Bài giải thi Toán học trẻ quốc tế KIMC 2014

Nguyễn Nga Nhi (HCV KIMC 2014)

Bài 1: ***Tuổi của Max bây giờ nhân với tuổi của Mini sau đây 1 năm là bình phương của một số nguyên. Tuổi của Max sau đây 1 năm nhân với tuổi của Mini bây giờ cũng là bình phương của một số nguyên. Nếu bây giờ tuổi của Mini là 8, còn tuổi của Max lớn hơn 1 và nhỏ hơn 100, hỏi Max bao nhiêu tuổi?***

Bài giải:

Đặt tuổi của Max là n để lập biểu thức, với n là số tự nhiên lớn hơn 1 và nhỏ hơn 100 như dữ kiện của đầu bài. Đầu bài cũng đã cho tuổi của Mini là 8 tuổi.

Vì tuổi của Max bây giờ nhân với tuổi của Mini sau đây một năm là bình phương của một số nguyên, nên ta có thể viết tóm tắt: n x (8+1) = 9n = a^2. Vì 9 = 3^2, nên n cũng phải là bình phương của một số nguyên (I).

Đến đây ta có thể dễ dàng nhận thấy lớn hơn 1(=1^2) và nhỏ hơn 100(=10^2) chỉ có 8 số là bình phương của một số nguyên. Ta hoàn toàn có thể tiến hành thử để tìm ra đáp số của bài toán.

Tuy nhiên, nếu khai thác tiếp dữ kiện đề bài thì bởi lẽ tuổi của Max sau đây 1 năm nhân với tuổi của Mini bây giờ cũng là bình phương của một số nguyên nên ta có thể tóm tắt: (n+1) x 8 = (n+1) x 2^3 = b^2. Từ biểu thức trên ta dễ dàng suy ra n+1 phải chia hết cho 2 hay n phải là một số lẻ (II).

Kết hợp (I) và (II) ta suy ra n là bình phương của một số lẻ và nhờ đó giảm bớt được một nửa số phép thử phải làm. Cụ thể những giá trị mà n có thể nhận cho đến bước này bao gồm 9(=3^2), 25(=5^2), 49(=7^2) và 81(=9^2).

Ta lập bảng sau đây để xét điều kiện:

n	**n+1**	**8(n+1)**
9	10	80 (= $2^4.5$)
25	26	208 (= $2^4.13$)
49	50	**400 (= $2^4.5^2 = 20^2$)**
81	82	656 (= $2^4.41$)

Trong bảng trên, chỉ có giá trị n=49 thoả mãn điều kiện 8(n+1) là một số chính phương hay bình phương của một số nguyên.

Trả lời : **Max <u>49</u> tuổi**.

Bài 2: ***Trong một dàn hợp xướng, nhiều hơn 2/5 những ít hơn 1/2 của số trẻ em tham gia là nam. Hỏi số trẻ em tham gia dàn hợp xướng nhỏ nhất là bao nhiêu?***

Bài giải:

Gọi số trẻ trong dàn hợp xướng là n và số bạn nam là x. Theo đầu bài ta có:

$\frac{2}{5}n$ < x < $\frac{1}{2}n$ (I)

Ta nhận xét thấy rằng nếu n lẻ thì giá trị $\frac{1}{2}n$ có phần thập phân là 0,5, còn nếu n chẵn thì $\frac{1}{2}n$ có giá trị là một số nguyên. Nói cách khác khoảng cách từ $\frac{1}{2}n$ đến giá trị nguyên lớn nhất nhỏ hơn nó là là 0,5 nếu n lẻ và là 1 nếu n chẵn.

Để thoả mãn điều kiện (I), thì nếu n lẻ thì:

$\frac{1}{2}n$ - $\frac{2}{5}n$ = $\frac{1}{10}n$ >0,5 ⇔ n > 5 => Giá trị lẻ nhỏ nhất của n là 7.

Tương tự nếu n chẵn thì ta có:

$\frac{1}{2}n$ - $\frac{2}{5}n$ = $\frac{1}{10}n$ >1 ⇔ n > 10 => Giá trị chẵn nhỏ nhất của n là 12.

Nói tóm lại, 7 là giá trị nhỏ nhất mà n có thể nhận. Và thực tế nếu số trẻ của dàn hợp xướng là 7 trong đó số nam là 3 sẽ thoả mãn điều kiện (I). Thực vậy:

$\mathbf{\frac{2}{5} x 7} = \frac{14}{5} \mathbf{<} \frac{15}{5} = \mathbf{3} = \frac{1}{2} x 6 \mathbf{<} \mathbf{\frac{1}{2} x 7}$

Trả lời : **Số trẻ em tham gia dàn hợp xướng nhỏ nhất có thể là 7**.

Bài 3: ***Mỗi cô gái muốn cưỡi riêng một con ngựa, nhưng số ngựa chỉ có đủ cho 10/13 số cô gái. Nếu tổng số chân của các cô gái và ngựa là 990, hỏi có bao nhiêu cô gái sẽ phải chờ đến lượt cưỡi ngựa?***

Bài giải:

Gọi số cô gái là n. Vậy theo đề bài, số ngựa là $\frac{10}{13}n$.

Mỗi cô gái có 2 chân, còn mỗi chú ngựa có 4 chân. Cũng theo đề bài, tổng số chân của các cô gái và ngựa là 990, nên ta có:

2.n + 4.$\frac{10}{13}n$ = 990 ⇔ $\frac{66}{13}n$ = 990 ⇔ n = 195

Như vậy là có 195 cô gái và 195 x $\frac{10}{13}$ = 150 con ngựa.

Số cô gái phải chờ là 195 – 150 = 45.

Trả lời : **Số cô gái phải chờ đến lượt cưỡi ngựa là 45**.

Bài 4: ***Phép toán 23/30 = 57/78 hiển nhiên là sai. Tuy nhiên, nếu ta trừ đi một số nguyên dương từ các số 23, 30, 57 và 78, phép toán trên sẽ lại thành đúng. Hỏi số ta cần trừ là số nào ?***

Bài giải:

Gọi số nguyên dương phải tìm là n. Theo đề bài ta có :

$\frac{23-n}{30-n} = \frac{57-n}{78-n}$ ⇔ (23 – n)(78 – n) = (30 – n)(57 – n)

⇔ $1794 - 101n + n^2 = 1710 - 87n + n^2$

⇔ 84 = 14 n

⇔ n = 6 (thoả mãn điều kiện là một số nguyên dương)

Trả lời : **Số ta cần trừ là 6**.

Bài 5: ***Chọn một đội từ 4 nữ và 6 nam. Người ta yêu cầu đội đó phải có ít nhất 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đội.***

Bài giải:

Theo đề bài, có thể chọn 2 đến 4 trong tổng số 4 bạn nữ và 0 đến 6 trong tổng số 6 bạn nam để lập thành một đội.

Cách tính số phương án chọn nhóm nữ và số phương án chọn nhóm nam được tóm tắt trong bảng sau :

Số bạn nữ trong nhóm (k)	**Số cách chọn tương ứng (C_4^k)**
2	$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!}$ = 6
3	$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!}$ = 4
4	$C_4^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!}$ = 1
Tổng số các phương án chọn nhóm nữ	6 + 4 + 1 = 11
Số bạn nam trong nhóm (k)	**Số cách chọn tương ứng (C_6^k)**
0	$C_6^0 = \frac{6!}{0!(6-0)!}$ = 1
1	$C_6^1 = \frac{6!}{1!(6-1)!}$ = 6
2	$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!}$ = 15
3	$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!}$ = 20
4	$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!}$ = 15
5	$C_6^5 = \frac{6!}{5!(6-5)!}$ = 6
6	$C_6^6 = \frac{6!}{6!(6-6)!}$ = 1
Tổng số các phương án chọn nhóm nam	1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64

Vậy số cách để chọn đội theo yêu cầu của đề bài là: 11 x 64 = 704 (cách).

Trả lời : **Có 704 cách chọn đội**.

Bài 6: ***Tích của 5 số nguyên dương là 2014. Hỏi tổng của chúng có thể nhận bao nhiêu giá trị khác nhau?***

Bài giải:

Phân tích tiêu chuẩn (hay còn gọi là phân tích ra các thừa số nguyên tố) của 2014 là: 2014 = 2 x 19 x 53.

Ta dễ dàng nhận ra có 5 cách để biểu diễn 2014 dưới dạng tích của 5 số nguyên dương:

2014 = 2014 x 1 x 1 x 1 x 1

= 2 x 1007(=19 x 53) x 1 x 1 x 1

= 19 x 106(=2 x 53) x 1 x 1 x 1

= 53 x 38(=2 x 19) x 1 x 1 x 1

= 2 x 19 x 53 x 1 x 1

Tổng của 5 thừa số trong mỗi cách biểu diễn trên đều cho một giá trị khác nhau.

Trả lời : **Tổng của 5 thừa số nguyên dương có tích là 2014 có thể nhận 5 giá trị khác nhau**.

Bài 7: ***Một con mèo bắt được số chuột đen nhiều gấp 3 lần số chuột trắng. Mỗi ngày con mèo ăn thịt 6 chuột đen và 4 chuột trắng. Sau một vài ngày, còn lại 60 chuột đen và 4 chuột trắng. Hỏi tổng số chuột mà mèo đã bắt được?***

Bài giải:

Gọi số chuột trắng mà mèo đã bắt được là a thì số chuột đen mà mèo đã bắt được là 3a. Gọi số ngày mà mèo đã bắt và ăn chuột là n. Theo đề bài, ta có:

3a – 6n = 60 (I)

a – 4n = 4 (II)

Nhân cả 2 vế của phương trình (II) với 3, ta có:

3a – 12n = 12 (III)

Lấy từng vế của (I) trừ đi (III), ta có:

6n = 48 (IV)

Thay (IV) vào (I), ta được:

3a – 48 = 60 ⬄ 3a = 60 + 48 = 108 ⬄ a = 108 : 3 = 36

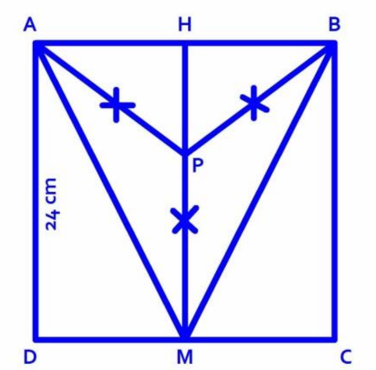
Vậy tổng số chuột cả đen lẫn trắng mà mèo đã bắt được là:

3a + a = 108 + 36 = 144 (con chuột)

Trả lời : **Tổng số chuột mà mèo đã bắt được là 144 con**.

Bài 8: ***Cho M là trung điểm cạnh CD của hình vuông ABCD với cạnh 24 cm. P là một điểm thoả mãn PA = PB = PM. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn PM theo cm?***

Bài giải:



Ta thấy ▲ADM = ▲BCM theo trường hợp cạnh góc cạnh, vì AD = BC (cùng là cạnh của hình vuông ABCD), $\widehat{ADM}$ = $\widehat{BCM}$ = 90° (cùng là góc của hình vuông ABCD) và DM = CM (M là trung điểm của cạnh CD). Vậy ta suy ra AM = BM.

Từ đó, ta cũng dễ dàng nhận thấy ▲AMP = ▲BMP theo trường hợp cạnh cạnh cạnh, vì AM = BM (như đã chứng minh ở trên), PA = PB (theo đầu bài) và chung cạnh PM.

Kéo dài PM cắt AB tại H. Do ▲AMP = ▲BMP, nên $\widehat{AMP}$ = $\widehat{BMP}$ và $\widehat{MAP}$ = $\widehat{MBP}$. Vì vậy, $\widehat{AMP}$ + $\widehat{MAP}$ = $\widehat{BMP}$ + $\widehat{MBP}$ ⬄ $\widehat{APH}$ = $\widehat{BPH}$. Do đó, PH là phân giác của góc P trong tam giác APB. Theo đầu bài thì AP = BP nên tam giác APB cân tại đỉnh P. Nói cách khác, PH không chỉ là phân giác mà còn đồng thời là trung tuyến và đường cao trong tam giác APB. Hệ quả là $\widehat{AHP}$ = 90° và AH = AB : 2 = 24 : 2 = 12 (cm).

Vì MH vuông góc với AB nên MH = AD = 24 cm.

Gọi PA = PB = PM = n. Khi đó PH = 24 – n.

Áp dụng định lý Pi-ta-go vào tam giác vuông AHP, ta có :

$PA^2 = AH^2 + PH^2$ ⬄ $n^2 = 12^2 + (24-n)^2$ ⬄ $n^2 = 144 + (576 - 48n + n^2)$ ⬄ 48n = 720 ⬄ n=15.

Như vậy độ độ dài đoạn PM cố định là 15 cm.

Trả lời : **Giá trị nhỏ nhất độ dài đoạn PM là 15 cm**.

Bài 9: ***Tại một bữa tiệc, cứ hai người thì bắt tay nhau, ngoại trừ Bob, người chỉ bắt tay với một số người. Không có 2 người nào bắt tay nhau nhiều hơn 1 lần. Cho tổng số bắt tay là 2014, hỏi Bob bắt tay với bao nhiêu người ?***

Bài giải:

Gọi số người tham gia bữa tiệc là n và số người Bob không bắt tay là X (X < n-1 và n, X ∈ Z^+).

Nếu Bob bắt tay tất cả mọi người thì bất cứ 2 người nào cũng bắt tay nhau 1 lần và khi đó số lần bắt tay là $\frac{n(n-1)}{2}$.

Vì Bob không bắt tay X người nên tổng số bắt tay là 2014. Do đó ta có :

$2014 = \frac{n(n-1)}{2} - X \rightarrow \frac{n(n-1)}{2} > 2014 \Leftrightarrow n(n-1) > 4024$ (I)

Vì X < n - 1, nên ta có :

$2014 = \frac{n(n-1)}{2} - X > \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \Leftrightarrow (n-1)(n-2) > 4024$ (II)

Quan sát ta thấy nếu n trong vế trái của (I) giảm 1 đơn vị thì sẽ thành vế trái của (II). Nói cách khác, nếu tồn tại một giá trị nguyên n'<n cũng thoả mãn điều kiện như n trong bất phương trình (I) thì bất phương trình (II) sẽ sai. Vậy chúng ta phải tìm giá trị nhỏ nhất của n thoả mãn bất phường trình (I).

Bằng cách ước lượng, ta sẽ thấy :

Với n = 63 thì n(n - 1) = 63 x 62 = 3906 < 4024

Với n = 64 thì n(n - 1) = 64 x 63 = 4032 > 4024

Vậy n hay số người tham gia bữa tiệc là 64.

Thay n = 64 vào phương trình đầu tiên ta có:

$2014 = \frac{n(n-1)}{2} - X \Leftrightarrow 2014 = \frac{64\,(64-1)}{2} - X \Leftrightarrow X = 2$

Vậy số người mà Bob không bắt tay là 2 và số người mà Bob bắt tay là 64 – 1 – 2 = 61.

Trả lời : **Bob đã bắt tay <u>61</u> người**.

Bài 10: ***Giá tiền vé xem giao hưởng là $26 đối với người lớn, $18 đối với thanh niên và $10 đối với trẻ em. Tổng số tiền vé cho 131 người là $2014. Hỏi số trẻ em nhiều hơn số người lớn là bao nhiêu?***

Bài giải:

Gọi số người lớn là a, số thanh niên là b và số trẻ em là c.

Theo đầu bài ta có:

$a + b + c = 131$ (I)

26 a + 18b + 10c = 2014 (II)

Nhân cả 2 vế của (I) với 18 ta có :

18a + 18b + 18c = 2358 (III)

Lần lượt lấy từng vế của (III) trừ đi (II) ta có:

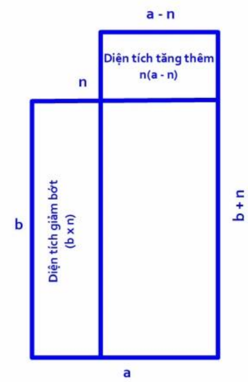
– 8a + 8c = 344 ⇔ c – a = 344 : 8 = 43.

Trả lời : **Số trẻ em nhiều hơn số người lớn là 43 người**.

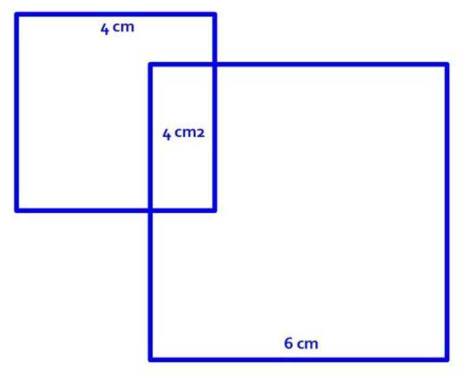
Bài 11: ***Cho 2 hình vuông đè lâp nhau với các cạnh song song sao cho phần chung của 2 hình có diện tích bằng 4 cm^2. Phần chung này bằng 1/9 diện tích hình vuông lớn và bằng 1/4 diện tích hình vuông nhỏ. Tính chu vi nhỏ nhất có thể theo cm của hình 8 cạnh tạo bởi 2 hình vuông đè lấp nhau nói trên ?***

Bài giải:

Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau: Một hình chữ nhật có diện tích cố định sẽ có chu vi càng lớn khi hiệu giữa độ dài 2 cạnh càng lớn.



Giả sử hình bên là một hình chữ nhật có diện tích là S và các cạnh lần lượt là a và b trong đó a không lớn hơn b (S = ab và a ≤ b). Ta gia tăng hiệu số các cạnh bằng cách tăng b và giảm a cùng một giá trị n (n<a). Chúng ta dễ dàng nhận thấy so với hình chữ nhật cũ, chu vi hình chữ nhật mới thì không đổi nhưng phần diện tích tăng thêm là n(a-n) nhỏ hơn phần diện tích giảm đi là (b x n), do a ≤ b nên đương nhiên (a-n)<b. Để giữ nguyên diện tích của hình chữ nhật, ta phải tăng thêm độ dài của 1 hoặc cả 2 cạnh của hình chữ nhật mới và do đó sẽ làm tăng chu vi của nó so với hình chữ nhật ban đầu. Như vậy bổ đề đã được chứng minh.



Theo dữ kiện đề bài, diện tích của hình vuông nhỏ là 4 : ¼ = 16 (cm^2) và cạnh của nó là 4 cm vì 4^2 =16.

Diện tích của hình vuông lớn là 4 : 1/9 = 36 (cm^2) và cạnh của nó là 6 cm vì 6^2 = 36.

Vì các cạnh của 2 hình vuông ban đầu song song với nhau nên hình tứ giác là phần chung của 2 hình vuông đó là một hình chữ nhật. Ta dễ dàng nhận thấy chu vi của hình 8 cạnh tạo bởi hai hình vuông đè lấp nhau bằng chu vi của 2 hình vuông (4x4 + 6x4 = 40 (cm)) trừ đi chu vi của hình chữ nhật là phần chung của 2 hình vuông. Các cạnh của hình chữ nhật đó chính là một phần của cạnh của 2 hình vuông đã cho. Vì thế độ dài của cạnh hình chữ nhật không thể vượt quá độ dài cạnh hình vuông bé là 4 cm. Do diện tích của hình chữ nhật cố định là 4 cm^2 nên khi cạnh dài của nó đạt giá trị lớn nhất là 4 cm thì cạnh nhỏ của nó đạt giá trị nhỏ nhất là 4 : 4 = 1 (cm). Kết hợp với bổ đề đã chứng minh trong phần bình luận, chu vi của hình chữ nhật có giá trị lớn nhất là (4 + 1) x 2 = 10 (cm). Khi đó chu vi hình 8 cạnh cũng có chu vi nhỏ nhất là 40 – 10 = 30 (cm).

Trả lời : **Chu vi nhỏ nhất của hình 8 cạnh tạo bởi 2 hình vuông đè lấp như đầu bài cho là 30 cm**.

Bài 12: ***Cho một số lượng các ngôi sao trên trời :***

8 x 12 + 98 x 102 + 998 x 1002 + … + 99…98 x 100…02

Trong số hạng cuối cùng của tổng, có 2014 chữ số 9 nằm trong số 99…98 và 2014 chữ số 0 nằm trong số 100…02. Hỏi tổng các chữ số của tổng số ngôi sao trên trời là bao nhiêu ?

Bài giải:

Ta biến đổi công thức tính số sao trên trời như sau :

$8 \times 12 + 98 \times 102 + 998 \times 1002 + \ldots + \underbrace{99\ldots98}_{2014\ chữ\ số\ 9} + \underbrace{100\ldots02}_{2014\ chữ\ số\ 0}$

$= (10 - 2)(10 + 2) + (100 - 2)(100 + 2) + \ldots + (\underbrace{100\ldots00}_{2015\ chữ\ số\ 0} - 2)(\underbrace{100\ldots00}_{2015\ chữ\ số\ 0} + 2)$

$= (10^2 - 2^2) + (100^2 - 2^2) + \ldots + (\underbrace{100\ldots00}_{2015\ chữ\ số\ 0}{}^2 - 2^2)$

$= (100 + 10000 + \ldots + \underbrace{100\ldots00}_{4030\ chữ\ số\ 0}) - 2^2 \times 2015$

$= \underbrace{101010\ldots10100}_{2015\ chữ\ số\ 1} - 8060$

$= \underbrace{101010\ldots1000000}_{2013\ chữ\ số\ 1} + 10100 - 8060$

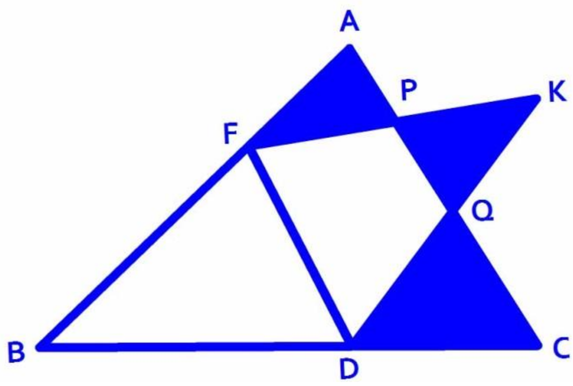
$= \underbrace{101010\ldots1000000}_{2013\ chữ\ số\ 1} + 2040$

$= \underbrace{101010\ldots1002040}_{2013\ chữ\ số\ 1}$

Vậy tổng các chữ số của số trên là : 2013 x 1 + 2 + 0 + 4 + 0 = 2019.

Trả lời : **Tổng các chữ số của tổng số sao trên trời là 2019**.

Bài 13: ***Cho tam giác ABC với D là điểm thuộc BC còn F là điểm thuộc AB. Điểm K đối xứng với điểm B qua DF, và K và B nằm khác phía so với AC. AC cắt FK tại P và DK tại Q. Tổng diện tích của các tam giác AFP, PKQ, QDC là 10 cm². Nếu cộng tổng diện tích này với diện tích hình tứ***



giác DFPQ, ta thu được 2/3 diện tích tam giác ABC. Tính diện tích tam giác ABC theo cm^2 ?

Bài giải:

Theo đầu bài ta có :

$\frac{1}{3}S_{ABC} = S_{AFP} + S_{PKQ} + S_{QDC} + S_{DFPQ}$ (I)

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}S_{ABC} = S_{AFP} + S_{QDC} + (S_{PKQ} + S_{DFPQ}) = S_{AFP} + S_{QDC} + S_{DFK}$ (II)

Vì K đối xứng với B qua DF nên $S_{BDF} = S_{DFK}$ nên từ phương trình (II) ta suy ra :

$\frac{1}{3}S_{ABC} = S_{AFP} + S_{QDC} + S_{BDF} = S_{ABC} - S_{DFPQ} \Leftrightarrow S_{DFPQ} = S_{ABC} - \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{2}{3}S_{ABC}$ (III)

Sau khi đã có (III), ta biến đổi (I) như sau:

$\frac{1}{3}S_{ABC} = S_{AFP} + S_{PKQ} + S_{QDC} + S_{DFPQ}$ (I)

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}S_{ABC} = (S_{AFP} + S_{PKQ} + S_{QDC}) + S_{DFPQ} = 10 + \frac{2}{3}S_{ABC}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}S_{ABC} = 10 \Leftrightarrow S_{ABC} = 30\ (cm^2)$

Trả lời: **Diện tích tam giác ABC là 30 cm^2**.

Bài 14: ***Sau khi Nadia đi lên dốc đến đỉnh, cô đi tiếp một phần đường bằng có chiều dài 2,5 km, rồi đi xuống dốc và đến một cái hồ. Sau đó cô đi theo chiều ngược lại theo con đường cũ. Vận tốc đi đường bằng của cô là 5 km/h, vận tốc lên dốc là 4 km/h, còn vận tốc xuống dốc là 6 km/h. Chiều đi cô mất 1 giờ 36 phút, chiều về cô mất 1 giờ 39 phút. Nếu cô đi không nghỉ trong suốt quá trình thì chiều dài từ vị trí xuất phát đến chỗ cái hồ là bao nhiêu km?***

Bài giải:

Quy đổi các giá trị thời gian trong đề bài ra giờ (h): 1 giờ 36 phút = 1,6 h và 1 giờ 39 phút = 1,65 h.

Thời gian để Nadia đi đoạn đường bằng luôn là: 2,5 (km) : 5 (km/h) = 0,5 (h).

Gọi độ dài quảng đường từ chỗ xuất phát lên đỉnh và từ đỉnh xuống hồ tính bằng km lần lượt là m và n.

Như vậy, Nadia đi lên dốc m (km) và xuống dốc n (km) hết thời gian là: 1,6 – 0,5 = 1,1 (h).

Tương tự, Nadia đi lên dốc n (km) và xuống dốc m (km) hết thời gian là: 1,65 – 0,5 = 1,15 (h).

Sử dụng dữ liệu vận tốc như đề bài đã cho ta có hệ phương trình:

$\frac{m}{4} + \frac{n}{6} = 1,1$ (I)

$\frac{m}{6} + \frac{n}{4} = 1,15$ (II)

Nhân cả 2 vế với phương trình (I) với 24 và 2 vế phường trình (II) với 36 ta có:

6m + 4n = 26,4 (III)

6m + 9n = 41,4 (IV)

Lấy (IV) trừ đi (III), ta được: 5n = 41,4 – 26,4 = 15 ⇔ n = 3.

Thay n = 3 vào (III), ta có : 6m + 4 x 3 = 26,4 ⇔ m = 2,4.

Vậy độ dài của cả quảng đường là 2,5 + 3 + 2,4 = 7,9 (km).

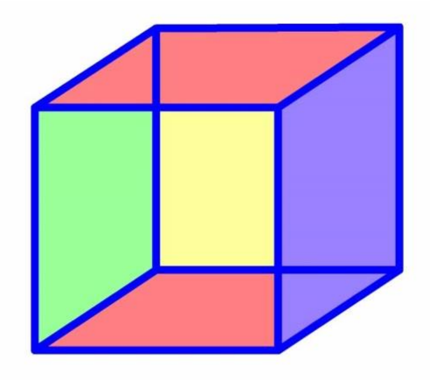
Trả lời : **Chiều dài từ vị trí xuất phát đến chỗ cái hồ là 7,9 km**.

Bài 15: ***Tô 6 mặt của hình lập phương bằng 5 màu khác nhau. Một màu được dùng để tô 2 mặt còn mỗi màu trong 4 màu còn lại dùng để tô một mặt. Hỏi có bao nhiêu cách tô hình lập phương ? Hai hình được coi là giống nhau nếu chúng nhận được từ nhau bằng các phép quay hoặc phép lật.***

Bài giải:

Trong số 5 màu khác nhau được dùng để tô 6 mặt của hình lập phương, chỉ có một màu duy nhất được dùng để tô 2 mặt. Có 5 cách để chọn màu tô trùng này.

Xét vị trí tương đối của 2 mặt cùng màu.



Nếu 2 mặt này là 2 mặt đối diện thì ta có 3 cách tô. Cụ thể, ta cố định mặt bất kỳ được tô bởi 1 trong 4 màu còn lại. Khi đó, ta sẽ có 3 cách để chọn màu đối diện với nó. Hai màu còn lại mỗi cặp sẽ có 2 cách tô nhưng khi xoay khối lập phương sẽ không khác gì nhau nên chỉ coi là cách tô duy nhất.

Nếu 2 mặt này là 2 mặt kề nhau thì ta có 4! = 24 cách tô các mặt còn lại. Tuy nhiên, khi ta xoay khối lập phương để 2 mặt cùng màu đổi chỗ cho nhau, thì 2 mặt đối diện của 2 mặt cùng màu cũng đổi chỗ cho nhau và cả 2 mặt còn lại cũng đổi chỗ cho nhau. Nói cách khác, trong số 24 cách tô kia sẽ có 12 cặp tô bị giống nhau. Vậy trong trường hợp này cũng chỉ có 12 cách tô khác nhau.

Tóm lại, tổng cộng ta có 5 x (3 + 12) = 75 cách tô khối lập phương.

Trả lời : **Có 75 cách tô khối lập phương theo yêu cầu của đề bài**.