TĂNG HẢI TUÂN

GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC

ĐỀ THI HSG QUỐC GIA MÔN TOÁN 2015

Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) + (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq (a+b+c)^2.$$

(Trích Đề thi chọn HSG quốc gia môn Toán 2015)

Lời giải

$\boxed{1}$ Đầu tiên, ta sẽ chứng minh

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) + (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Bất đẳng thức trên tương đương

$$(a+b+c)^2 \geq (a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}),$$

hay

$$a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

Thật vậy nó luôn đúng vì

$$a+b+c-(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2}{2} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

$\boxed{2}$ Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$(a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) + (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq (a+b+c)^2.$$

Cách 1:
Bất đẳng thức này tương đương

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-(a+b+c)\left[a+b+c-\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\right] \geq 0,$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\right] \geq 0,$$

$$S_c(a-b)^2+S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2 \geq 0,$$

trong đó

$$\begin{cases} S_a = 1-\dfrac{a+b+c}{2(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2} \\ S_b = 1-\dfrac{a+b+c}{2(\sqrt{c}+\sqrt{a})^2} \\ S_c = 1-\dfrac{a+b+c}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \end{cases}$$

Giả sử $a \geq b \geq c$, ta thấy

$$\begin{cases} S_b = 1 - \dfrac{a+b+c}{2(\sqrt{c}+\sqrt{a})^2} = \dfrac{a+c+4\sqrt{ac}-b}{2(\sqrt{c}+\sqrt{a})^2} \geq 0 \\ S_c = 1 - \dfrac{a+b+c}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \dfrac{a+b+4\sqrt{ab}-c}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \geq 0 \end{cases}$$

Mặt khác, ta có $\dfrac{a-c}{b-c} \geq \dfrac{a}{b}$, do đó

$$\begin{aligned} S_c(a-b)^2 + S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 &\geq S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 \\ &= (b-c)^2\left(S_b\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^2 + S_a\right) \\ &\geq (b-c)^2\left(S_b\frac{a^2}{b^2} + S_a\right) \\ &= (b-c)^2 \cdot \frac{a^2S_b + b^2S_a}{b^2}. \end{aligned}$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh $a^2S_b + b^2S_a \geq 0$, tức là chứng minh

$$a^2\left(1 - \frac{a+b+c}{2(\sqrt{c}+\sqrt{a})^2}\right) + b^2\left(1 - \frac{a+b+c}{2\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}\right) \geq 0,$$

$$a^2 + b^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{a^2}{2(\sqrt{c}+\sqrt{a})^2} + \frac{b^2}{2\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}\right).$$

Thật vậy, vì $c \geq 0$ nên $(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2 = a + c + 2\sqrt{ac} \geq a + c$, tương tự $(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \geq b + c$. Do đó

$$\begin{aligned} (a+b+c)\left(\frac{a^2}{2(\sqrt{c}+\sqrt{a})^2} + \frac{b^2}{2\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}\right) &\leq (a+b+c)\left(\frac{a^2}{2\,(c+a)} + \frac{b^2}{2\,(b+c)}\right) \\ &= \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2b}{2\,(c+a)} + \frac{b^2a}{2\,(b+c)} \\ &\leq \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2b}{2a} + \frac{b^2a}{2b} \\ &= \frac{a^2+b^2}{2} + ab \\ &\leq \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$. ■

Cách 2:
Đổi biến a, b, c bởi a^2, b^2, c^2 ta cần chứng minh

$$(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) + (a^2-b^2)^2 + (b^2-c^2)^2 + (c^2-a^2)^2 \geq (a^2+b^2+c^2)^2,$$

tương đương với

$$a^4 + b^4 + c^4 + (a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2),$$

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)+ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\geq 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Theo bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geq ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2).$$

Do đó ta cần chứng minh

$$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\geq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì theo $AM-GM$ thì $a^2+b^2\geq 2ab,\ b^2+c^2\geq 2bc, c^2+a^2\geq 2ca.$
Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị của nó. ■

Cách 3:
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$(a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})+a^2+b^2+c^2\geq 4(ab+bc+ca).$$

Ta có,

$$\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\geq 0.$$

Từ đó suy ra $\sqrt{ab}\geq\dfrac{2ab}{a+b}$. Tương tự ta cũng có $\sqrt{bc}\geq\dfrac{2bc}{b+c},\ \sqrt{ca}\geq\dfrac{2ca}{c+a}$.
Sử dụng các bất đẳng thức này và bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta được

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})+a^2+b^2+c^2\\
&\geq 2(a+b+c)\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)+a^2+b^2+c^2\\
&=2(ab+bc+ca)+2abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)+a^2+b^2+c^2\\
&\geq 2(ab+bc+ca)+2abc\left(\frac{9}{a+b+b+c+c+a}\right)+a^2+b^2+c^2\\
&=2(ab+bc+ca)+\frac{9abc}{a+b+c}+a^2+b^2+c^2.
\end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức $Schur$ bậc 3 ta có

$$\frac{9abc}{a+b+c}+a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc+ca).$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
(a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})+a^2+b^2+c^2&\geq 2(ab+bc+ca)+2(ab+bc+ca)\\
&=4(ab+bc+ca).
\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị của nó. ■

Cách 4: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$(a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})+a^2+b^2+c^2\geq 4(ab+bc+ca).$$

Ta có,

$$\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\geq 0.$$

Từ đó suy ra $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$. Tương tự ta cũng có $\sqrt{bc} \geq \dfrac{2bc}{b+c}$, $\sqrt{ca} \geq \dfrac{2ca}{c+a}$.
Sử dụng các bất đẳng thức này ta được

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})+a^2+b^2+c^2 \\
&\geq 2(a+b+c)\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)+a^2+b^2+c^2 \\
&= 2(ab+bc+ca)+2abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)+a^2+b^2+c^2.
\end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2(ab+bc+ca)+2abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)+a^2+b^2+c^2 \geq 4(ab+bc+ca),$$

tương đương

$$2abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)+2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2.$$

Để ý rằng

$$\frac{2abc}{b+c}+2a^2=2a\left(\frac{bc}{b+c}+a\right)=\frac{2a\left(ab+bc+ca\right)}{b+c}.$$

Do đó ta cần phải chứng minh

$$2\left(ab+bc+ca\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq (a+b+c)^2,$$

hay là chứng minh

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2ab+2bc+2ca}.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo $Cauchy-Schwarz$

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb} \\
&\geq \frac{(a+b+c)^2}{2ab+2bc+2ca}.
\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị của nó. ■

Cách 5:
Dễ thấy rằng khi $abc=0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
Xét $abc>0$.
Vì bất đẳng thức hoàn toàn thuần nhất, nên ta có thể chuẩn hóa $abc=1$.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$(a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})+a^2+b^2+c^2 \geq 4(ab+bc+ca).$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \\
&= \sqrt{ab}\left(a+b\right)+\sqrt{bc}\left(b+c\right)+\sqrt{ca}\left(c+a\right)+\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \\
&\geq 2\mathrm{ab}+2bc+2ca+\sqrt{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\sqrt{abc}} \\
&= 2\left(ab+bc+ca\right)+3 \\
&= 2\left(ab+bc+ca\right)+2abc+1.
\end{aligned}$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì trong 3 số dương a, b, c luôn tồn tại hai số nằm cùng phía so với 1. Giả sử hai số đó là a và b. Khi đó ta có $2c(a-1)(b-1) \geq 0$ hay tương đương

$$2abc + 2c \geq 2(bc + ca).$$

Từ đó, chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2ab + 2abc + 2c,$$

hay

$$(a-b)^2 + (c-1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. ■

Tăng Hải Tuân
http://tanghaituan.com
https://facebook.com/tanghaituan.vlpt