrightarrow{M_0M},\vec{a}]\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

2. Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau :

$\Delta: \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0;y_0;z_0) \\ \text{VTCP } \vec{a} \end{cases}$; $\Delta': \begin{cases} \text{qua } M'_0(x'_0;y'_0;z'_0) \\ \text{VTCP } \vec{a}' \end{cases}$

$$d(\Delta,\Delta') = \frac{\left|[\vec{a},\vec{a}'].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|[\vec{a},\vec{a}']\right|}$$

Chú ý :

* Nếu (Δ) và (Δ’) cắt nhau hoặc trùng nhau thì:

d((Δ),(Δ’)) = 0

* Nếu (Δ) và (Δ’) song song thì:

d((Δ),(Δ’)) = d(M , (Δ’)) = d(N , (Δ))

(trong đó M∈ (Δ) và N ∈ (Δ’))

IV. Góc:

1. Góc giữa hai đường thẳng:

$\Delta: \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0;y_0;z_0) \\ \text{VTCP } \vec{a} \end{cases}$; $\Delta': \begin{cases} \text{qua } M'_0(x'_0;y'_0;z'_0) \\ \text{VTCP } \vec{a}' \end{cases}$

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{a},\vec{a}')\right| = \frac{\left|\vec{a}.\vec{a}'\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a}'\right|}$$

$$= \frac{\left|a_1.a'_1 + a_2.a'_2 + a_3.a'_3\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

(Δ) đi qua M_0 có VTCP $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, mp(α) có VTPT $\vec{n} = (A;B;C)$ .Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và mp(α) , ta có:

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{a},\vec{n})\right| = \frac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

V. Dạng toán thường gặp:

Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng Δ :

- Cần biết VTCP $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và điểm $M_0(x_0;y_0;z_0) \in \Delta$
- Viết phương trình tham số theo công thức.
- Viết phương trình chính tắc theo công thức.

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng Δ khi:

$\Delta: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0 \end{cases}$

- Δ có VTCP là : $\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_1 & B_2 \end{vmatrix} \right)$
- Cho z = 0 tìm được điểm M_0.
- Viết phương trình đường thẳng.

Dạng 3: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$

- Mp (α) có VTPT là $\vec{n} = (A;B;C)$
- Đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 và có VTCP là $\vec{n}$
- Viết phương trình đường thẳng.

Dạng 4: Viết phương trình hình chiếu của d trên mặt phẳng (α)

- Gọi d’ là hình chiếu của d trên mp (α)
- Gọi (β) là mặt phẳng chứa d và $(\beta)\perp(\alpha)$
- Nên (β) có cặp VTCP là VTCP của d là $\vec{u}_d$ và $\vec{n}_\alpha$ là VTPT của mặt phẳng (α)
- Mp (β) có VTPT $\vec{n}_\beta = [\vec{u}_d,\vec{n}_\alpha]$ đi qua điểm $M_0 \in d$
- Viết phương trình tổng quát của Mp (β)
- Phương trình đường thẳng d’: $\begin{cases} (\alpha): \\ (\beta): \end{cases}$
- Chuyển về phương trình chính tắc (tham số).

Dạng 5: Viết phương trình đường thẳng d qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với hai đường Δ_1 và Δ_2

- Δ_1 có VTCP $\vec{u}_1$
- Δ_2 có VTCP $\vec{u}_2$
- d vuông góc với Δ_1 và Δ_2. Nên d có VTCP là $\vec{u}_d = [\vec{u}_1,\vec{u}_2]$

Dạng 6: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và cắt cả hai đường Δ_1 và Δ_2.

- Thay toạ độ A vào phương trình Δ_1 và Δ_2 $\Rightarrow A \notin \Delta_1, A \notin \Delta_2$

- Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và chứa Δ_1
- Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua điểm A và chứa Δ_2
- Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$
- Chuyển về phương trình chính tắc (tham số)

<u>Dạng 7</u>: Viết phương trình đường thẳng d $\subset (P)$ cắt cả hai đường Δ_1 và Δ_2.

- Gọi $A = \Delta_1 \cap (P)$
- Gọi $B = \Delta_2 \cap (P)$
- Đường thẳng chính là đường thẳng AB

<u>Dạng 8</u>: Viết phương trình đường thẳng d // d_1 và cắt cả hai đường Δ_1 và Δ_2.

- Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ_1 và (P) // d_1
- Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ_2 và (Q) // d_1
- $d = (P) \cap (Q)$
- Phương trình đường thẳng d $\begin{cases}(P):\\(Q):\end{cases}$

<u>Dạng 9</u>: Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau Δ_1 và Δ_2.

<u>Cách 1:</u>

- Gọi $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ lần lượt là VTCP của Δ_1 và Δ_2
- Gọi $\vec{v} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$
- Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ_1 và có một VTCP là $\vec{v}$. Nên có VTPT là $\vec{n}_P = [\vec{u}_1, \vec{v}]$ $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (P)
- Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ_2 và có một VTCP là $\vec{v}$. Nên có VTPT là $\vec{n}_Q = [\vec{u}_2, \vec{v}]$ $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (Q)
- Phương trình đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 : $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$

<u>Cách 2:</u>

- Chuyển phương trình đường thẳng Δ_1 và Δ_2 về dạng tham số.
- Gọi $M \in \Delta_1$ và $N \in \Delta_2$ (M, N dưới dạng tham số). Tính $\overrightarrow{MN}$.
- Giải hệ: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\vec{u}_1 = 0\\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}_2 = 0\end{cases}$. Tìm được tham số $\Rightarrow$ tìm được tọa độ điểm M, N $\Rightarrow$ viết phương trình MN.

<u>Dạng 10</u>: Viết phương trình đường thẳng d vuông góc (P) và cắt hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2

- Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ_1 và có một **VTCP** là $\vec{n}_P$ (VTPT của (P))
- Gọi (β) là mặt phẳng chứa Δ_2 và có một **VTCP** là $\vec{n}_P$ (VTPT của (P))
- Đường thẳng $d = (\alpha) \cap (\beta)$

<u>Dạng 11</u>: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M_0 vuông góc với đường thẳng Δ_1 và cắt đường thẳng Δ_2

- Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M_0 và vuông góc Δ_1
- Gọi (β) là mặt phẳng đi qua điểm M_0 và chứa Δ_2
- Đường thẳng $d = (\alpha) \cap (\beta)$

<u>Dạng 12</u>: Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) và $d \subset (\alpha), d \perp \Delta$

- Gọi $\{A\} = \Delta \cap (\alpha)$
- Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ. Nên (β) có VTPT là VTCP của Δ
- Đường thẳng $d = (\alpha) \cap (\beta)$

<u>Dạng 13</u>: Tìm tọa độ điểm M' đối xứng của M_0 qua đường thẳng d

- Gọi M’ (x’ ; y’ ; z’)
- Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M_0 và $(P) \perp d$. Nên (P) nhận VTCP của d làm VTPT
- Gọi $\{H\} = d \cap (P)$
- M’ là điểm đối xứng của M_0 qua đường thẳng d. Nên H là trung điểm của đoạn M_0M’

Ta có: $\begin{cases} x_H = \dfrac{x_0 + x'}{2} \\ y_H = \dfrac{y_0 + y'}{2} \\ z_H = \dfrac{z_0 + z'}{2} \end{cases} \Rightarrow$ M'

Dạng 14: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ'

- Gọi $\vec{u}$ và $\overrightarrow{u'}$ lần lượt là VTCP của Δ và Δ'
- Δ đi qua điểm M_0 , $M'_0 \in \Delta'$

$$d(\Delta, \Delta') = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right]\right|}$$

Vấn đề 3: MẶT CẦU

I. Phương trình mặt cầu:

1. Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ bán kính R

$$(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = R^2.$$

2. Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

II. Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt cầu

(S): $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = R^2$

tâm $I(a;b;c)$ bán kính R và mặt phẳng (P):

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

- Nếu d(I,(P)) > R thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.
- Nếu d(I,(P)) = R thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) tiếp xúc nhau. Khi đó (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu (S) và điểm chung gọi là tiếp điểm
- Nếu d(I,(P)) < R thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có phương trình:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Trong đó bán kính đường tròn $r = \sqrt{R^2 - d(I,(P))^2}$ và tâm H của đường tròn là hình chiếu của tâm I mặt cầu (S) lên mặt phẳng (P).

III. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu:

Cho mặt cầu (S): $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ và đường thẳng (d) : $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$

Muốn tìm giao điểm giữa (d) và (S) , ta thay x, y, z trong phương trình (d) vào phương trình (S) ta được một phương trình bậc hai theo t .

- Nếu phương trình theo t vô nghiệm thì (d) và (S) không có điểm chung
- Nếu phương trình theo t có một nghiệm t thì (d) tiếp xúc với (S) . Khi đó (d) gọi là tiếp tuyến của mặt cầu (S) và điểm chung gọi là tiếp điểm .

Nếu phương trình theo t có hai nghiệm phân biệt t_1; t_2 thì (d) cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

IV. Dạng toán thường gặp:

Dạng 1: Viết phương trình mặt cầu

- Xác định tâm I(a ; b ; c) của mặt cầu
- Bán kính R
- Viết phương trình mặt cầu

$$(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = R^2$$

Dạng 2: Viết phương trình mặt cầu đường kính AB

- Gọi I là trung điểm của AB. Tính toạ độ I $\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu
- Bán kính $R = \frac{1}{2}AB$
- Viết phương trình mặt cầu

Dạng 3: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I (a; b; c) và tiếp xúc với (α):

Ax + By + Cz + D = 0

- Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (α). Nên có bán kính
- $R = d(I,(\alpha)) = \dfrac{|Ax_I + By_I + Cz_I + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- Viết phương trình mặt cầu

Dạng 4: Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD

- Phương trình mặt cầu (S) có dạng
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$$
- A, B, C, D thuộc (S). Ta có hệ phương trình
- Giải hệ phương trình tìm A, B, C, D
- Kết luận

Dạng 5: Lập phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy

- Gọi $I(x_I ; y_I ; 0)$ là tâm của mặt cầu, $I \in (Oxy)$
- Ta có $AI^2 = BI^2 = CI^2$
- Ta có hệ phương trình $\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases}$
- Giải hệ phương trình $\Rightarrow$ tâm I $\Rightarrow$ IA = R
- Kết luận

Vấn đề 5: Các dạng toán tam giác

Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC biết điểm C(a;b;c) và hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 không đi qua C lần lượt có phương trình tham số :

$$d_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1t_1 \\ y = y_1 + b_1t_1 \\ z = z_1 + c_1t_1 \end{cases} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2t_2 \\ y = y_2 + b_2t_2 \\ z = z_2 + c_2t_2 \end{cases}$$

Hãy tìm tọa độ các đỉnh A, B trong các trường hợp :

- d_1, d_2 là hai đường cao của tam giác .
- d_1, d_2 là hai đường trung tuyến của tam giác.
- d_1, d_2 là hai đường phân giác trong góc A , B
- d_1 là đường cao, d_2 là trung tuyến của tam giác
- d_1 là đường cao, d_2 là phân giác trong của tam giác
- d_1 là trung tuyến, d_2 là phân giác trong của tam giác

➢ **Phương pháp**: Tương tự như trong hình học phẳng.

Chú ý: Hình học giải tích không gian đề thi đại học thường tập trung vào các dạng toán thường gặp của phương trình đường thẳng, các dạng toán khoảng cách, điểm đối xứng nên học sinh cần nắm kĩ (vì hình học giải tích trong Oxy đề thi đã khai thác yếu tố tam giác)

Vấn đề 6: Ứng dụng hình học giải tích giải các bài hình học thuần.

Cơ sở lý luận:

Như ta đã biết trong với công cụ giải tích ta có thể tính được diện tích một đa giác, thể tích một khối đa diện, khoảng cách giữa hai mặt phẳng, giữa hai đường thẳng, góc giữa hai mặt phẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai đường thẳng…

Vì vậy giải bài toán thuần túy hình học có thể đưa về một bài toán hình học giải tích nếu ta xây dựng một **hệ trục Oxyz hợp lý**.

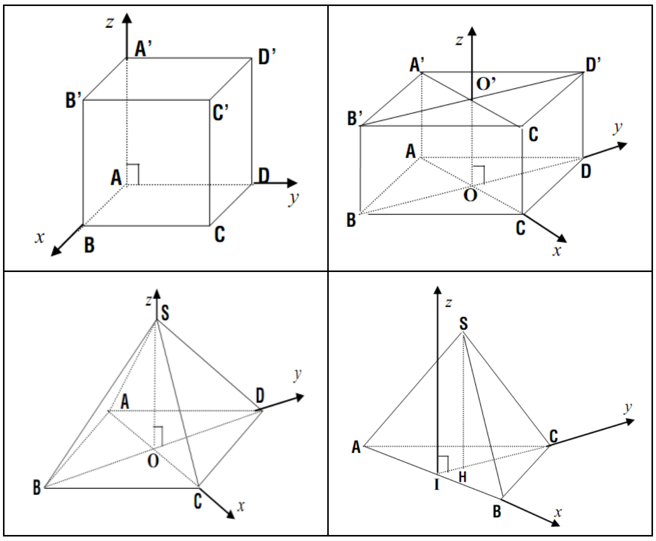
Nhận xét:

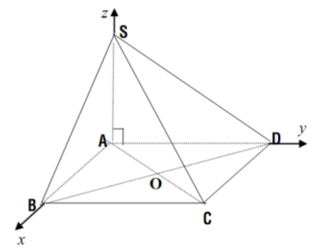
- Ưu: Giải bài toán chỉ đơn thuần là tính toán, không suy nghĩ nhiều.

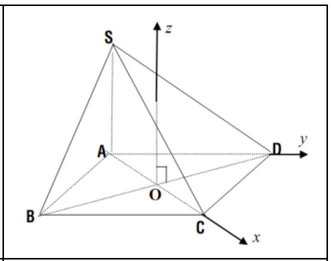
- Khuyết: Không thấy được cái hay của hình học thuần túy, tính toán phải hết sức cẩn thận.

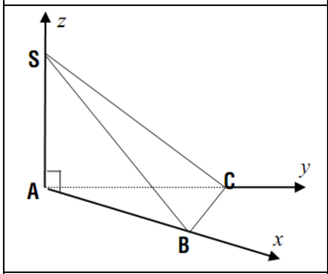
Một số cách chọn hệ trục Oxyz thường dùng:

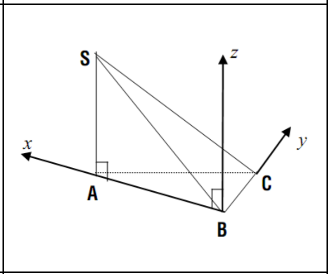
1. Với hình lập phương hoặc hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'
2. Với hình hộp đáy là hình thoi ABCD.A'B'C'D'
3. Với hình chóp tứ giác đều S.ABCD
4. Với hình chóp tam giác đều S.ABC
5. Với hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật và SA $\perp$ (ABCD)
6. Với hình chóp S.ABC có ABCD là hình thoi và SA $\perp$ (ABCD)
7. Với hình chóp S.ABC có SA $\perp$ (ABC) và ΔABC vuông tại A.
8. Với hình chóp S.ABC có SA $\perp$ (ABC) và ΔABC vuông tại B.
9. Với hình chóp S.ABC có (SAB) $\perp$ (ABC), ΔSAB cân tại S và ΔABC vuông tại C
10. Với hình chóp S.ABC có (SAB) $\perp$ (ABC), ΔSAB cân tại S và ΔABC vuông tại A
11. Với hình chóp S.ABC có (SAB) $\perp$ (ABC), ΔSAB cân tại S và ΔABC vuông cân tại C

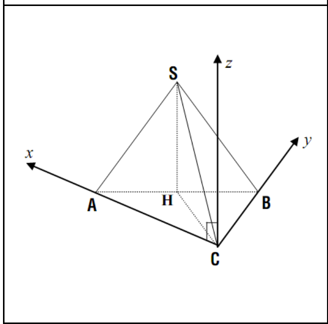


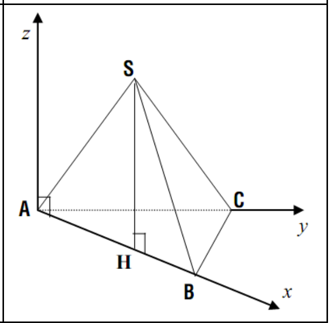


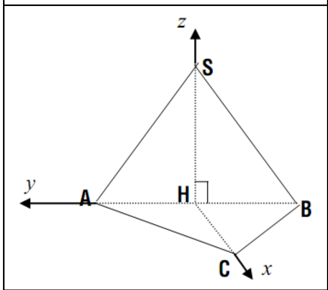












Một cách tổng quát: Chọn trước hệ trục Oxy nằm trong mặt phẳng đáy dựa trên các tính chất vuông góc (O nằm ở góc vuông). Sau đó dựng tia Oz vuông góc với Oxy tại O.

SỐ PHỨC

Vấn đề 1: CÁC ĐỊNH NGHĨA – TÍNH CHẤT.

I. Khái niệm số phức

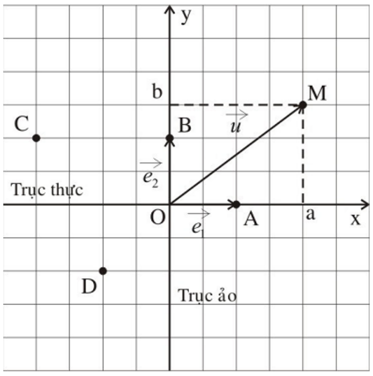
- Tập hợp số phức: C
- Số phức (dạng đại số) : $z = a + bi$

($a, b \in R$, a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$)

- z là số thực ⇔ phần ảo của z bằng 0 (b = 0)
- z là thuần ảo ⇔ phần thực của z bằng 0 (a = 0)
- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.
- Hai số phức bằng nhau:

$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \quad (a, b, a', b' \in R)$$

2. Biểu diễn hình học: Số phức z = a + bi ($a, b \in R$) được biểu diễn bởi điểm M(a; b) hay bởi $\vec{u} = (a; b)$ trong mp(Oxy) (mp phức)



3. Cộng và trừ số phức:

- $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$
- $(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$
- Số đối của z = a + bi là –z = –a – bi
- $\vec{u}$ biểu diễn z, $\vec{u}'$ biểu diễn z' thì $\vec{u} + \vec{u}'$ biểu diễn z + z’ và $\vec{u} - \vec{u}'$ biểu diễn z – z’.

4. Nhân hai số phức:

- $(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$
- $k(a + bi) = ka + kbi \ (k \in R)$

5. Số phức liên hợp của số phức z = a + bi là $\bar{z} = a - bi$

- $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'$;

- $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- $z.\overline{z} = a^2 + b^2$
- z là số thực $\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$;
  z là số ảo $\Leftrightarrow$ $z = -\overline{z}$

6. Môđun của số phức: z = a + bi

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}} = |\overrightarrow{OM}|$
- $|z| \ge 0, \forall z \in C$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $||z| - |z'|| \le |z \pm z'| \le |z| + |z'|$

7. Chia hai số phức:

- $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$ $(z \ne 0)$
- $\frac{z'}{z} = z'z^{-1} = \frac{z'.\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z'.\overline{z}}{z.\overline{z}}$
- $\frac{z'}{z} = w \Leftrightarrow z' = wz$

8. Căn bậc hai của số phức:

- $z = x + yi$ là căn bậc hai của số phức $w = a + bi \Leftrightarrow z^2 = w \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$
- w = 0 có đúng 1 căn bậc hai là z = 0
- $w \ne 0$ có đúng hai căn bậc hai đối nhau
- Hai căn bậc hai của a > 0 là $\pm\sqrt{a}$
- Hai căn bậc hai của a < 0 là $\pm\sqrt{-a}.i$

9. Phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (*)
(A, B, C là các số phức cho trước, $A \ne 0$).

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

- $\Delta \ne 0$: (*) có hai nghiệm phân biệt $z_{1,2} = \frac{-B \pm \delta}{2A}$, ($\delta$ là 1 căn bậc hai của Δ)
- $\Delta = 0$: (*) có 1 nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$

Chú ý: Nếu $z_0 \in C$ là một nghiệm của (*) thì $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của (*).

10. Dạng lượng giác của số phức:

- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (r > 0) là dạng lượng giác của z = a + bi $(z \ne 0) \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\varphi = \frac{a}{r} \\ \sin\varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$
- φ là một acgumen của z, $\varphi = (Ox, OM)$
- $|z| = 1 \Leftrightarrow z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $(\varphi \in R)$

11. Nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$

- $z.z' = rr'.[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')]$

12. Công thức Moa–vrơ:

- $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $(n \in N^*)$
- $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

13. Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác:

- Số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (r > 0) có hai căn bậc hai là:

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \text{ hoặc } -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right]$$

- **Mở rộng:** Số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (r > 0) có n căn bậc n là:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right), \ k = 0, 1, ..., n-1$$

Vấn đề 2: CÁC DẠNG TOÁN

I. Thực hiện các phép toán cộng trừ, nhân chia số phức.

– Áp dụng các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia hai số phức, căn bậc hai của số phức.

– Chú ý các tính chất giao hoán, kết hợp đối với các phép toán cộng và nhân.

II. Giải phương trình - hệ phương trình số phức:

- Giả sử z = x + yi. Giải các phương trình ẩn z là tìm x, y thoả mãn phương trình.

- Giải phương trình bậc hai trong tập số phức, kết hợp với định lý Vi-et.

- Chú ý: $|\ |$ là độ lớn của một số phức chứ không phải là trị tuyệt đối. (trị tuyệt đối là trường hợp riêng của độ lớn được định nghĩa trên trục số thực).

III. Tập hợp điểm.

- Giả sử số phức z = x + yi được biểu diễn điểm M(x; y). Tìm tập hợp các điểm M là tìm hệ thức giữa x và y.
- Chú ý: Các dạng phương trình đường thẳng, đường tròn, conic.

IV. Dạng lượng giác.

- Áp dụng như các công thức đã nêu.

Chú ý: Việc kết hợp khai triển nhị thức Newton trong tập số phức để chứng minh các đẳng thức cũng hay được sử dụng.

ĐẠI SỐ TỔ HỢP – XÁC SUẤT

Vấn đề 1: HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

V. Quy tắc đếm, cộng và nhân:

1. Quy tắc đếm:

a. Quy tắc:

Với điều kiện là khoảng cách giữa các số bằng nhau (cách đều), ta có:

$$\text{số các số} = \frac{\text{số lớn nhất} - \text{số nhỏ nhất}}{\text{khoảng cách giữa 2 số liền kề}} + 1.$$

b. Các dấu hiệu chia hết:

– Chia hết cho 2: số có chữ số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8.

– Chia hết cho 3: số có tổng các chữ số chia hết cho 3.

– Chia hết cho 4: số có 2 chữ số tận cùng lập thành số chia hết cho 4.

– Chia hết cho 5: số có chữ số tận cùng là 0, 5.

– Chia hết cho 6: số chia hết cho 2 và 3.

– Chia hết cho 8: số có 3 chữ số tận cùng lập thành số chia hết cho 8.

– Chia hết cho 9: số có tổng các chữ số chia hết cho 9.

– Chia hết cho 10: số có chữ số tận cùng là 0.

– Chia hết cho 11: số có hiệu của tổng các chữ số ở hàng lẻ và tổng các chữ số ở hàng chẵn chia hết cho 11 (VD: 1345729 vì (1+4+7+9) – (3+5+2) = 11).

– Chia hết cho 25: số có 2 chữ số tận cùng là 00, 25, 50, 75.

2. Quy tắc cộng:

1) Nếu một quá trình (bài toán) có thể thực hiện được một trong hai cách (trường hợp) loại trừ lẫn nhau: cách thứ nhất cho m kết quả và cách thứ hai cho n kết quả. Khi đó việc thực hiện quá trình trên cho m + n kết quả.

2) Nếu một quá trình (bài toán) có thể thực hiện được k cách (trường hợp) loại trừ lẫn nhau: cách thứ nhất cho m_1 kết quả, cách thứ hai cho m_2 kết quả, …, cách thứ k cho m_k kết quả. Khi đó việc thực hiện quá trình trên cho $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ kết quả.

3. Quy tắc nhân:

1) Nếu một quá trình (bài toán) được thực hiện theo hai giai đoạn (bước) liên tiếp nhau sao cho có m cách thực hiện giai đoạn thứ nhất, đồng thời ứng với mỗi cách đó có n cách để thực hiện giai đoạn thứ hai. Khi đó có mn cách thực hiện quá trình trên.

2) Nếu một quá trình (bài toán) được thực hiện theo k giai đoạn (bước) liên tiếp nhau sao cho có m_1 cách thực hiện giai đoạn thứ nhất, với mỗi cách đó có m_2 cách để thực hiện giai đoạn thứ hai, …, có m_k cách thực hiện giai đoạn thứ k. Khi đó, toàn bộ quá trình có $m_1.m_2…m_k$ cách thực hiện.

VI. Hoán vị – Chỉnh hợp – Tổ hợp:

1. Hoán vị:

Định nghĩa. Cho tập hợp X gồm n phần tử phân biệt $(n \ge 0)$. Mỗi cách sắp xếp n phần tử của X theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử. Số các hoán vị của n phần tử được ký hiệu là P_n.

$$\boxed{P_n = n! = 1.2…n}$$

2. Chỉnh hợp:

Định nghĩa. Cho tập hợp X gồm n phần tử phân biệt $(n \ge 0)$. Mỗi cách chọn ra k $(0 \le k \le n)$ phần tử của X và sắp xếp theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là A_n^k.

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

3. Tổ hợp:

Định nghĩa. Cho tập hợp X gồm n phần tử phân biệt $(n \ge 0)$. Mỗi cách chọn ra k $(0 \le k \le n)$ phần tử của X được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử. Số các tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là C_n^k.

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Nhận xét:

1) Điều kiện để xảy ra hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp là n phần tử phải phân biệt.

2) Chỉnh hợp và tổ hợp khác nhau ở chỗ là sau khi chọn ra k trong n phần tử thì chỉnh hợp có sắp thứ tự còn tổ hợp thì không.

VII. Phương pháp giải toán đếm:

1. Phương pháp 1.

Bước 1. Đọc kỹ các yêu cầu và số liệu của đề bài. Phân bài toán ra các trường hợp, trong mỗi trường hợp lại phân thành các giai đoạn.

Bước 2. Tùy từng giai đoạn cụ thể và giả thiết bài toán để sử dụng quy tắc cộng, nhân, hoán vị, chỉnh hợp hay tổ hợp.

Bước 3. Đáp án là tổng kết quả của các trường hợp trên.

2. Phương pháp 2.

Đối với nhiều bài toán, phương pháp 1 rất dài. Do đó ta sử dụng phương pháp loại trừ (phần bù) theo phép toán $A \cup \overline{A} = X \Rightarrow A = X \setminus \overline{A}$.

Bước 1: Chia yêu cầu của đề thành 2 phần là yêu cầu chung X (tổng quát) gọi là **loại 1** và yêu cầu riêng A. Xét $\overline{A}$ là phủ định của A, nghĩa là không thỏa yêu cầu riêng gọi là **loại 2**.

Bước 2: Tính số cách chọn loại 1 và loại 2.

Bước 3: Đáp án là số cách chọn loại 1 trừ số cách chọn loại 2.

Chú ý:

1) Cách phân loại 1 và loại 2 có tính tương đối, phụ thuộc vào chủ quan của người giải.

2) Giải bằng phương pháp phần bù có ưu điểm là ngắn tuy nhiên nhược điểm là thường sai sót khi tính số lượng từng loại.

3*) Thường thì ta xử lý các điều kiện trước, hoặc đơn giản các điều kiện rồi giải quyết bài toán.

VIII. Phương pháp phương trình, bất phương trình, hệ đại số tổ hợp:

Bước 1: Đặt điều kiện cho bài toán.

- P_x có điều kiện là $x \in \mathbb{N}$
- A_n^k, C_n^k có điều kiện là $k, n \in \mathbb{N}$ và $0 \le k \le n$

Bước 2: Áp dụng công thức tính để đưa bài toán về các phương trình, hệ phương trình quen thuộc.

Bước 3: Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình rồi so điều kiện chọn nghiệm.

Chú ý: Do tính đặc biệc của nghiệm là số tự nhiên nên đôi khi một số bài ta phải nhẩm nghiệm, còn đối với những bài bất phương trình đôi khi ta cũng cần liệt kê các nghiệm.

Vấn đề 2: NHỊ THỨC NEWTON

I. Định nghĩa:

Nhị thức Newton là khai triển tổng lũy thừa có dạng:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$$

- Số hạng thứ k+1 là $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}b^k$ thường được gọi là số hạng tổng quát.
- Các hệ số C_n^k được tính theo công thức tổ hợp chập hoặc dựa vào tam giác Pascal sau:

Tính chất

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$

2) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ $(1 \le k \le n)$.

II. Phương pháp giải toán:

1. Dạng khai triển:

➢ **Dấu hiệu nhận biết:** Các hệ số đứng trước tổ hợp và lũy thừa là 1 hoặc 1 và – 1 xen kẽ nhau.

- Khai triển $(a+b)^n$ hoặc $(a-b)^n$.
- Cộng hoặc trừ hai vế của 2 khai triển trên.

2. Dạng đạo hàm:

a. Đạo hàm cấp 1:

➢ **Dấu hiệu nhận biết:** Các hệ số đứng trước tổ hợp và lũy thừa tăng dần từ 1 đến n (hoặc giảm dần từ n đến 1).

- Xét khai triển (1):

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n$$

- Đạo hàm 2 vế của (1).
- Thay số thích hợp vào (1) sau khi đạo hàm.

b. Đạo hàm cấp 2:

➢ **Dấu hiệu nhận biết:** Các hệ số đứng trước tổ hợp và lũy thừa tăng (giảm) dần từ 1.2 đến (n–1).n hoặc tăng (giảm) dần từ 1^2 đến n^2.

- Xét khai triển (1):

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$$

- Đạo hàm 2 vế của (1) ta được (2):

$$C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \ldots + nC_n^n x^{n-1} = n(1+x)^{n-1}$$

- Tiếp tục đạo hàm 2 vế của (2) ta được (3):

$$1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 x + 3.4C_n^4 x^2 + \ldots + (n-1)nC_n^n x^{n-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$

- Nhân x vào 2 vế của (2) ta được (4):

$$C_n^1 x + 2C_n^2 x^2 + 3C_n^3 x^3 + \ldots + nC_n^n x^n = nx(1+x)^{n-1}.$$

- Đạo hàm 2 vế của (4) ta được (5):

$$1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 x + 3^2 C_n^3 x^2 + \ldots + n^2 C_n^n x^{n-1} = n(1+nx)(1+x)^{n-2}$$

3. Dạng tích phân:

➢ **Dấu hiệu nhận biết:** Các hệ số đứng trước tổ hợp (và lũy thừa) là phân số giảm dần từ 1 đến $\frac{1}{n+1}$ hoặc tăng dần từ $\frac{1}{n+1}$ đến 1.

- Xét khai triển (1):

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$$

- Lấy tích phân 2 vế của (1) từ a đến b ta được:

$$\int_a^b (1+x)^n dx = C_n^0 \int_a^b dx + C_n^1 \int_a^b x dx + \ldots + C_n^n \int_a^b x^n dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = C_n^0 \left.\frac{x}{1}\right|_a^b + C_n^1 \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b + \ldots + C_n^n \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1} C_n^0 + \frac{b^2-a^2}{2} C_n^1 + \ldots + \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} C_n^n = \frac{(1+b)^{n+1}-(1+a)^{n+1}}{n+1}.$$

Chú ý: Trong thực hành, ta dễ dàng nhận biết giá trị của n. Để nhận biết 2 cận a và b ta nhìn vào số hạng $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} C_n^n$.

4. Tìm số hạng trong khai triển nhị thức Newton:

a. Dạng tìm số hạng thứ k:

- Số hạng thứ k trong khai triển $(a+b)^n$ là $C_n^{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$.

b. Dạng tìm số hạng chứa x^m:

- Số hạng tổng quát trong khai triển $(a+b)^n$ là $C_n^k a^{n-k} b^k = M(k).x^{f(k)}$ (a, b chứa x).

- Giải phương trình $f(k)=m \Rightarrow k_0$, số hạng cần tìm là $C_n^{k_0}a^{n-k_0}b^{k_0}$ và hệ số của số hạng chứa x^m là $M(k_0)$.

Chú ý: Số hạng không chứa x thì m = 0

c. Dạng tìm số hạng hữu tỉ:

- Số hạng tổng quát trong khai triển $(a+b)^n$ là $C_n^k a^{n-k}b^k = C_n^k.\alpha^{\frac{m}{p}}.\beta^{\frac{r}{q}}$ (α, β là hữu tỉ).
- Giải hệ $\begin{cases} \frac{m}{p} \in \mathbb{N} \\ \frac{r}{q} \in \mathbb{N} \end{cases}$ $(k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n) \Rightarrow k_0$.
- Số hạng cần tìm là $C_n^{k_0}a^{n-k_0}b^{k_0}$.

d. Dạng tìm hệ số lớn nhất trong khai triển Newton:

- Xét khai triển $(a+bx)^n$ có số hạng tổng quát là $C_n^k a^{n-k}b^k x^k$.
- Đặt $u_k = C_n^k a^{n-k}b^k$, $0 \le k \le n$ ta có dãy hệ số là $\{u_k\}$.
- Để tìm số hạng lớn nhất của dãy ta giải hệ bất phương trình $\begin{cases} u_k \ge u_{k+1} \\ u_k \ge u_{k-1} \end{cases} \Rightarrow k_0$.
- Hệ số lớn nhất là $C_n^{k_0}a^{n-k_0}b^{k_0}$.

Vấn đề 3: XÁC XUẤT

I. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

1. Phép thử ngẫu nhiên:

a. Khái niệm: Phép thử ngẫu nhiên (phép thử) là một thí nghiệm hay hành động mà:

- Kết quả của nó không đoán trước được .

- Có thể xác định được tập hợp các kết quả có thể sảy ra của phép thử đó.

b. Kí hiệu:

Phép thử ngẫu nhiên hay kí hiệu là : **T**

2. Không gian mẫu của phép thử:

a. Khái niệm : Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép phép thử gọi là không gian mẫu của phép thử đó

b. Kí hiệu

Không gian mẫu được kí hiệu là : $\mathbf{\Omega}$

3. Biến cố của phép thử:

a. Khái niệm: Cho phép thử T

- Biến cố A liên quan đến phép thử T là một sự kiện mà việc xảy ra hay không xảy ra của A phụ thuộc vào kết quả của phép thử T .

- Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra gọi là một kết quả thuận lợi cho A . Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A kí hiệu là : $\mathbf{\Omega}_A$. Khi đó ta nói biến cố A được mô tả bởi tập $\mathbf{\Omega}_A$.

b. Chú ý:

- Biến cố của một phép thử ta hay kí hiệu là : A , B , C , D … hoặc A_1 , A_2 , …

- Ta luôn có : $\mathbf{\Omega}_A \subset \mathbf{\Omega}$

- **Biến cố chắc chắn** là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập $\mathbf{\Omega}$ là không gian mẫu của phép thử T.

- **Biến cố không thể** là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử T . Biến cố không thể được mô tả bởi tập **rỗng** $\varnothing$.

II. Xác suất của biến cố

1. Định nghĩa:

- Cho phép thử T với không gian mẫu $\mathbf{\Omega}$ là một tập hữu hạn phần tử và các kết quả của phép thử T là đồng khả năng .

- Gọi A là một biến cố liên quan đến phép thử T và $\mathbf{\Omega}_A$ là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A .

- Khi đó **xác suất** của A là một **số** , kí hiệu P(A) , được xác định bởi công thức :

$$P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$$

Trong đó

+ $|\mathbf{\Omega}_A|$ là số phần tử của $\mathbf{\Omega}_A$.

+ $|\mathbf{\Omega}|$ là số phần tử của $\mathbf{\Omega}$.

Vậy để tính xác suất của biến cố A của phép thử T ta làm theo các bước sau :

- Xác định không gian mẫu $\mathbf{\Omega}$ và đếm số phần tử của nó (số kết quả có thể xảy ra của phép thử T).

- Xác định số kết quả thuận lợi cho A (là số phần tử của $\mathbf{\Omega}_A$).

- Áp dụng công thức.

2. Chú ý:

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(\mathbf{\Omega}) = 1$, $P(\varnothing) = 0$
- Xác suất là một số dương nhỏ hơn 1, xác suất của biến cố chắc chắn bằng 1, xác suất của biến cố không thể bằng 0.

III. Biến cố đối

1. **Định nghĩa**

Cho A là một biến cố . Khi đó biến cố “ không xảy ra A ”, kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là biến cố **đối** của A.

2. **Nhận xét**:

- Gọi $\boldsymbol{\Omega}$ là không gian mẫu
- Gọi $\boldsymbol{\Omega}_A$ là tập kết quả thuận lợi cho A

Khi đó tập kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là :

$$\Omega_{\overline{A}} = \Omega \setminus \Omega_A$$

IV. <u>Quy tắc cộng xác suất:</u>

1. **Biến cố hợp:**

Cho hai biến cố A và B. Biến cố “A hoặc B xảy ra” gọi là biến cố hợp của hai biến cố A và B, và kí hiệu là $A \cup B$.

2. **Biến cố xung khắc:**

Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

3. **Quy tắc cộng xác suất:**

Nếu A và B là hai biến cố xung khắc, thì:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

V. <u>Quy tắc nhân xác suất</u>

1. **Biến cố giao**

Cho hai biến cố A và B . Biến cố “Cả A và B cùng xảy ra” gọi là **biến cố giao của hai biến cố** A và B và kí hiệu là : AB.

Vậy AB là biến cố: “Cả A và B cùng xảy ra”

2. **Hai biến cố độc lập**

a. Khái niệm: Hai biến cố A và B gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

b. Nhận xét: Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập với nhau.

3. **Quy tắc nhân xác xuất**

- Nếu A và B là hai biến cố độc lập với nhau thì :

$$\mathbf{P(AB) = P(A).P(B)}$$

- Nếu A_1 ; A_2 ; A_3 là ba biến cố đôi một độc lập với nhau thì :

$$\mathbf{P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)}$$

Chú ý: Học kĩ các công thức kết hợp phương pháp đếm ở phần đại số tổ hợp.

BẤT ĐẲNG THỨC – CỰC TRỊ

Dạng toán này là một dạng toán khó thường nằm câu V trong đề thi đại học. Ở đây xin chỉ nêu ngắn gọn các phương pháp. Bạn có thể xem kĩ hơn trong “Chuyên đề bất đẳng thức – cực trị”.

Vấn đề 1: Các tính chất.

1. $\forall$ a, b $\in$ R có một và chỉ một trong ba quan hệ: a > b, a = b, a < b.
2. $\forall$ a, b, c $\in$ R mà a > b, b > c thì a > c.
3. $\forall$ a, b $\in$ R mà a > b thì a + c > b + c
4. Nếu a > b và c > d thì a + c > b + d.
   (Không được trừ hai bất đẳng thức).
5. Nếu a > b và c > 0 thì ac > bc
   (c < 0 thì ac < bc).
6. Nếu a > b > 0 và c > d > 0 thì ac > bd > 0.
7. Nếu a > b > 0 thì $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ và
   $a^n > b^n > 0$ và $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} > 0$.
8. $A^2 \geq 0$

Vấn đề 2: Bất đẳng thức Cauchy

I. <u>Phát biểu</u>:

- <u>Cho 2 số a, b không âm:</u>

  a + b $\geq$ $2\sqrt{ab}$ hay $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

  Dấu ‘=’ xảy ra khi a = b.

- <u>Cho 3 số a, b, c không âm:</u>

  a + b + c $\geq$ $3\sqrt[3]{abc}$.

  Dấu ‘=’ xảy ra khi a = b = c

- <u>Tổng quát</u>: Cho n số $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ không âm: (trung bình cộng lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân)

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n$

II. <u>Một số lưu ý</u>:

Khi áp dụng các phương pháp còn lại thì “tọa độ điểm rơi” phải luôn được đảm bảo.

Nếu đề bài yêu cầu: Cho a, b, c > 0. Chứng minh... thì ta cũng có thể xét trên miền $a + b + c = 1$, ... (do bất đẳng thức đúng với (a, b, c) thì cũng đúng với (ta, tb, tc)). Cố gắng chọn miền hợp lý để bài toán được đơn giản.

Vấn đề 3: Bất đẳng thức B.C.S

I. Phát biểu:

- Cho 2 cặp số:

$$\left| a_1.b_1 + a_2.b_2 \right| \le \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$$

Dấu '=' xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

(Nếu bỏ dấu | | thì cần thêm điều kiện ≥ 0)

- Cho 3 cặp số:

$$\left| a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3b_3 \right| \le \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}$$

Dấu '=' xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

(Nếu bỏ dấu | | thì cần thêm điều kiện ≥ 0)

- Cho n cặp số:

$$\left| a_1.b_1 + ... + a_nb_n \right| \le \sqrt{(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)}$$

Dấu '=' xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

(Nếu bỏ dấu | | thì cần thêm điều kiện ≥ 0)

Hệ quả: Cho các số không âm:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

II. Một số lưu ý:

Dùng nhập các tổng bình phương thành một.

Hệ quả B.C.S cho phép chúng ta gộp mẫu.

Chú ý: các kĩ thuật thêm bớt.

Vấn đề 4: Bất đẳng thức Vectơ

I. Phát biểu:

Sử dụng quy tắc ba điểm và bất đẳng thức trong tam giác, chú ý trường hợp bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Các bất đẳng thức:

- $\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a}.\vec{b}\right|$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương
- $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng
- $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| \le \left\|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right\|$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng
- $\left|\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + ... + \overrightarrow{a_n}\right| \le \left|\overrightarrow{a_1}\right| + \left|\overrightarrow{a_2}\right| + ... + \left|\overrightarrow{a_n}\right|$. Đẳng thức xảy ra khi $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_1}, .., \overrightarrow{a_n}$ cùng hướng.

Trong Oxy: $\vec{a} = (a_1, a_2); \vec{b} = (b_1, b_2)$

Trong Oxyz: $\vec{a} = (a_1, a_2; a_3); \vec{b} = (b_1, b_2; b_3)$

II. Một số lưu ý:

Chọn các điểm có tọa độ thích hợp.

Thường dùng để đưa nhiều căn thức bậc hai về một căn thức bậc hai.

Vấn đề 5: Dùng điều kiện có nghiệm của hệ tìm max, min

Bài toán:

Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $G(x, y) = 0$ (hoặc $G(x, y) \ge 0; G(x, y) \le 0$). Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất (nếu có) của $P = F(x, y)$

Cách giải:

Đặt F(x,y) = m. Ta có hệ:

$\begin{cases} G(x, y) = 0 \\ F(x, y) = m \end{cases}$ (hoặc $\begin{cases} G(x, y) \ge 0 \\ F(x, y) = m \end{cases}$; $\begin{cases} G(x, y) \le 0 \\ F(x, y) = m \end{cases}$

Biện luận m để hệ trên có nghiệm. Từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P.

Lưu ý: Các phương pháp giải hệ phương trình, hệ bất phương trình.

Vấn đề 6: Công cụ đạo hàm

I. Chứng minh bất đẳng thức:

Phương pháp:

- Chuyển bất đẳng thức về dạng f(x) > 0 (hoặc <, ≥, ≤). Xét hàm số y = f(x) trên tập xác định do đề bài chỉ định.
- Xét dấu f′ (x). Suy ra hàm số đồng biến hay nghịch biến.
- Dựa vào định nghĩa sự đồng biến, nghịch biến để kết luận.

Chú ý:

1. Trong trường hợp ta chưa xét được dấu của f′ (x) thì ta đặt h(x) = f′ (x) và quay lại tiếp tục xét dấu h′ (x) … cho đến khi nào xét dấu được thì thôi.

2. Nếu bất đẳng thức có hai biến thì ta đưa bất đẳng thức về dạng: f(a) < f(b). Xét tính đơn điệu của hàm số f(x) trong khoảng (a; b).

II. Giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất:

Phương pháp:

Cách 1: Thường dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng.

- Tính f′ (x).
- Xét dấu f′ (x) và lập bảng biến thiên.
- Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

Cách 2: Thường dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số **liên tục trên một đoạn** [a; b].

- Tính f′ (x).
- Giải phương trình f′ (x) = 0 tìm được các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trên [a; b] (nếu có).
- Tính $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$.
- So sánh các giá trị vừa tính và kết luận.

$$M = \max_{[a;b]} f(x) = \max\left\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)\right\}$$

$$m = \min_{[a;b]} f(x) = \min\left\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)\right\}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Khảo sát hàm số ....Trần Sĩ Tùng
2. Phương trình, hệ đại số.............Trần Phương
3. Và tài liệu của các Thầy Cô trên trang web:
   - www.mathvn.com
   - www.boxmath.vn
   - www.violet.vn

Trong quá trình tổng hợp, biên soạn các kiến thức không tránh khỏi sai sót, mong Thầy Cô và các bạn nhận xét, góp ý.

Xin chân thành cảm ơn.

Cao Hoàng Nam
Email: caohoangnamvn@gmail.com
Điện thoại: 0907894460

**** Như một món quà thay cho lời cảm ơn đến "đoàn thỉnh kinh", "gia đình nhóm TN" của ToánA(06 -10) ĐHSP. Cảm ơn mọi người đã đồng hành cùng tôi suốt chặng đường Đại học, cho nhau bao tiếng cười và niềm vui.*

MỘT SỐ ĐỀ THI ĐẠI HỌC

KHỐI A – 2010

Câu I:

Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ (1), m là số thực

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$

Câu II:

1. Giải phương trình:

$$\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$$

2. Giải bất phương trình :

$$\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \ge 1$$

Câu III:

Tính tích phân : $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2e^x}{1+2e^x}dx$

Câu IV:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SH = $a\sqrt{3}$.

1. Tính thể tích khối chóp S.CDNM.

2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Câu V:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases} \quad (x, y \in R).$$

Câu VI (A): (Chương trình chuẩn)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng d_1: $\sqrt{3}x + y = 0$ và d_2: $\sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác

ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

2. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x-2y+z=0$. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến (P), biết MC = $\sqrt{6}$.

Câu VII (A):

Tìm phần ảo của số phức z, biết:

$$\bar{z}=(\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i)$$

Câu VI (B): (Chương trình nâng cao)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(6; 6), đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết điểm E(1; −3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

2. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho BC = 8.

Câu VII (B):

Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\bar{z}+iz$.

KHỐI B – 2010

Câu I:

Cho hàm số y = $\frac{2x+1}{x+1}$ (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2. Tìm m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (O là gốc tọa độ).

Câu II:

1. Giải phương trình:

$$(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$$

2. Giải phương trình:

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0 \quad (x\in R).$$

Câu III:

Tính tích phân I = $\int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}dx$

Câu IV:

Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

Câu V:

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn: $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+3\left(ab+bc+ca\right)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Câu VI (A): (Chương trình chuẩn)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có đỉnh C(-4; 1), phân giác trong góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

2. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm A (1; 0; 0), B (0; b; 0), C (0; 0; c), trong đó b, c dương và mặt phẳng (P): y – z + 1 = 0. Xác định b và c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

Câu VII (A):

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $|z-i|=|(1+i)z|$.

Câu VI (B): (Chương trình nâng cao)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm A(2; $\sqrt{3}$) và elip (E): $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

2. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM.

Câu VII (B):

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\log_2(3y-1)=x\\ 4^x+2^x=3y^2\end{cases} \quad (x, y \in R)$$

KHỐI D – 2010

Câu I:

Cho hàm số $y=-x^4-x^2+6$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{6}x-1$

Câu II:

1. Giải phương trình:

$$\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0$$

2. Giải phương trình:

$$4^{2x+\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=4^{2+\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4} \quad (x\in R)$$

Câu III:

Tính tích phân $I=\int_1^e\left(2x-\frac{3}{x}\right)\ln x\,dx$

Câu IV:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = a; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, $AH=\frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC . Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Câu V:

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}$$

Câu VI (A): (Chương trình chuẩn)

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh A (3;-7), trực tâm là H (3;-1), tâm đường tròn ngoại tiếp là I (-2;0). Xác định toạ độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

2. Trong không gian toạ độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): x + y + z – 3 = 0 và (Q): x – y + z – 1 = 0. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

Câu VII (A):

Tìm số phức z thoả mãn $|z|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

Câu VI (B): (Chương trình nâng cao)

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho điểm A(0;2) và Δ là đường t hẳng đi qua O . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH.

2. Trong không gian toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng Δ_1: $\begin{cases}x=3+t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$ và Δ_2: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

Câu VII (B):

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2-4x+y+2=0\\ 2\log_2(x-2)-\log_{\sqrt{2}}y=0\end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

KHỐI A – 2009

Câu I:

Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x+3}$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc toạ độ O.

Câu II:

1. Giải phương trình:

$$\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}.$$

2. Giải phương trình:

$$2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0 \quad (x\in R)$$

Câu III:

Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3x-1\right)\cos^2x.dx$

Câu IV:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a, CD = a; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Câu V:

Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thoả mãn x(x + y + z) = 3yz, ta có:

$$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(x+z)(y+z) \le 5(y+z)^3.$$

Câu VI (A): (Chương trình chuẩn)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm I(6; 2) là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm M(1; 5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Câu VII (A):

Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. tính giá trị của biểu thức

$$A = |z_1|^3 + |z_2|^3.$$

Câu VI (B): (Chương trình nâng cao)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $\Delta: x+my-2m+3=0$, với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+9}{6}$; $\Delta_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

Câu VII (B):

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\log_2\left(x^2+y^2\right)=1+\log_2(xy)\\ 3^{x^2-xy+y^2}=81\end{cases} \quad (x,y\in R)$$

KHỐI B – 2009

Câu I:

Cho hàm số $y = 2x^4 – 4x^2$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).

2. Với các giá trị nào của m, phương trình $x^2\left|x^2-2\right|=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

Câu II:

1. Giải phương trình:

$$\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2(\cos 4x+\sin^3 x)$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}xy+x+1=7y\\ x^2y^2+xy+1=13y^2\end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Câu III:

Tính tích phân $I=\int_1^3\frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$

Câu IV:

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’ có BB’ = a, góc giữa đường thẳng BB’ và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B’ lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A’ABC theo a.

Câu V:

Cho các số thực x, y thay đổi và thoả mãn $(x+y)^3+4xy\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

Câu VI (A): (Chương trình chuẩn)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) : $(x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và hai đường thẳng Δ_1 : x – y = 0, Δ_2 : x – 7y = 0. Xác định toạ độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1); biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C)

2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1) và D(0;3;1). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P)

Câu VII (A):

Tìm số phức z thoả mãn :

$$|z-(2+i)|=\sqrt{10} \text{ và } z.\bar{z}=25$$

Câu VI (B): (Chương trình nâng cao)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(-1;4) và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng Δ: x – y – 4 = 0. Xác định toạ độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): x – 2y + 2z – 5 = 0 và hai điểm A(-3;0;1), B(1;-1;3). Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

Câu VII (B):

Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-1}{x}$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho AB = 4.

KHỐI D – 2009

Câu I:

Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi m = 0.

2. Tìm m để đường thẳng y = -1 cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Câu II:

1. Giải phương trình:

$$\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x=0$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\frac{5}{x^2}+1=0 \end{cases} \quad (x, y \in R)$$

Câu III:

Tính tích phân $I=\int_1^3 \frac{dx}{e^x-1}$

Câu IV:

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A’B’C’ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA’ = 2a, A’C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A’C’, I là giao điểm của AM và A’C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Câu V:

Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn x + y = 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

Câu VI (A): (Chương trình chuẩn)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có M (2; 0) là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là 7x – 2y – 3 = 0 và 6x – y – 4 = 0. Viết phương trình đường thẳng AC.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A (2; 1; 0), B(1;2;2), C(1;1;0) và mặt phẳng (P): x + y + z – 20 = 0. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

Câu VII (A):

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:

$$|z - (3 - 4i)| = 2.$$

Câu VI (B): (Chương trình nâng cao)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Gọi I là tâm của (C). Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO} = 30^0$.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): x + 2y – 3z + 4 = 0. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

Câu VII (B):

Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+x-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc trục tung.

KHỐI A – 2008

Câu I:

Cho hàm số $y=\frac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}$ (1), với m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m =1.

2. Tìm các giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^o.

Câu II:

1. Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\frac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

Câu III:

Trong không gian với toạ độ Oxyz, cho điểm A(2;5;3) và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$

1. Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d.

2. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

Câu IV:

1. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx$

2. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt:

$$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m\ (m\in\mathbb{R})$$

Câu V (A). (Chương trình không phân ban)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elíp (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

2. Cho khai triển

$\left(1+2x\right)^n=a_0+a_1x+...+a_nx^n$

Trong đó $n\in N^*$ và các hệ số $a_0, a_1, ..., a_n$ thỏa mãn hệ thức $a_0+\frac{a_1}{2}+...+\frac{a_n}{2^n}=4096$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ..., a_n$.

Câu V (B): (Chương trình phân ban)

1. Giải phương trình

$$\log_{2x-1}(2x^2+x-1)+\log_{x+1}(2x-1)^2=4$$

2. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

KHỐI B – 2008

Câu I:

Cho hàm số y = $4x^3$ - $6x^2$ + 1 (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm M(-1;-9).

Câu II:

1. Giải phương trình:

$$\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Câu III:

Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho ba điểm A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;0;1)

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.

2. Tìm toạ độ của điểm M thuộc mặt phẳng $2x+2y+z-3=0$ sao cho MA=MB=MC.

Câu IV:

1. Tính tích phân

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}$$

2. Cho hai số thực x, y thay đổi và thoả mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$

Câu V (A): **(Chương trình không phân ban)**

1. Chứng minh rằng:

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{1}{C_n^k}$$

2. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, hãy xác định toạ độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm H(-1;-1), đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

Câu V (B): **(Chương trình phân ban)**

1. Giải bất phương trình:

$$\log_{0,7}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$$

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA=a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

KHỐI D – 2008

Câu I:

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm I (1;2) với hệ số góc k $(k>-3)$ đều cắt đồ thị của hàm số (1) tại ba điểm phân biệt I, A, B đồng thời I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Câu II:

1. Giải phương trình:

$$2\sin x\left(1+\cos 2x\right)+\sin 2x=1+2\cos x$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}xy+x+y=x^2-2y^2\\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Câu III:

Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho bốn điểm A(3;3;0), B(3;0;3), C(0;3;3), D(3;3;3)

1. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

2. Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu IV:

1. Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{\ln x}{x^3}dx$

2. Cho x, y là hai số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$$

Câu V (A): **(Chương trình không phân ban)**

1. Tìm số nguyên dương n thoả mãn hệ thức $C_{2n}^1+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n-1}=2048$ (C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử)

2. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho parabol (P) : $y^2 = 16x$ và điểm A(1; 4). Hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho góc $\widehat{BAC} = 90^0$. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Câu V (B): **(Chương trình phân ban)**

1. Giải bất phương trình:

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-3x+2}{x}\ge 0$$

2. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

----------------------Hết-----------------------