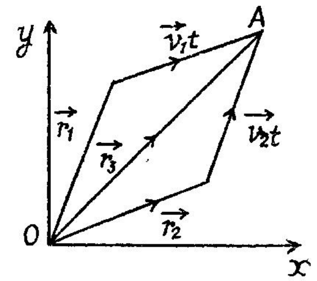
BÀI DỊCH SÁCH VẬT LÝ ĐẠI CƯƠNG CỦA IRÔĐỐP – ĐỘNG HỌC

Đây là bài dịch một số bài tập của Irodop, phần động học. Do không có thời gian đánh công thức nên cắt công thức từ tài liệu, nên các bạn thông cảm. Đây là cuốn sách hay cho sinh viên vật lý, cũng như các giáo viên. Đặc biệt đối với học sinh giỏi thì đây là tài liệu thực sự bổ ích.

PHẦN ĐỘN HỌC

Bài 1: Hai hạt chuyển động với vận tốc không đổi $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$. Tại vị trí ban đầu, bán kính vec-tơ xác định vị trí các hạt là $\vec{r}_1$ và $\vec{r}_2$. Xác định hệ thức 4 vec-tơ đó để hai hạt đến va chạm với nhau?



ĐS: $(\vec{r}_1-\vec{r}_2)/\left|(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right| = (\vec{v}_1-\vec{v}_2)/\left|(\vec{v}_1-\vec{v}_2)\right|$.

Giải: Hai hạt va chạm tại điểm A (hình vẽ), xác định bằng vec-tơ $\vec{r}_3$. Nếu t là thời gian mỗi hạt đến được điểm A, từ quy tắc tam giác của tổng vec-tơ ta có:

$\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t = \vec{r}_2 + \vec{v}_2 t$. Vì vậy: $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)t$ (1)

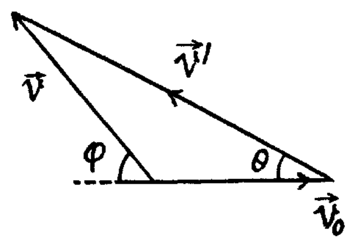
Do đó: $t = \dfrac{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}{|\vec{v}_2-\vec{v}_1|}$ (2)

Từ (1) và (2): $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 - (\vec{v}_2-\vec{v}_1)\dfrac{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}{|\vec{v}_2-\vec{v}_1|}$ hay: $\dfrac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} = \dfrac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{|\vec{v}_2-\vec{v}_1|}$

Bài 2: Một chiếc tàu đi dọc theo xích đạo theo hướng đông với vận tốc v_0 = 30km/h. Một luồng gió thổi đến theo hướng đông nam, theo phương hợp với xích đạo một góc φ = 60^o, với vận tốc v = 15km/h. Đối với hệ quy chiếu gắn với tàu, hãy xác định vận tốc v' của luồng gió đối với tàu và góc φ' của hướng gió đối với xích đạo.

ĐS: 40km/h; 19^o.

Giải: Ta có: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$ (1)



Từ giản đồ vec-tơ (của biểu thức (1)) và sự dụng tính chất tam giác:

$v' = \sqrt{v_0^2 + v^2 + 2v_0 v\cos\varphi} = 39.7$ km/hr (2)

và $\dfrac{v'}{\sin(\pi-\varphi)} = \dfrac{v}{\sin\theta}$ hoặc $\sin\theta = \dfrac{v\sin\varphi}{v'}$ hoặc $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{v\sin\varphi}{v'}\right)$

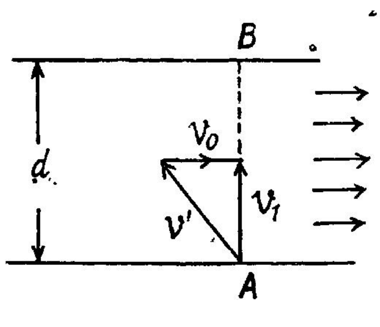
Sử dụng (2) và thay các giá trị v và d ta được: $\theta = 19.1°$

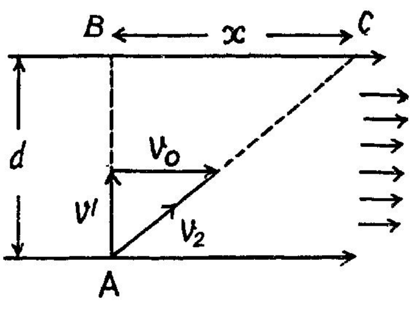
Bài 3: Hai người xuất phát từ một điểm A trên bờ sông và đến điểm B ở bờ bên kia nằm đối diện với điểm A. Muốn như vậy người thứ nhất phải bơi để chuyển động đúng đường thẳng AB, còn người thứ hai bơi vuông góc với dòng chảy, rồi khi đến bờ thì chạy ngược lại với vận tốc u (để đến B). Tính u để hai người đến B cùng một thời điểm, biết vận tốc dòng chảy là v_0 = 2,0km/h, vận tốc của người bơi đối với nước là v' = 2,5km/h.

ĐS: $u = \dfrac{v_0}{\sqrt{\left(1-v_0^2/v'^2\right)^{-1/2}-1}} = 3{,}0km/h$.

Giải: Người thứ nhất bơi qua sông dọc theo đường AB với quãng đường ngắn nhất. Thời gian để người thứ nhất qua sộng là: (với AB = d là độ rộng của sông).

$t_1 = \dfrac{d}{\sqrt{v'^2 - v_0^2}}$ (1)





Đối với người thứ hai, theo con đường nhanh nhất cho thời gian qua sông.

Trong thời gian t_2, độ trôi người thứ 2 là

$x = v_0 t_2 = \dfrac{v_0}{v'}d,$ (2)

Nếu t_3 là thời gian người thứ 2 đi bộ với khoảng cách x từ C đến B, thì $t_3 = \dfrac{x}{u} = \dfrac{v_0 d}{v' u}$ (4)

Theo bài ra $t_1 = t_2 + t_3$, hay $\dfrac{d}{\sqrt{v'^2 - v_0^2}} = \dfrac{d}{v'} + \dfrac{v_0 d}{v' u}$

Giải ra ta được:

$$u = \frac{v_0}{\left(\dfrac{1 - v_0^2}{v'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1} = 3\ \text{km/hr.}$$

Bài 4: Hai ca-nô A và B xuất phát từ một cái phao ở giữa con sông rộng, chuyển động theo hai đường vuông góc nhau: ca-nô A đi dọc theo sông, ca-nô B đi ngang sông. Sau khi được đoạn l đối với phao, hai ca-nô lập tức quay trở về, cho biết vận tốc của hai ca-nô so với nước gấp $\eta = 1,2$ lần vận tốc của dòng chảy, hãy xác định tỉ số t_A/t_B của hai khoảng thời gian hành trình của hai ca-nô. ĐS: $t_A / t_B = \eta\sqrt{1-\eta} = 1,8$.

Giải: Gọi l là khoảng cách bao phủ bởi ca-nô A dọc theo sông, cũng như bởi ca-nô B đi ngang sông. Gọi v_0 là vận tốc dòng nước, v' là vận tốc của ca-nô đối với nước. Thời gian của ca-nô A là

$$t_A = \frac{l}{v' + v_0} + \frac{l}{v' - v_0}$$

và ca-nô B: $t_B = \dfrac{l}{\sqrt{v'^2 - v_0^2}} + \dfrac{l}{\sqrt{v'^2 - v_0^2}} = \dfrac{2l}{\sqrt{v'^2 - v_0^2}}$

Do đó: $\dfrac{t_A}{t_B} = \dfrac{v'}{\sqrt{v'^2 - v_0^2}} = \dfrac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}$ $\left(\text{where } \eta = \dfrac{v'}{v}\right)$ => $t_A/t_B = 1{\cdot}8$

Bài 5: Hai vật được ném lên đồng thời từ cùng một điểm: vật thứ nhất được ném thẳng đứng lên trên với vận tốc v = 25m/s, vật thứ hai được ném xuyên góc $\varphi = 60^o$ so với phương ngang, với cùng vận tốc v. Xác định khoảng cách của hai vật sau thời gian t = 1,70s, bỏ qua sức cản không khí. ĐS: $l = vt\sqrt{2(1-\sin\varphi)} = 22m$.

Giải: Lời giải bài toán trở nên đơn giản trong hệ quy chiếu gắn với một trong hai vật. Gọi vật chuyển động thẳng là vật 1 và vật kia là vật 2, cho vật 1 trong hệ quy chiếu của vật 2, từ biểu thức động học cho gia tốc không đổi: $\vec{r}_{12} = \vec{r}_{0(12)} + \vec{v}_{0(12)}t + \frac{1}{2}\vec{w}_{12}t^2$

Vì vậy $\vec{r}_{12} = \vec{v}_{0(12)}t$, (vì $\vec{w}_{12} = 0$ and $\vec{r}_{0(12)} = 0$).

hoặc $|\vec{r}_{12}| = |\vec{v}_{0(12)}|t$ (1) . Mà $|\vec{v}_{01}| = |\vec{v}_{02}| = v_0$

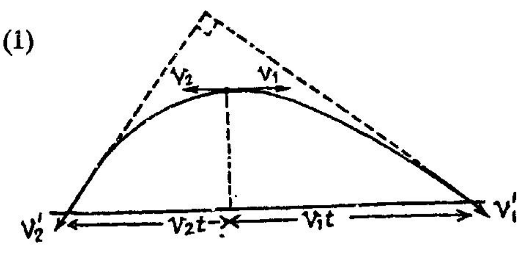
Vì vậy, từ tính chất của tam giác: $v_{0(12)} = \sqrt{v_0^2 + v_0^2 - 2v_0v_0\cos(\pi/2 - \theta_0)}$

Ta được: $|\vec{r}_{12}| = v_0\sqrt{2(1-\sin\theta)}\,t = 22\ \text{m}.$

Bài 6: Hai hạt chuyển động trong trọng trường đều với gia tốc g. Ban đầu hai hạt ở cùng một điểm và có các vận tốc $v_1 = 3,0$m/s, $v_2 = 4,0$m/s đều nằm ngang theo hai chiều ngược nhau. Hãy xác định khoảng cách giữa hai hạt tại thời điểm các vec-tơ vận tốc của chúng vuông góc nhau.

ĐS: $l = (v_1 + v_2)\sqrt{v_1v_2}/g = 2,5m$.

(1)



Giải: Vận tốc hai hạt trở nên vuông góc với nhau sau thời gian t. Vận tốc của chúng:

$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 + \vec{g}t$; $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 + \vec{g}t$ (1)

Vì $\vec{v}_1' \perp \vec{v}_2'$ nên $\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = 0$

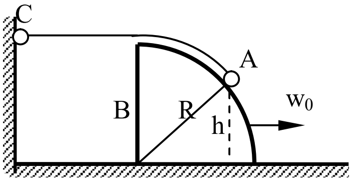
Hay $(\vec{v}_1 + \vec{g}t)\cdot(\vec{v}_2 + \vec{g}t) = 0$ => $-v_1v_2 + g^2t^2 = 0$

Do đó: $t = \dfrac{\sqrt{v_1v_2}}{g}$ (3)

Từ biểu thức: $\vec{r}_{12} = \vec{r}_{0(12)} + \vec{v}_{0(12)}t + \frac{1}{2}\vec{w}_{12}t^2$ => $|\vec{r}_{12}| = |\vec{v}_{0(12)}|t$, vì $\vec{w}_{12} = 0$ và $\vec{r}_{0(12)} = 0$.

Do đó, khoảng cách giữa hai hạt: $|\vec{r}_{12}| = \dfrac{v_1 + v_2}{g}\sqrt{v_1v_2}$ (as $|\vec{v}_{0(12)}| = v_1 + v_2$)

Bài 7: Trong một dụng cụ (hình bên), một vật B dịch chuyển với gia tốc không đổi w_0 đối với mặt đất, còn vật nhỏ A nối với điểm C bằng một sợi dây không giãn, được nâng lên theo mặt trụ của vật B, mặt này có bán kính R. Giả sử ban



đầu vật A nằm trên sàn (h = 0) và đứng yên, hãy tính tốc độ trung bình của vật này.

ĐS: $0,65\sqrt{w_0 R}$.

Bài 8: Một tàu hỏa dài l = 350m chuyển động dọc theo một đường thẳng với gia tốc không đổi w = $3,0.10^{-2}$m/s^2. Sau khi chuyển động được t = 30s người ta bật đèn pha của tàu (biến cố 1), rồi tiếp sau đó thời gian τ = 60s, người ta bật một ngọn đèn ở đuôi tàu (biến cố 2). Tính khoảng cách của hai biến cố đó trong hệ quy chiếc gắn với tàu hỏa và với Trái Đất: một hệ quy chiếu K phải chuyển động như thế nào với vận tốc không đổi so với Trái Đất bằng bao nhiêu để trong hệ quy chiếu đó hai biến cố đó xảy ra tại cùng một điểm.

ĐS: $x_1 - x_2 = l - w\tau(t + \tau/2) = 0,24km$. Vận tốc lúc gặp tàu hỏa là V = 4,0m/s.

Giải: Trong hệ quy chiếu cố định đối với tàu, khoảng cách giữa hai biến cố là bằng l. Tàu bắt đầu chuyển động tại thời điểm t = 0 theo hướng dương x và tại gốc (x = 0) tại đầu tàu tại t = 0. Tọa độ của biến cố thứ nhất trọng hệ gắn với trái đất là $x_1 = \frac{1}{2}wt^2$

và tương tự ta được tọa độ của biến cố thứ hai là $x_2 = \frac{1}{2}w(t+\tau)^2 - l$

Khoảng cách giữa hai biến có là $x_1 - x_2 = l - w\tau(t + \tau/2) = 0{\cdot}242$ km trong hệ quy chiếu cố định gắn với trái đất.

Đối với hai biến cố xảy ra tại cùng một điểm trong hệ quy chiếu K, chuyển động với vận tốc không đổi V đối với trái đất, khoảng cách di chuyển bởi hệ quy chiếu trong thời gian T phải bằng khoảng cách trên.

Do đó: $V\tau = l - w\tau(t+\tau/2)$. Vì vậy $V = \frac{l}{\tau} - w(t+\tau/2) = 4{\cdot}03$ m/s

Hệ K phải chuyển động trong hướng ngược với chuyển động của tàu vì nếu (đối với ví dụ) gốc của hệ trùng với điểm x_1 trên trái đất tại thời điểm t, nó trùng với điểm x_2 tại thời điểm t + τ.

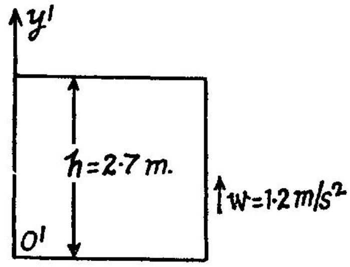
Bài 9: Một buồng thang máy có khoảng cách giữa trần và sàn là 2,7m, chuyển động đi lên với gia tốc không đổi 1,2m/s^2. Sau khi xuất phát 2,0s, một chiếc bu-lông từ trần rơi xuống. Hãy xác định:

a) khoảng thời gian rơi của bu-lông;

b) độ dời chỗ của và đường đi bu-lông trong quá trình rơi đối với hệ quy chiếu gắn với sàn của thang máy.

ĐS: a) 0,7s; b) 0,7m và 1,3m.

Giải: a) Một cách tốt để giải bài tập này là xét trong hệ quy chiếu của thang máy. Gọi khoảng cách giữa đáy và trần thang máy là h = 2,7m và gia tốc của thang máy là w = 1,2m/s^2.

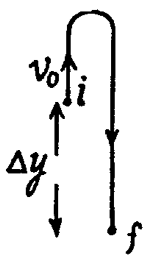


Từ biểu thức động học: $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}w_y t^2$ (1)

Với $y = 0, y_0 = +h, v_{0y} = 0$ và $w_y = w_{\text{bolt}(y)} - w_{\text{ele}(y)} = (-g) - (w) = -(g+w)$

Vì vậy: $0 = h + \frac{1}{2}\{-(g+w)\}t^2$ => $t = \sqrt{\frac{2h}{g+w}} = 0{\cdot}7$ s.

b) Tại thời điểm bu-lông rơi khỏi thang máy, nó có vận tốc: $v_0 = (1{\cdot}2)(2) = 2{\cdot}4$ m/s.



Trong hệ quy chiếu gắn với sàn thang máy (đất) và trục y hướng lên, ta có độ dịch chuyển của bu-lông:

$\Delta y = v_{0y}t + \frac{1}{2}w_y t^2 = v_0 t + \frac{1}{2}(-g)t^2$. Hoặc: $\Delta y = (2{\cdot}4)(0{\cdot}7) + \frac{1}{2}(-9{\cdot}8)(0{\cdot}7)^2 = -0{\cdot}7$ m.

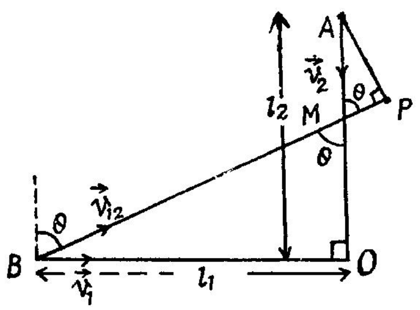
Do đó, bu-lông dịch chuyển xuống tương đối đối với điểm mà bu-lông bắt đầu rơi một lượng 0,7m. Vậy khoảng cách dịch chuyển của bu-lông trong quá trình rơi là

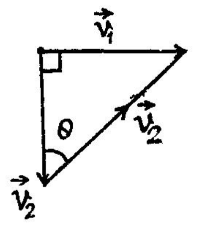
$$s = |\Delta y| + 2\left(\frac{v_0^2}{2g}\right) = 0{\cdot}7\text{ m} + \frac{(2{\cdot}4)^2}{(9{\cdot}8)}\text{m} = 1{\cdot}3\text{ m}.$$

Bài 10: Hai hạt 1 và 2 chuyển động đều với vận tốc v_1 và v_2 dọc theo hai đường thẳng vuông góc nhau và hướng về giao điểm O của hai đường ấy. Tại điểm t = 0, hai hạt ở cách điểm O những khoảng l_1 và l_2. Sau thời gian bao nhiêu, khoảng cách giữa hai hạt là cực tiểu? Khoảng cách cực tiểu ấy bằng bao nhiêu?

ĐS: $l_{min} = |l_1 v_2 - l_2 v_1| / \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Giải: Hạt 1 và 2 tại điểm B và A tại thời điểm t = 0 có khoảng cách l_1 và l_2 từ điểm giao nhau O.





Đặt hệ quy chiếu gắn với hạt 2. Khi này hạt 1 chuyển động tương đối trong hệ quy chiếu này với vận tốc tương đối $\vec{v_{12}} = \vec{v_1} - \vec{v_2}$ và quỹ đạo của nó là đường thẳng BP. Khoảng cách cực tiểu của các hạt là bằng chiều dài đoạn vuông góc AP hạ từ điểm A xuống đường BP (hình vẽ).

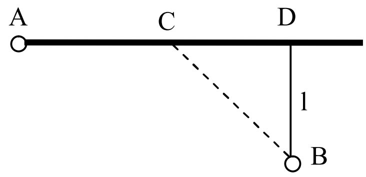
Ta có: $v_{12} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ và $\tan\theta = \dfrac{v_1}{v_2}$

Khoảng cách ngắn nhất: $AP = AM\sin\theta = (OA - OM)\sin\theta = (l_2 - l_1\cot\theta)\sin\theta$

hay $AP = \left(l_2 - l_1\dfrac{v_2}{v_1}\right)\dfrac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \dfrac{v_1 l_2 - v_2 l_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

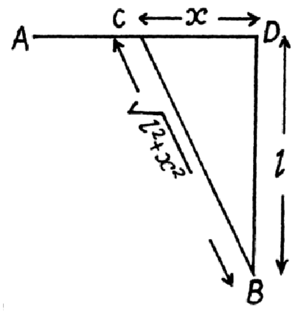
Tính thời gian có thể được thu trực tiếp từ điều kiện $(l_1 - v_1 t)^2 + (l_2 - v_2 t)^2$ là cực tiểu. Điều này cho $t = \dfrac{l_1 v_1 + l_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$.

Bài 11: Một ô-tô xuất phát từ một điểm A trên đường cái, để trong một khoảng thời gian ngắn nhất để đến điểm B trên cánh đồng, khoảng cách từ B đến đường cái là l. Vận tốc của nó chạy trên cánh đồng nhỏ hơn μ lần so với vận tốc của nó chạy trên đường cái. Hỏi ô-tô phải rời đường cái từ điểm D cách điểm C bao nhiêu?



ĐS: $CD = l\sqrt{1-\mu^2}$.

Giải: Gọi x là khoảng cách từ nơi ô-tô rời đường cái đến đến điểm D. CD = x và nếu tốc độ của ô-tô trên cánh đồng là v, thì thời gian ô-tô đi được đoạn AC = AD – x trên đường cái là



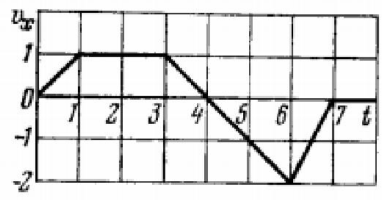
$t_1 = \dfrac{AD - x}{\eta v}$ (1)

Vậy, tổng thời gian ô-tô đi từ A đến B là $t = t_1 + t_2 = \dfrac{AD - x}{\eta v} + \dfrac{\sqrt{l^2 + x^2}}{v}$

Đêt t nhỏ nhất: $\dfrac{dt}{dx} = 0$ or $\dfrac{1}{v}\left[-\dfrac{1}{\eta} + \dfrac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}\right] = 0$

=> $\eta^2 x^2 = l^2 + x^2$ hay $x = \dfrac{l}{\sqrt{\eta^2 - 1}}$

Bài 12: Một vật chuyển động dọc theo trục x với vận tốc mà hình chiếu của v_x phụ thuộc thời gian theo đồ thụ vẽ trong hình bên. Cho biết tại thời điểm t = 0 hoành độ của điểm ấy là x = 0, hãy vẽ gần đúng đồ thi của gia tốc a_x, của hoành độ x và quãng đường của s theo thời gian.



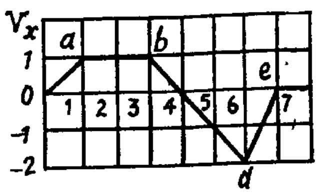
Bài 13: Một điểm đi trên nửa đường tròn bán kính R = 160cm trong khoảng thời gian τ = 10,0s. Trong khoảng thời gian đó, hãy tính:

a) vận tốc trung bình $\langle v\rangle$, $\langle v\rangle = \pi R/\tau = 50cm/s$.

b) độ lớn của vận tốc trung bình $|\langle v\rangle|$, $|\langle v\rangle| = 2R/\tau = 32cm/s$.

c) độ lớn của gia tốc trung bình $|\langle a\rangle|$, biết điểm đó gia tốc tiếp tuyến không đổi. $|\langle a\rangle| = 2\pi R/\tau^2 = 10cm/s^2$.

Giải: Để vẽ đồ thị x(t), s(t) và $w_x(t)$, ta tách đồ thị $v_x(t)$ thành năm phần như hình vẽ. Đối với phần 0a: $w_x = 1$ và $v_x = t = v$.



Do đó, $\Delta x_1(t) = \int v_x\,dt = \int_0^t dt = \dfrac{t^2}{2} = s_1(t)$.

Đặt t = 1, ta được $\Delta x_1 = s = \dfrac{1}{2}$.

Đối với phần ab: $w_x = 0$ và $v_x = v = \text{constant} = 1$

Do đó: $\Delta x_2(t) = \int v_x\,dt = \int_1^t dt = (t-1) = s_2(t)$. Đặt $t = 3,\ \Delta x_2 = s_2 = 2\text{ unit}$

Đối với phần b4: $w_x = 1$ và $v_x = 1 - (t-3) = 4 - t) = v$.

Do đó, $\Delta x_3(t) = \int_3^t (4-t)\,dt = 4t - \frac{t^2}{2} - \frac{15}{2} = s_3(t)$. Đặt $t = 4,\ \Delta x_3 = x_3 = \frac{1}{2}$ unit

Đối với phần b4: $w_x = 1$ và $v_x = 1-(t-3) = 4-t) = v$.

Do đó, $\Delta x_3(t) = \int_3^t (4-t)\,dt = 4t - \frac{t^2}{2} - \frac{15}{2} = s_3(t)$. Đặt $t = 4,\ \Delta x_3 = x_3 = \frac{1}{2}$ unit

Đối với phần 4d: $v_x = -1$ và $v_x = -(1-4) = 4-1$

Vì vậy, $v = |v_x| = t-4$ cho t > 4

Do đó: $\Delta x_4(t) = \int_4^t (1-t)\,dt = 4t - \frac{t^2}{2} - 8$. Đặt $t = 6,\ \Delta x_4 = -1$

Tương tự: $s_4(t) = \int |v_x|\,dt = \int_4^t (t-4)\,dt = \frac{t^2}{2} - 4t + 8$. Đặt $t = 6,\ s_4 = 2$ unit

Đối với phần d7: $w_x = 2$ và $v_x = -2+2(t-6) = 2(t-7)$, $v = |v_x| = 2(7-t)$ cho t < 7.

Bây giờ, $\Delta x(t) = \int_t^6 2\ (t-7)\,dt = t^2 - 14t + 48$. Đặt $t = 4,\ \Delta x_5 = -1$.

Tương tự : $s_5(t) = \int_t^6 2(7-t)\,dt = 14t - t^2 - 48$. Đặt $t = 7,\ s_5 = 1$.

Dựa trên những biểu thức thu được $w_x(t)$, x(t) và s(t) ta vẽ được đồ thị của chúng.

Bài 14: Bán kính vec-tơ của một hạt biến thiên theo thời gian với quy luật $\vec{r} = \vec{a}t(1-\alpha t)$. Trong đó $\vec{a}$ là một vec-tơ không đổi và α là một hằng số dương. Hãy xác định:

a) các vec-tơ vận tốc $\vec{v}$, gia tốc $\vec{w}$ của hạt theo thời gian,

b) khoảng thời gian Δt để hạt trở về điểm xuất phát ban đầu và quãng đường s trong khoảng thời gian ấy.

ĐS: a) $\vec{v} = \vec{a}(1-2\alpha t)$; $\vec{w} = -2\alpha\vec{a} = const$. b) Δt = 1/α; s = a/2α.

Giải: a) Ta có $\vec{r} = \vec{a}t(1-\alpha t)$. Vì vậy $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}(1-2\alpha t)$ và $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\alpha\vec{a}$.

b) Từ biểu thức: $\vec{r} = \vec{a}t(1-\alpha t)$, , $\vec{r} = 0$ tại t = 0 và cũng thỏa mãn tại $t = \Delta t = \frac{1}{\alpha}$.

Vì vậy $t = \Delta t = \frac{1}{\alpha}$.

Vì $\vec{v} = \vec{a}(1-2\alpha t)$. Vì vậy :

$$v = |\vec{v}| = \left.\begin{matrix} a(1-2\alpha t) \\ a(2\alpha t - 1) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{for } t \le \frac{1}{2\alpha} \\ \text{for } t > \frac{1}{2\alpha} \end{matrix}$$

Ta được: $s = \int v\,dt = \int_0^{1/2\alpha} a(1-2\alpha t)\,dt + \int_{1/2\alpha}^{1/\alpha} a(2\alpha t - 1)\,dt$. Đơn giản, ta được $s = \frac{a}{2\alpha}$.

Bài 15: Tại thời điểm t = 0 một hạt xuất phát từ gốc tọa độ đi theo chiều dương của trục x. Vận tốc của hạt biến thiên theo thời gian bằng quy luật $\vec{v} = \vec{v}_0(1-t/\tau)$, trong đó $\vec{v}_0$ là vận tốc ban đầu (v_0 = 10,0cm/s), τ = 5,0s. Hãy xác định:

a) hoành độ x của hạt tại các thời điểm 6,0s, 10s và 20s;

b) các thời điểm mà tại đó hạt cách gốc tọa độ 10,0cm;

c) quãng đường s mà hạt đi được sai 4,0s và 8,0s đầu tiên; vẽ gần đúng đồ thị của s(t);

ĐS: a) $x = v_0 t(1-t/2\tau)$; b) 1,1s; 9s; 11s. c) $s = \begin{cases} v_0 t(1-t/2\tau), t \le \tau \\ (v_0\tau/2)\left[1+(1-t/\tau)^2\right], t \ge \tau \end{cases}$.

Giải: Vì hạt bắt đầu chuyển động từ gốc tại t = 0. Vì vậy $\Delta x = x = \int v_x\,dt$ (1)

Vì $\vec{v} = \vec{v_0}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$, với $\vec{v_0}$ hướng theo trục dương x. Vì vậy: $v_x = v_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$ (2)

Từ (1) và (2), $x = \int_0^t v_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) dt = v_0 t\left(1 - \frac{t}{2\tau}\right)$ (3)

Tọa độ x của hạt tại t = 6s: $x = 10 \times 6\left(1 - \frac{6}{2 \times 5}\right) = 24\text{ cm} = 0{\cdot}24\text{ m}$

Tương tự tại t = 10s: $x = 10 \times 10\left(1 - \frac{10}{2 \times 5}\right) = 0$

và tại t = 20s: $x = 10 \times 20\left(1 - \frac{20}{2 \times 5}\right) = -200\text{ cm} = -2\text{ m}$

b) Tại thời điểm hạt ở khoảng cách 10cm từ gốc tọa độ, $x = \pm 10$ cm. Đặt $x = +10$ vào (3)

$10 = 10t\left(1 - \frac{t}{10}\right)$ or, $t^2 - 10t + 10 = 0$, => $t = t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 40}}{2} = 5 \pm \sqrt{15}$ s

Bây giờ đặt $x = -10$ vào (3) $-10 = 10\left(1 - \frac{t}{10}\right)$, => $t = 5 \pm \sqrt{35}$ s

Vì t không âm, nên $t = (5 + \sqrt{35})$ s

Do đó hạt tại khoảng các 10 cm từ gốc tọa độ tại 3 thời điểm: $t = 5 \pm \sqrt{15}$ s, $5 + \sqrt{35}$ s

c) Ta có: $\vec{v} = \vec{v_0}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$. Ta được:

$$v = |\vec{v}| = \left.\begin{matrix} v_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) & \text{for } t \le \tau \\ v_0\left(\frac{t}{\tau} - 1\right) & \text{for } t > \tau \end{matrix}\right\}$$

Vì vậy : $s = \int_0^t v_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) dt \text{ for } t \le \tau = v_0 t(1 - t/2\tau)$

và $s = \int_0^\tau v_0\left(1 - \frac{t}{2}\right) dt + \int_\tau^t v_0\left(\frac{t}{\tau} - 1\right) dt \text{ for } t > \tau$ $= v_0 \tau [1 + (1 - t/\tau)^2]/2 \text{ for } t > \tau$ (4)

$$s = \int_0^4 v_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) dt = \int_0^4 10\left(1 - \frac{t}{5}\right) dt = 24\text{ cm.}$$

Và cho t = 8s : $s = \int_0^5 10\left(1 - \frac{t}{5}\right) dt + \int_5^8 10\left(\frac{t}{5} - 1\right) dt$. Ta được s = 34cm

Dựa trên biểu thức (3), (4), đồ thị x(t) và s(t) có thể được vẽ.

Bài 16: Một hạt chuyển động theo chiều dương của trục x với vận tốc sao cho $v = a\sqrt{x}$, trong đó a là một hằng số dương, biết tại thời điểm t = 0 hạt ở vị trí x = 0, hãy xác định:

a) vận tốc và gia tốc của hạt theo thời gian, $v = a^2t/2$; $w = a^2/2$.

b) vận tốc trung bình của hạt trong khoảng thời gian từ vị trí x = 0 đến vị trí x. $\langle v \rangle = a\sqrt{x}/2$.

Giải: Vì hạt chỉ chuyển động một chiều, nó chuyển động theo trục x. Tại t = 0 thì x = 0.

Vì vậy $\Delta x = x = s$; và $\frac{dv}{dt} = w$.

Do đó, $v = \alpha\sqrt{x} = \alpha\sqrt{s}$. Hay $w = \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{s}}\frac{ds}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{s}} = \frac{\alpha v}{2\sqrt{s}} = \frac{\alpha\alpha\sqrt{s}}{2\sqrt{s}} = \frac{\alpha^2}{2}$

Tích phân: $\int_0^v dv = \int_0^t \frac{\alpha^2}{2} dt$ or, $v = \frac{\alpha^2}{2} t$

b) t là thời gian hạt đi được s(m) đầu tiên. Từ biểu thức $s = \int v\, dt$

$$s=\int_0^t \frac{\alpha^2}{2}\,dt=\frac{\alpha^2}{2}\frac{t^2}{2} \quad \text{hay} \quad t=\frac{2}{\alpha}\sqrt{s}$$

Vận tốc trung bình của hạt

$$<v>=\frac{\int v(t)\,dt}{\int dt}=\frac{\int_0^{2\sqrt{s}/\alpha}\frac{\alpha^2}{2}\,t\,dt}{2\sqrt{s}/\alpha}=\frac{\alpha\sqrt{s}}{2}$$

Bài 17: Một điểm chuyển động chậm dần trên một đường thẳng với gia tốc có độ lớn w phụ thuộc vào vận tốc theo quy luật $w=a\sqrt{v}$, trong đó a là hằng số dương, tại thời điểm ban đầu vận tốc của hạt là v_0. Hỏi quãng đường hạt đi được cho đến khi dừng lại? Thời gian để đi được quãng đường ấy?

ĐS: a) $s=(2/3a)v_0^{3/2}$; b) $t=(2/a)\sqrt{v_0}$.

Giải: Theo đề ra $-\frac{v\,dv}{ds}=a\sqrt{v}$ (vì v giảm theo thời gian). Hay $-\int_{v_0}^{0}\sqrt{v}\,dv=a\int_0^s ds$

Tích phân ta được: $s=\frac{2}{3a}v_0^{3/2}$

Theo bài ra $-\frac{dv}{dt}=a\sqrt{v}$. Hay $-\frac{dv}{\sqrt{v}}=a\,dt$ hay $\int_{v_0}^{0}\frac{dv}{\sqrt{v}}=a\int_0^t dt$. Vì vậy $t=\frac{2\sqrt{v_0}}{a}$

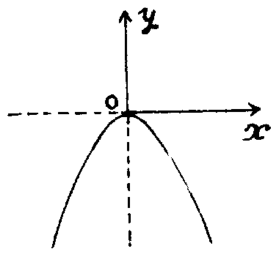
Bài 18: Bán kính vec-tơ của một điểm A đối với gốc tọa độ biến thiên theo thời gian với quy luật $\vec{r}=at\vec{i}-bt^2\vec{j}$, trong đó $\vec{i}$, $\vec{j}$ là các các vec-tơ đơn vị trên trục x và y; a và b là hai hằng số dương. Hãy xác định:

a) phương trình quỹ đạo y(x) của điểm đó; vẽ đồ thị của nó;

b) vận tốc $\vec{v}$, gia tốc $\vec{w}$ và độ lớn của chúng theo thời gian.

c) góc α giữa $\vec{v}$ và $\vec{w}$.

d) vec-tơ vận tốc trung bình trong t giây đầu tiên và độ lớn của vec-tơ đó.



Giải: Vì $\vec{r}=at\vec{i}-bt^2\vec{j}$ nên $x=at,\ y=-bt^2$ và do đó $y=\frac{-bx^2}{a^2}$

mà là phương trình parabol, đồ thị được biểu diễn trong hình.

b) Vì $\vec{r}=at\vec{i}-bt^2\vec{j}$. Nên $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=a\vec{i}-2bt\vec{j}$ (1)

Vì vậy $v=\sqrt{a^2(-2bt)^2}=\sqrt{a^2+4b^2t^2}$

Đạo hàm (1) theo thời gian ta được $\vec{w}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-2b\vec{j}$ => $|\vec{w}|=w=2b$

c) $\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{vw}=\frac{(a\vec{i}-2bt\vec{j})\cdot(-2b\vec{j})}{\left(\sqrt{a^2+4b^2t^2}\right)2b}$ hay $\cos\alpha=\frac{2bt}{\sqrt{a^2+4b^2t^2}}$. Vì vậy $\tan\alpha=\frac{a}{2bt}$ hay $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{a}{2bt}\right)$

d) Vec-tơ vận tốc trung bình

$$<\vec{v}>=\frac{\int\vec{v}dt}{\int dt}=\frac{\int_0^t(a\vec{i}-2bt\vec{j})dt}{t}=a\vec{i}-bt\vec{j}$$

. Do đó: $|<\vec{v}>|=\sqrt{a^2+(-bt)^2}=\sqrt{a^2+b^2t^2}$.

Bài 19: Chuyển động của một chất điểm trong mặt phẳng xy được mô tả bởi quy luật x = at, y = at(1 – αt), với a và α là những hằng số dương, t là thời gian. Hãy xác định:

a) phương trình quỹ đạo y(x) của điểm đó; vẽ đồ thị của nó;

b) vận tốc v và gia tốc w của điểm đó theo t;

c) thời điểm t_0 tại đó vec-tơ vận tốc và gia tốc hợp một góc π/4.

Giải: a) Ta có x = at và y = at(1 – αt) (1). Do đó, y(x) trở thành $y=\frac{ax}{a}\left(1-\frac{\alpha x}{a}\right)=x-\frac{\alpha}{a}x^2$ (parabola)

b) Đạo hàm (1) ta được: $v_x = a$ và $v_y = a(1-2\alpha t)$ (2). Vì vậy $v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = a\sqrt{1+(1-2\alpha t)^2}$

Đạo hàm (2) theo thời gian ta được $w_x = 0$ và $w_y = -2a\alpha$. Vì vậy $w = \sqrt{w_x^2+w_y^2} = 2a\alpha$

c) Từ (2) và (3) ta được: $\vec{v} = a\vec{i} + a(1-2\alpha t)\vec{j}$ và $\vec{w} = 2a\alpha\vec{j}$

Vì vậy: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{vw} = \frac{-a(1-2\alpha t_0)2a\alpha}{a\sqrt{1+(1-2\alpha t_0)^2}\,2a\alpha}$. Ta được $1-2\alpha t_0 = \pm 1$ vì $t_0 \neq 0$, $t_0 = \frac{1}{\alpha}$

Bài 20: Một điểm chuyển động trong mặt phẳng xy theo quy luật x = a sin ωt, y = a(1 – cos ωt), với a, ω là các hằng số dương. Hãy xác định:

a) quãng đường s của điểm đó sau một thời gian τ;

b) góc giữa vec-tơ vận tốc và gia tốc của điểm đó.

Giải: Đạo hàm $x = a\sin\omega t$, $y = a(1-\cos\omega t)$ theo thời gian ta được $v_x = a\omega\cos\omega t$, $v_y = a\omega\sin\omega t$

Vì vậy $\vec{v} = a\omega\cos\omega t\,\vec{i} + a\omega\sin\omega t\,\vec{j}$ (1)

và $v = a\omega = \text{Const.}$ (2)

Đạo hàm (1) theo thời gian: $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -a\omega^2\sin\omega t\,\vec{i} + a\omega^2\cos\omega t\,\vec{j}$ (3)

a) Quảng đường di chuyển s trong thời gian τ được cho bởi $s = \int_0^\tau v\,dt = \int_0^\tau a\omega\,dt = a\omega\tau$.

b) Dựa vào tích của $\vec{v}$ và $\vec{w}$.

Ta có $\vec{v}\cdot\vec{w} = (a\omega\cos\omega t\,\vec{i} + a\omega\sin\omega t\,\vec{j})\cdot(a\omega^2\sin\omega t(-i) + a\omega^2\cos\omega t - \vec{j})$

Vì vậy $\vec{v}\cdot\vec{w} = -a^2\omega^2\sin\omega t\cos\omega t + a^2\omega^3\sin\omega t\cos\omega t = 0$.

Do đó $\vec{v}\perp\vec{w}$, tức là góc giữa vec-tơ vận tốc và gia tốc là π/2.

Bài 21: Một hạt chuyển động trong mặt phẳng xy với vec-tơ $\vec{w}$ gia tốc không đổi, có hướng ngược với chiều dương của trục y. Phương trình quỹ đạo của hạt có dạng $y = ax - bx^2$, với a, b là hai hằng số dương. Hãy xác định vận tốc của hạt tại gốc tọa độ.

Giải: Theo bài ra $\vec{w} = w(-\vec{j})$

Vì vậy $w_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$ và $w_y = \frac{dv_y}{dt} = -w$ (1)

Đạo hàm $y = ax - bx^2$ theo phương trình, ta được $\frac{dy}{dt} = \frac{a\,dx}{dt} - 2bx\frac{dx}{dt}$ (2)

Vì vậy $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=0} = a\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0}$. Đạo hàm một lần nữa, ta được

$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a\,d^2x}{dt^2} - 2b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2bx\frac{d^2x}{dt^2}$ hay $-w = a(0) - 2b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2bx(0)$ (sử dụng 1)

hay $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{w}{2b}}$ (using 1) (3)

Sử dụng (3) vào (2) $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=0} = a\sqrt{\frac{w}{2b}}$ (4)

Do đó, vận tốc của hạt tại gốc $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=0}^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=0}^2} = \sqrt{\frac{w}{2b} + a^2\frac{w}{2b}}$ (sử dụng 3 và 4)

Vậy, $v = \sqrt{\frac{w}{2b}(1+a^2)}$

Bài 22: Một vật được ném xiên góc với đường nằm ngang với vận tốc đầu v_0. Giả sử sức cản không khí bằng không, hãy xác định:

a) độ dời của vật theo thời gian $\vec{r}(t)$,

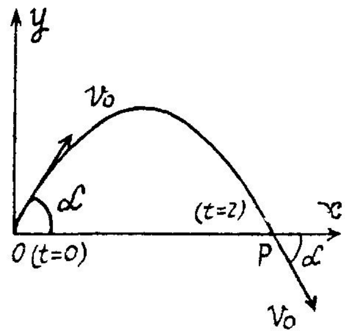
b) vec-tơ vận tốc trung bình $\langle\vec{v}\rangle$ trong t giây đầu tiên và cả trong quá trình chuyển động.

Giải: Vì vật chịu tác dục của trọng lực nên có gia tốc g, vec-tơ vận tốc và vec-tơ dịch chuyển của nó là

$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{g}t$ (1) và $\Delta\vec{r} = \vec{r} = \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ $(\vec{r} = 0 \text{ at } t = 0)$ (2)

Vì vậy $\langle\vec{v}\rangle$ trên t giây đầu tiên $\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}}{t} = \vec{v_0} + \frac{\vec{g}t}{2}$ (3)

Từ (3), $\langle\vec{v}\rangle$ trên τ giây đầu tiên $\langle\vec{v}\rangle = \vec{v_0} + \frac{\vec{g}}{2}\tau$ (4)



Ta có $\vec{v}\cdot\vec{v} = (\vec{v_0} + \vec{g}t)\cdot(\vec{v_0} + \vec{g}t) = v_0^2 + 2(\vec{v_0}\cdot\vec{g})t + g^2t^2$ hay $v^2 = v_0^2 + (\vec{v_0}\cdot\vec{g})t + g^2t^2$

Nhưng ta có $v = v_0$ tại t = 0 và cũng tại t = τ (cũng từ bảo toàn năng lượng).

Sử dụng tính chất trong (5) $v_0^2 = v_0^2 + 2(\vec{v_0}\cdot\vec{g})\tau + g^2\tau^2$

Vì $\tau \neq 0$ nên $\tau = -\frac{2(\vec{v}_o\cdot\vec{g})}{g^2}$

Đặt giá trị này vào (4), vận tốc trung bình trên thời gian bay là $\langle\vec{v}\rangle = \vec{v_0} - \vec{g}\frac{(\vec{v_0}\cdot\vec{g})}{g^2}$

Bài 23: Một vật được ném lên với vận tốc đầu v_0, hợp với phương ngang một góc α. Bỏ qua sức cản không khí, hãy xác định:

a) khoảng thời gian chuyển động;

b) chiều cao và tầm xa cực đại, góc bắn α để chúng bằng nhau;

c) phương trình quỹ đạo y(x);

d) bán kính cong tại gốc và tại đỉnh quỹ đạo.

Giải: Vật chuyển động trong không khí với vận tốc v_0 tại góc ném α từ mặt nằm ngang tại điểm P trên bề mặt Trái Đất ở cùng mức ngang. Điểm ném là gốc tọa độ, vì vậy $\Delta x = x$ và $\Delta y = y$.

a) Từ biểu thức $\Delta y = v_{0y}t + \frac{1}{2}w_y t^2$. Ta được $0 = v_0 \sin\alpha\,\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$. Vì $\tau \neq 0$, nên thời gian chuyển động $\tau = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$

b) Tại độ cao cực đại $v_y = 0$. Từ biểu thức $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2w_y\Delta y$ => $0 = (v_0\sin\alpha)^2 - 2gH$.

Do đó, độ cao cực đại $H = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

Trong thời gian chuyển động, độ dời theo phương ngang thu được bởi biểu thức $\Delta x = v_{0x}t + \frac{1}{2}w_x\tau^2$

Hay $R = v_0\cos\alpha\,\tau - \frac{1}{2}(0)\tau^2 = v_0\cos\alpha\,\tau = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$.

Khi R = H: $\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$. Hay $\tan\alpha = 4$, vì vậy $\alpha = \tan^{-1}4$

c) Biểu thức cho x(t) và y(t) là $x = v_0\cos\alpha\,t$ (1) và $y = v_0\sin\alpha\,t - \frac{1}{2}gt^2$ (2)

Đặt giá trị của t từ (1) vào (2), ta được

$y = v_0\sin\alpha\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$, là phương trình quỹ đạo của vật.

d) Vật được ném trong không khí có quỹ đạo cong, nó có gia tốc pháp tuyến tại tất cả các thời điển trong thời gian chuyển động.

Tại điểm ban đầu (x = 0, y = 0), từ $w_n = \frac{v^2}{R}$ (R là bán kính cong), ta được $g\cos\alpha = \frac{v_0^2}{R_0}$ => $R_0 = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}$

Tại đỉnh $v_y = 0,\ v = v_x = v_0\cos\alpha$ gia tốc góc bằng không.

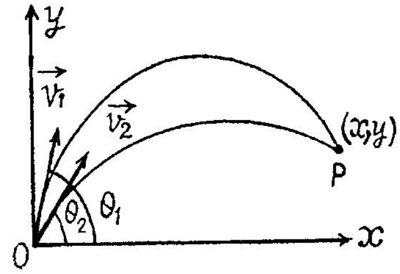
Từ $w_n = \frac{v^2}{R}$ => $g = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{R}$ => $R = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$

Lưu ý: Ta có thể sử dụng cong thức bán kính cong của quỹ đạo y(x), giải ở phần d),

$$R = \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|d^2y/dx^2\right|}$$

Bài 24: Hai viên đạn lần lượt được bắn lên bởi một súng đại bác với vận tốc v_0 = 250m/s; một viên bắn dưới góc $\varphi_1 = 60^o$, viên kia bắn dưới góc $\varphi_2 = 45^o$ (cùng trong một mặt phẳng bắn). Bỏ qua sức cản không khí, hãy xác định khoảng thời gian giữa hai lần bắn để cho hai viên gặp nhau.

Giải: Giả sử hai viên đạn va chạm với nhau tại điểm P(x,y). Nếu viên đạn thứ nhất đi trong thời gian t(s) tới va chạm với viên đạn thứ hai và Δt là khoảng thời gian giữa hai lần bắn, thì



$x = v_0 \cos\theta_1 t = v_0 \cos\theta_2 (t - \Delta t)$ (1)

và $y = v_0 \sin\theta_1 t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin\theta_2 (t - \Delta t) - \frac{1}{2} g (t - \Delta t)^2$ (2)

Từ (1) $t = \frac{\Delta t \cos\theta_2}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}$ (3)

Từ (2) và (3) $\Delta t = \frac{2 v_0 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{g(\cos\theta_2 + \cos\theta_1)}$ as $\Delta t \neq 0$

Bài 25: Một khí cầu bay lên từ mặt đất. Vận tốc lên không đổi và bằng v_0. Gió truyền cho khí cầu một thành phần vận tốc v_x = ay trong đó a là một hằng số và y là độ cao. Xác định theo độ cao:

a) giá trị độ dạt của khí cầu x(y);

b) nhưng gia tốc toàn phần, tiếp tuyến và pháp tuyến của khí cầu.

Giải: a) Theo bài ra ta có $\frac{dy}{dt} = v_0$ hay $dy = v_0 dt$. Tích phân:

$$\int_0^y dy = v_0 \int_0^t dt \text{ or } y = v_0 t \quad (1)$$

Và ta cũng có $\frac{dx}{dt} = ay$ hay $dx = a y dt = a v_0 t dt$ (sử dụng 1).

Vì vậy $\int_0^x dx = a v_0 \int_0^t t\, dt,$ hay $x = \frac{1}{2} a v_0 t^2 = \frac{1}{2} \frac{a y^2}{v_0}$ (sử dụng 1)

b) Theo bài ra $v_y = v_0$ và $v_x = a y$ (2). Vì vậy $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + a^2 y^2}$

Do đó: $w_t = \frac{dv}{dt} = \frac{a^2 y}{\sqrt{v_0^2 + a y^2}} \frac{dy}{dt} = \frac{a^2 y}{\sqrt{1 + (ay/v_0)^2}}$

Đạo hàm (2) theo thời gian: $\frac{d v_y}{dt} = w_y = 0$ và $\frac{d v_x}{dt} = w_x = a \frac{dy}{dt} = a v_0$. Vì vậy $w = |w_x| = a v_0$

Do đó: $w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2} = \sqrt{a^2 v_0^2 - \frac{a^4 y^2}{1 + (ay/v_0)^2}} = \frac{a v_0}{\sqrt{1 + (ay/v_0)^2}}$

Bài 26: Một hạt chuyển động trong mặt phẳng xy với vận tốc $\vec{v} = a\vec{i} + bx\vec{j}$, a, b là các hằng số. Tại thời điểm ban đầu, hạt ở vị trí x = y = 0. Hãy xác định:

a) phương trình quỹ đạo của hạt y(x);

b) bán kính cong của quỹ đạo theo x.

Giải: a) Vec-tơ vận tốc của hạt $\vec{v} = a\vec{i} + bx\vec{j}$. Vì vậy $\frac{dx}{dt} = a : \frac{dy}{dt} = bx$ (1)

Từ (1): $\int_0^x dx = a \int_0^t dt$ or, $x = at$ (2). Và $dy = bx\, dt = bat\, dt$. Tích phân ta được

$$\int_0^y dy = ab \int_0^t t\, dt \text{ or, } y = \frac{1}{2} ab t^2 \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta được $y = \frac{b}{2a} x^2$ (4)

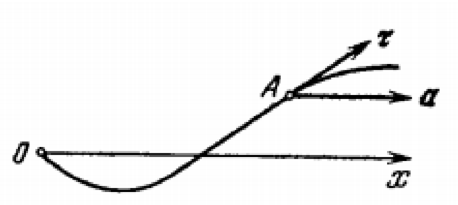
b) Bán kính cong của quỹ đạo y(x) là:

$$R = \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|d^2 y / dx^2|} \quad (5)$$

Đạo hàm $y = \frac{b}{2a}x^2$ theo x : $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}x$ và $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{a}$ (6)

Từ (5) và (6), ta được bán kính cong: $R = \frac{a}{b}\left[1 + \left(\frac{b}{a}x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

Bài 27: Một hạt vạch một quỹ đạo cho trước với gia tốc tiếp tuyến $w_t = \vec{a}\vec{\tau}$, trong đó $\vec{a}$ là một vec-tơ không đổi, có phương trùng với phương trục x và $\vec{\tau}$ là vec-tơ đơn vị, có phương trùng với phương của vec-tơ vận tốc tại điểm xét. Hãy xác định vận tốc của hạt theo x, biết tại x = 0 vận tốc đó bằng 0.



Giải: Theo bài ra: $w_t = \vec{a}\cdot\vec{\tau}$. Mà $w_t = \frac{v\,dv}{ds}$ hay $v\,dv = w_t\,ds$

Vì vậy: $v\,dv = (\vec{a}\cdot\vec{\tau})\,ds = \vec{a}\cdot d\vec{r}$, hay $v\,dv = a\,\vec{i}\cdot d\vec{r} = a\,dx$ (vì $\vec{a}$ hướng theo chiều dương của trục x).

Nên: $\int_0^v v\,dv = a\int_0^x dx$. Do đó $v^2 = 2\,ax$ hay $v = \sqrt{2\,ax}$

Bài 28: Một chất điểm chuyển động trên một đường tròn với vận tốc v = at với a = 0,5m/s^2. Hãy tính gia tốc toàn phần của điểm đó tại thời điểm nó đa đi dược n = 0,10 chiều dài dải vòng tròn, kể từ lúc bắt đầu chuyển động.

Giải: Vận tốc của hạt v = at. Vì vậy: $\frac{dv}{dt} = w_t = a$ (1). Và $w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2t^2}{R}$ (sử dụng v = at) (2)

Từ $s = \int v\,dt$ => $2\pi R\eta = a\int_0^t v\,dt = \frac{1}{2}at^2$ => $\frac{4\pi\eta}{a} = \frac{t^2}{R}$ (3)

Từ (2) và (3) $w_n = 4\pi a\eta$. Do đó: $w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = \sqrt{a^2 + (4\pi a\eta)^2} = a\sqrt{1 + 16\pi^2\eta^2} = 0{\cdot}8\ m/s^2$

Bài 29: Một chất điểm chuyển động chậm dần trên một đường tròn bán kính R, sao cho tại mỗi điểm các gia tốc tiếp tuyến và pháp tuyến của nó có độ lớn bằng nhau. Tại thời điểm ban đầu t = 0, vận tốc của chất điểm là v_0. Hãy xác định:

a) vận tốc của diểm theo thời gian và quãng đường s;

b) gia tốc toàn phần theo vận tốc và quãng đường đi.

Giải: Theo bài ra $|w_t| = |w_n|$. Đối với v(t), $\frac{-dv}{dt} = \frac{v^2}{R}$.

Tích phân biểu thức từ $v_0 \le v \le v$ và $0 \le t \le t$:

$$-\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = \frac{1}{R}\int_0^t dt \text{ or, } v = \frac{v_0}{\left(1 + \frac{v_0 t}{R}\right)}$$

Đối với v(s), $-\frac{v\,dv}{ds} = \frac{v^2}{R}$. Tích phân biểu thức từ $v_0 \le v \le v$ và $0 \le s \le s$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{1}{R}\int_0^s ds \text{ or, } \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{s}{R}$$

. Do đó $v = v_0 e^{-s/R}$ (2)

b) Gia tốc pháp tuyến của điểm: $w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2 e^{-2s/R}}{R}$ (sử dụng 2)

Theo bài ra $|w_t| = |w_n|$ và $w_t\hat{u}_t \perp w_n\hat{u}_n$. Vì vậy $w = \sqrt{2}\,w_n = \sqrt{2}\,\frac{v_0^2}{R}e^{-2s/R} = \sqrt{2}\,\frac{v^2}{R}$

Bài 30: Một điểm chuyển động theo một cung tròn bán kính R. Vận tốc của điểm đó phụ thuộc quãng đường s theo quy luật $v = a\sqrt{s}$, trong đó a là hằng số. Tính góc α của vec-tơ gia tốc toàn phần và vec-tơ vận tốc theo s.

Giải: Từ biểu thức $v = a\sqrt{s}$, $w_t = \frac{dv}{dt} = \frac{a}{2\sqrt{s}}\frac{ds}{dt} = \frac{a}{2\sqrt{s}}a\sqrt{s} = \frac{a^2}{2}$, và $w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2 s}{R}$

Vì w_t là hằng số dương, tốc độ của hạt tăng theo thời gian vec-tơ gia tốc tiếp tuyến và vec-tơ vận tốc trùng hướng với nhau. Do đó, góc giữa $\vec{v}$ và $\vec{w}$ là bằng với góc giữa $w_t\hat{u}_t$ và $\vec{w}$, và α có thể được tìm qua công thức:
$\tan\alpha = \frac{|w_n|}{|w_t|} = \frac{a^2 s/R}{a^2/2} = \frac{2s}{R}$

Bài 31: Một hạt chuyển động trên một cung tròn bán kính R theo quy luật l = a sin ωt, trong đó l là quãng đường đi được trên cung tròn tính từ vị trí ban đầu, a và ω là những hằng số. Cho R = 1,00m; a = 0,80m; ω = 2,00rad/s. Hãy xác định:

a) gia tốc toàn phần của hạt tại các điểm l = 0 và l = ±a;

b) giá trị cực tiểu của gia tốc toàn phần w_{min} và quãng đường đi l_{min} tương ứng.

Giải: Từ biểu thức $l = a\sin\omega t$ => $\frac{dl}{dt} = v = a\omega\cos\omega t$. Vì vậy $w_t = \frac{dv}{dt} = -a\omega^2\sin\omega t$ (1)

và $w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2\omega^2\cos^2\omega t}{R}$ (2)

a) Tại điểm $l = 0, \sin\omega t = 0$ và $l = 0, \sin\omega t = 0$, $\omega t = 0, \pi$. Do đó: $w = w_n = \frac{a^2\omega^2}{R}$

Tương tự tại $l = 0, \sin\omega t = 0$ và $\cos\omega t = 0$, vì vậy $w_n = 0$. Do đó $w = |w_t| = a\omega^2$

Bài 32: Một hạt chuyển động trong một mặt phẳng với gia tốc tiếp tuyến $w_t = a$ và gia tốc pháp tuyến $w_n = bt^4$, trong đó a, b là những hằng số dương và t là thời gian. Tại thời điểm t = 0, điểm đó dứng yên. Hãy xác định bán kính cong của quỹ đạo và gia tốc toàn phần w theo s.

Giải: Vì $w_t = a$ tại t = 0, là vị trí dừng. Vì vậy v(t) và s(t) là v = at và $s = \frac{1}{2}at^2$ (1)

Gọi R là bán kính cong, $w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2t^2}{R} = \frac{2as}{R}$ (sử dụng 1)

Nhưng theo bài ra $w_n = bt^4$ nên $bt^4 = \frac{a^2t^2}{R}$ hay $R = \frac{a^2}{bt^2} = \frac{a^2}{2bs}$ (sử dụng 1)

Do đó $w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = \sqrt{a^2 + (2as/R)^2} = \sqrt{a^2 + \left(4bs^2/a^2\right)^2}$ (sử dụng 2). Vậy $w = a\sqrt{1 + \left(4bs^2/a^3\right)^2}$

Bài 33: Một hạt chuyển động trên một quỹ đạo phẳng y(x) với vận tốc v có độ lớn không đổi. Hãy xác định gia tốc hạt và bán kính cong của quỹ đạo tại điểm x = 0, nếu quỹ đạo đó có dạng:

a) một parabol $y = ax^2$;

b) Một elip $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, a, b là những hằng số.

Giải : a) Đạo hàm bậc hai phương trình quỹ đạo y(x) theo thời gian

$$\frac{dy}{dt} = 2ax\frac{dx}{dt};\ \frac{d^2y}{dt^2} = 2a\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x\frac{d^2x}{dt^2}\right]$$

Vì hạt chuyển động đều, gia tốc của nó tại tất cả các điểm của quỹ đạo là pháp tuyến và tại điểm x = 0 nó trùng với hướng của đạo hàm d^2y/dt^2. Tại điểm x = 0, $\left|\frac{dx}{dt}\right| = v$.

Ta có $w = \left|\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{x=0} = 2av^2 = w_n$ => $w_n = 2av^2 = \frac{v^2}{R}$, or $R = \frac{1}{2a}$

b) Đạo hàm phương trình quỹ đạo theo thời gian ta được $b^2x\frac{dx}{dt} + a^2y\frac{dy}{dt} = 0$ (1)

mà hàm ý rằng vec-tơ $(b^2x\vec{i} + a^2y\vec{j})$ là vuông góc với vec-tơ vận tốc $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$ theo phương tiếp tuyến. Do đó vec-tơ cuộn là dọc theo pháp tuyến và thành phần pháp tuyến là

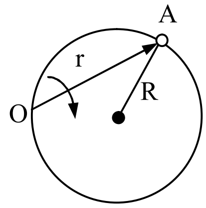
$$w_n = \frac{b^2x\frac{d^2x}{dt^2} + a^2y\frac{d^2y}{dt^2}}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{1/2}}$$

sử dụng $w_n = \vec{w}\cdot\vec{n}/|\vec{n}|$. Tại $x = 0, y = \pm b$ và cũng tại x = 0 : $w_n = \pm\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{x=0}$

Đạo hàm (1) $b^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + b^2x\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + a^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + a^2y\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$

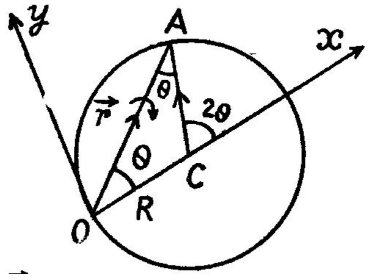
Và cũng từ (1) $\frac{dy}{dt}=0$ at $x=0$ nên $\left(\frac{dx}{dt}\right)=\pm v$ (vì vec-tơ tiếp tuyến là hằng số = v)

Do đó $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\pm\frac{b}{a^2}v^2$ và $|w_n|=\frac{bv^2}{a^2}=\frac{v^2}{R}$. Điều này cho $R=a^2/b$.



Bài 34: Một hạt chuyển động trên một đường tròn bán kính R = 50cm sao cho bán kính vec-tơ r của hạt đối với điểm O quay đều với vận tốc góc ω = 0,40rad/s. Hãy xác định độ lớn vận tốc của hạt và độ lớn cùng với hướng của vec-tơ gia tốc toàn phần của nó.

Giải: Ta đặt hệ tọa độ tại điểm O như hình vẽ, vec-tơ $\vec{r}$ của điểm A tạo một góc θ với trục x tại mọi thời điểm.



Lưu ý rằng vec-tơ bán kính của hạt A quay theo chiều kim đồng hồ và ta lấy đường Ox là đường chuẩn, vì trong trường hợp này vận tốc góc $\omega=\left(-\frac{d\theta}{dt}\right)$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ của dịch chuyển góc theo chiều dương.

Từ tam giác OAC: $\frac{R}{\sin\theta}=\frac{r}{\sin(\pi-2\theta)}$ hay $r=2R\cos\theta$.

Ta viết: $\vec{r}=r\cos\theta\,\vec{i}+r\sin\theta\,\vec{j}=2R\cos^2\theta\,\vec{i}+R\sin2\theta\,\vec{j}$

Đạo hàm theo thời gian: $\frac{d\vec{r}}{dt}$ or $\vec{v}=2R\,2\cos\theta(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}\vec{i}+2R\cos2\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{j}$

hay $\vec{v}=2R\left(\frac{-d\theta}{dt}\right)[\sin2\theta\,\vec{i}-\cos2\theta\,\vec{j}]$ => $\vec{v}=2R\omega(\sin2\theta\,\vec{i}-\cos^2\theta\,\vec{j})$ => $|\vec{v}|$ or $v=2\omega R=0{\cdot}4\ m/s$.

Vì ω là hằng số, v cũng là hằng số và $w_t=\frac{dv}{dt}=0$. Vì vậy: $w=w_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(2\omega R)^2}{R}=4\omega^2R=0{\cdot}32\ m/s^2$

Cách khác: Từ hình vẽ, vận tốc góc của điểm A, với tâm tại C trở thành: $-\frac{d(2\theta)}{dt}=2\left(\frac{-d\theta}{dt}\right)=2\omega=$ constant

Do đó ta có thể tìm vận tốc và gia tốc của hạt chuyển động tròn với bán kính R với vận tốc góc không đổi 2 ω:

$v=2\omega R$ và $w=w_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(2\omega R)^2}{R}=4\omega^2R$

Bài 35: Một bánh xe quay xung quanh trục cố định sao cho góc quay phụ thuộc vào thời gian theo quy luật $\varphi=at^2$, với $a=0{,}20rad/s^2$. Hãy xác định gia tốc toàn phần của điểm A trên vành bánh xe tại lúc t = 2,5s, biết rằng lúc đó vận tốc dài của điểm A là v = 0,65m/s.

Giải: Đạo hàm $\varphi(t)$ theo thời gian $\frac{d\varphi}{dt}=\omega_z=2at$ (1)

Đối với trục quay cố định, tốc độ của điểm A: $v=\omega R=2atR$ or $R=\frac{v}{2at}$ (2)

Ta có: $w_t=\frac{dv}{dt}=2aR=\frac{v}{t}$ (sử dụng 1). Mà $w_n=\frac{v^2}{R}=\frac{v^2}{v/2at}=2atv$. Nên

$w=\sqrt{w_t^2+w_n^2}=\sqrt{(v/t)^2+(2atv)^2}=\frac{v}{t}\sqrt{1+4a^2t^4}$

Bài 36: Một vật rắn quay xung quanh một trục cố định theo quy luật $\varphi=at-bt^3$, với a = 6,0rad/s; $b=2{,}0rad/s^3$. Hãy xác định:

a) Giá trị trung bình của vận tốc góc và gia tốc góc trong khoảng thời gian từ lúc t = 0 đến lúc dừng lại;

b) Gia tốc góc lúc vật rắn dừng lại.

Giải: Trục quay là trục z mà chiều dương mà được liên kết với hướng dương của tọa độ góc quay φ (hình vẽ)

a) Đạo hàm $\varphi(t)$ theo t hời gian: $\frac{d\varphi}{dt}=a-3bt^2=\omega_z$ (1) và $\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d\omega_z}{dt}=\beta_z=-6bt$ (2)

Từ (1), vật rắn dừng lại tại $\Delta t=t=\sqrt{\frac{a}{3b}}$

Vận tốc góc $\omega=a-3bt^2$ cho $0\le t\le\sqrt{a/3b}$. Vì vậy

$$< \omega > = \frac{\int \omega\, dt}{\int dt} = \frac{\int_0^{\sqrt{a/3b}} (a - 3bt^2)\, dt}{\int_0^{\sqrt{a/3b}} dt} = [at - bt^3]_0^{\sqrt{a/3b}} \Big/ \sqrt{a/3b} = 2a/3$$

Tương tự $\beta = |\beta_z| = 6bt$ cho tất cả các giả giá trị của t. Vì vậy

$$< \beta > = \frac{\int \beta\, dt}{\int dt} = \frac{\int_0^{\sqrt{a/3b}} 6bt\, dt}{\int_0^{\sqrt{a/3b}} dt} = \sqrt{3ab}$$

b) Từ (2) $\beta_z = -6bt$ nên $(\beta_z)_t = \sqrt{a/3b} = -6b\sqrt{\frac{a}{3b}} = -2\sqrt{ab}$. Do đó $\beta = \left|(\beta_z)_{t=\sqrt{a/3b}}\right| = 2\sqrt{3ab}$

Bài 37: Một vật rắn quay xung quanh một trục cố định với gia tốc góc β = at, với a = 2,0.10^{-2} rad/s^3. Hỏi trong khoảng thời gian bao lâu kể từ lúc chuyển động, vec-tơ gia tốc toàn phần của một điểm bất kì của vật rắn làm một góc α = 60^o với véc-tơ vận tốc của nó.

Giải: Góc α liên hệ với $|w_t|$ và w_n bởi công thức: $\tan\alpha = \frac{w_n}{|w_t|}$, với $w_n = \omega^2 R$ và $|w_t| = \beta R$ (1)

với R là bán kính tròn mà một điểm bất kìn của vật quay quanh trục cố định.

Từ biểu thức $\beta = \frac{d\omega}{dt} = at$ (ở đây $\beta = \frac{d\omega}{dt}$, vì β là dương cho tất cả giá trị của t)

Tích phân giới hạn $\int_0^{\omega} d\omega = a\int_0^t t\,dt$ hay $\omega = \frac{1}{2}at^2$. Vì vậy

$$w_n = \omega^2 R = \left(\frac{at^2}{2}\right)^2 R = \frac{a^2t^4}{4}R \text{ và } |w_t| = \beta R = atR$$

Đặt các giá trị của $|w_t|$ và w_n trong (1), ta được $\tan\alpha = \frac{a^2t^4R/4}{atR} = \frac{at^3}{4}$ or, $t = \left[\left(\frac{4}{a}\right)\tan\alpha\right]^{1/3}$

Bài 38: Một vật rắn quay chậm dần xung quanh một trục cố định với gia tốc góc β ~√ω, với ω là vận tốc góc của nó. Tại thời điểm đầu người ta truyền cho vật rắn vận tốc góc ω_0. Tính vận tốc góc trung bình của vật rắn trong khoảng thời gian chuyển động.91

Giải: Theo bài ra $\beta_z < 0$. Do đó $-\frac{d\omega}{dt} = k\sqrt{\omega}$, với k là hệ số tỉ lệ. Hay $-\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = k\int_0^t dt$ or, $\sqrt{\omega} = \sqrt{\omega_0} - \frac{kt}{2}$ (1)

Với $\omega = 0$,, tổng thời gian quay là $t = \tau = \frac{2\sqrt{\omega_0}}{k}$. Vận tốc góc trung bình

$$< \omega > = \frac{\int \omega\, dt}{\int dt} = \frac{\int_0^{2\sqrt{\omega_0}/k}\left(\omega_0 + \frac{k^2t^2}{4} - kt\sqrt{\omega_0}\right)dt}{2\sqrt{\omega_0}/k} = \left[\omega_0 t + \frac{k^2t^3}{12} - \frac{k}{2}\sqrt{\omega_0}\,t^2\right]_0^{2\sqrt{\omega_0}/k} \Big/ 2\frac{\sqrt{\omega_0}}{k} = \omega_0/3$$

Bài 39: Một vật rắn quay xung quanh trục cố định, vận tốc góc của nó là hàm của góc quay φ sao cho ω = ω_0 – aφ với ω_0, a là những hằng số dương. Tại thời điểm t = 0 thì φ = 0. Hãy xác định theo thời gian:

a) Góc quay;   b) vận tốc góc.

Giải: Ta có $\omega = \omega_0 - a\varphi = \frac{d\varphi}{dt}$. Tích phân biểu thức này theo t cho $(\varphi)\,t$

$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\omega_0 - k\varphi} = \int_0^t dt$ hay $\ln\frac{\omega_0 - k\varphi}{\omega_0} = -kt$. Do đó: $\varphi = \frac{\omega_0}{k}(1 - e^{-kt})$ (1)

b) Từ biểu thức $\omega = \omega_0 - k\varphi$ và biểu thức (1) hoặc bởi đạo hàm biểu thức (1): $\omega = \omega_0 e^{-kt}$

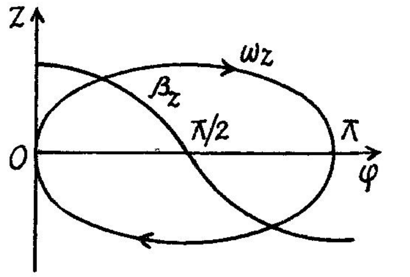
Bài 40: Một vật rắn quay xung quanh một trục cố định với gia tốc góc $\vec{\beta} = \vec{\beta}_0\cos\varphi$, trong đó $\vec{\beta}_0$ là một véc-tơ không đổi và φ là góc quay tính từ vị trí ban đầu. Hỏi vận tốc góc của vật rắn phụ thuộc vào góc φ như thế nào? Đồ thị của hàm số đó.

Giải: Ta chọn hướng dương của trục z (trục quay đứng yên) theo véc-tơ $\vec{\beta_0}$. Theo biểu thức

$\frac{d\omega_z}{dt} = \beta_z$ hay $\omega_z \frac{d\omega_z}{d\varphi} = \beta_z$ hay $\omega_z d\omega_z = \beta_z d\varphi = \beta \cos\varphi \, d\varphi$,

Tích phân biểu thức này, với giới hạn của nó cho $\omega_z(\varphi)$:

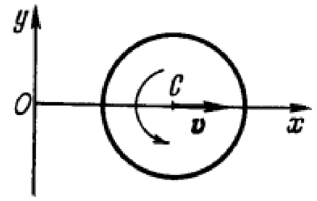
$\int_0^{\omega_z} d\omega_z = \beta_0 \int_0^{\varphi} \cos\varphi \, d\varphi$ hay $\frac{\omega_z^2}{2} = \beta_0 \sin\varphi$



Do đó: $\omega_z = \pm\sqrt{2\beta_0 \sin\varphi}$

Đồ thị của $\omega_z(\varphi)$ được vẽ trong hình bên. Ta có thể thấy rằng góc φ tăng, véc-tơ $\vec{\omega}$ tăng lần đầu tiên, trùng với hướng của véc-tơ $\vec{\beta_0}(\omega_z > 0)$, đạt cực đại tại $\varphi = \varphi/2$, sau đó bắt đầu giảm và tới không tại $\varphi = \pi$. Sau đó vật bắt đầu quay theo hướng dương tương tự như $(\omega_z < 0)$. Vật sẽ dao động quanh vị trí $\varphi = \varphi/2$ với biên độ bằng $\pi/2$.

Bài 41: Một chiếc đĩa quay (hình vẽ) chuyển động trong hướng dương của trục x. Tìm phương trình y(x) mô ta vị trí của trục quay tức thời, nếu tại thời điểm ban đầu trục C của đĩa được đặt tại điểm O sau đó nó được chuyển động



a) với vận tốc v không đổi, trong khi đĩa bắt đầu quay ngược chiều kim đồng hồ với gia tốc góc không đổi β (vận tốc góc ban đầu bằng không);

b) với một gia tốc không đổi w (và vận tốc ban đầu bằng không), trong khi đĩa quay ngược chiều kim đồng hồ vơi vận tốc góc không đổi ω.

Giải: Đĩa quay chuyển động theo trục x, chuyển động phẳng trong mặt phẳng x-y. Chuyển động phẳng của vật rắn có thể được tưởng tượng là trong sự quay thuần quanh một điểm I tại một tâm quay tức thời đã biết. Trục quay tức thời có hướng dương là hướng của $\vec{\omega}$ của vật rắn và qua điểm I, được biết như trục quay thức thời.

Do đó, véc-tơ vận tốc ủ điểm P bất kì của vật rắn có thể được biểu diễn như: $\vec{v_P} = \vec{\omega} \times \vec{r_{PI}}$ (1)

Dữa trên biểu thức (1) cho tâm đĩa (C) của đĩa $\vec{v_c} = \vec{\omega} \times \vec{r_{cI}}$ (2)

Theo bài ra $\vec{v_c} \uparrow\uparrow \vec{i}$ và $\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{k}$, tức là $\vec{\omega} \perp$ mặt phẳng x-y, vì vậy để thỏa mãn biểu thức (2) $\vec{r_{cI}}$ có hướng $(-\vec{j})$. Do đó điểm I là tại $r_{cI} = y$, phía trên tâm của đĩa dọc theo trục y. Sử dụng những dữ kiện này trong biểu thức (2), ta có $v_C = \omega y$ hay $y = \frac{v_c}{\omega}$ (3)

a) Từ phương trình động học quay: $\omega_z = \omega_{0z} + \beta_z t$ (4) hay $\omega = \beta t$.

Mặt khác x = vt (với x là tọa độ x của tâm đĩa). Hay $t = \frac{x}{v}$ (5)

Từ (4) và (5): $\omega = \frac{\beta x}{v}$. Sử dụng giá trị của ω trong (3), ta có $y = \frac{v_c}{\omega} = \frac{v}{\beta x/v} = \frac{v^2}{\beta x}$ (hypebol)

b) Vì tâm C chuyển động với gia tốc w, với vận tốc ban đầu bằng không. Vì vậy $x = \frac{1}{2}wt^2$ và $v_c = wt$

Do đó $v_c = w\sqrt{\frac{2x}{w}} = \sqrt{2xw}$. Nên $y = \frac{v_c}{\omega} = \frac{\sqrt{2wx}}{\omega}$ (parabol)

Bài 42: Một điểm A trên vành của một bánh xe bán kính R = 0,50m; bánh xe lăn không trượt trên một mặt phẳng ngang với vận tốc v = 1,00m/s. Tìm:

a) mô-đun và hướng của véc-tơ gia tốc của điểm A;

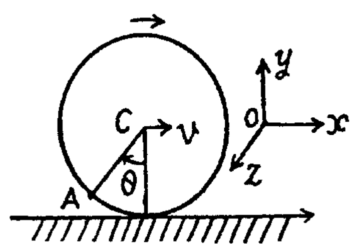
b) quảng đường tổng cộng mà điểm A đã đi được sai hai lần liên tiếp tiếp xúc với mặt phẳng ngang.

Giải: Chuyển động phẳng của vật rắn có thể được tưởng tưởng như sự kết hợp của chuyển động tịnh tiến khối tâm và chuyển động quay quanh khối tâm.

Vì vậy ta có thể viết $\vec{v_A} = \vec{v_C} + \vec{v_{AC}} = \vec{v_C} + \vec{\omega} \times \vec{r_{AC}}$ (1) và $\vec{w_A} = \vec{w_C} + \vec{w_{AC}} = \vec{w_C} + \omega^2(-\vec{r_{AC}}) + (\vec{\beta} \times \vec{r_{AC}})$ (2)

$\vec{r_{AC}}$ là véc-tơ vị trí của điểm A với điểm C.

Theo bài ra $v_C = v = \text{constant}$, và lăn không trượt, tức là $v_C = v = \omega R$. Vì vậy $w_C = 0$ và $\beta = 0$. Sử dụng điều kiên trong (2): $\vec{w_A} = \omega^2(-\vec{r_{AC}}) = \omega^2 R(-\hat{u}_{AC}) = \frac{v^2}{R}(-\hat{u}_{AC})$



Ở đây, $\hat{u}_{AC}$ là véc-tơ đơn vị hướng dọc theo $\vec{r}_{AC}$

Do đó $w_A = \dfrac{v^2}{R}$ và $\vec{w}_A$ dọc theo hướng $(-\hat{u}_{AC})$ hoặc hướng theo tầm của bánh xe.

b) Giả sử tâm của bánh xe chuyển động sang phải (chiều dương trục x), bánh xe quay theo chiều kim đồng hồ.

Nếu ω là vận tốc góc của bánh xe thì $\omega = \dfrac{v_C}{R} = \dfrac{v}{R}$. Điểm A tiếp xúc với mặt nằm ngang tại t = 0, vị trí điểm A tại t = t. Khi nó làm góc $\theta = \omega t$ tại tâm của bánh xe.

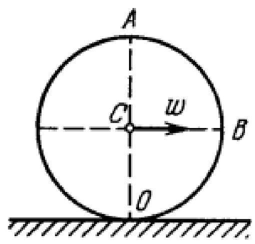
Từ (1): $\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AC} = v\,\vec{i} + \omega\,(-\vec{k}) \times [R\cos\theta\,(-\vec{j}) + R\sin\theta\,(-\vec{i})]$

Hay $\vec{v}_A = v\,\vec{i} + \omega R\,[\cos\omega t\,(-\vec{i}) + \sin\omega t\,\vec{j}\,] = (v - \cos\omega t)\,\vec{i} + v\sin\omega t\,\vec{j}$ (vì $v = \omega R$)

Vì vậy, $v_A = \sqrt{(v - v\cos\omega t)^2 + (v\sin\omega t)^2} = v\sqrt{2\,(1 - \cos\omega t)} = 2\,v\sin(\omega t/2)$

Quãng đường điểm A đi được trong thời gian $T = 2\pi/\omega$: $s = \int v_A\,dt = \int_0^{2\pi/\omega} 2\,v\sin(\omega t/2)\,dt = \dfrac{8v}{\omega} = 8R.$

Bài 43: Một quả cầu bán kính R = 10,0cm lăn không trượt trên một mặt phẳng nghiêng sao cho tâm của nó chuyển động với gia tốc không đổi w = 2,50cm/s^2. Sau t = 2,00s, kể từ lúc bắt đầu chuyển động vị trí quả cầu như hình bên. Hãy xác định:

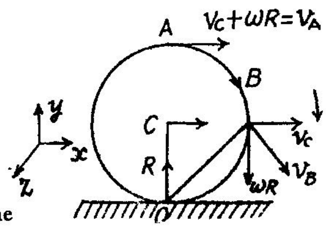


a) vận tốc của những điểm A, B và O;

b) gia tốc của chúng.

Giải: Ta chọn hệ tọa độ xyz như hình vẽ. Quả cầu lăn khong trượt dọc theo bề mặt vật rắn nên ta có:

$$\left.\begin{array}{c} \vec{v}_0 = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_{oc} = 0 \\ v_c = \omega R \;\text{ and }\; \vec{\omega} \uparrow\uparrow (-\vec{k}) \;\text{ as }\; \vec{v}_c \uparrow\uparrow \vec{i} \end{array}\right\} \quad (1)$$



và
$$\left.\begin{array}{c} \vec{\omega}_c + \vec{\beta} \times \vec{r}_{oc} = 0 \\ w_c = \beta R \;\text{ and }\; \vec{\beta} \uparrow\uparrow (-\vec{k}) \;\text{ as }\; \vec{w}_c \uparrow\uparrow \vec{i} \end{array}\right\} \quad (2)$$

Tại vị trí tương ứng như hình vẽ, theo bài ra $w_c = w$ nên $v_c = wt$

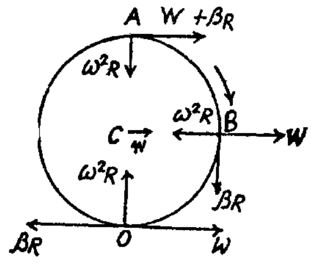
và $\omega = \dfrac{v_c}{R} = \dfrac{wt}{R}$ và $\beta = \dfrac{w}{R}$ (sử dụng 1)

a) Vì điểm O là tâm quay tức thời của quả cầu tại thời điểm như hình vẽ. Nên $\vec{v}_0 = 0,$

Bây giờ: $\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AC} = v_C\,\vec{i} + \omega\,(-\vec{k}) \times R\,(\vec{j}) = (v_C + \omega R)\,\vec{i}$. Vì vậy $\vec{v}_A = 2\,v_C\,\vec{i} = 2\,wt\,\vec{i}$ (sử dụng 1)

Tương tự $\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BC} = v_C\,\vec{i} + \omega\,(-\vec{k}) \times R\,(\vec{i}) = v_C\,\vec{i} + \omega R\,(-\vec{j}) = v_C\,\vec{i} + v_C\,(-\vec{j})$

Vì vậy $v_B = \sqrt{2}\,v_c = \sqrt{2}\,wt$ và $\vec{v}_B$ tạo một góc 45^o từ cả hai $\vec{i}$ and $\vec{j}$ (hình vẽ).



b) $\vec{w}_0 = \vec{w}_C + \omega^2\,(-\vec{r}_{oc}) + \vec{\beta} \times \vec{r}_{OC} = \omega^2\,(-\vec{r}_{OC}) = \dfrac{v_C^2}{R}\,(-\hat{u}_{OC})$ (sử dụng 1)

với $\hat{u}_{OC}$ là véc-tơ đơn vị dọc theo $\vec{r}_{OC}$. Vì vậy $w_0 = \dfrac{v_0^2}{R} = \dfrac{w^2 t^2}{R}$ (sử dụng 2) và $\vec{w}_0$ hướng dọc tâm của quả cầu.

Bây giờ, $\vec{w}_A = \vec{w}_C + \omega^2\,(-\vec{r}_{AC}) + \vec{\beta} \times \vec{r}_{AC} = w\,\vec{i} + \omega^2 R\,(-\vec{j}) + \beta\,(-\vec{k}) \times R\,\vec{j}$

$= (w + \beta R)\,\vec{i} + \dfrac{v_c^2}{R}(-\vec{j})$ (sử dụng 1) $= 2w\,\vec{i} + \dfrac{w^2 t^2}{R}(-\vec{j})$

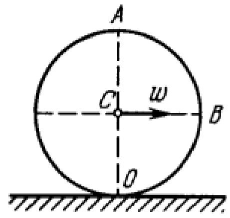
Vì vậy $w_A = \sqrt{4\,w^2 + \dfrac{w^4 t^4}{R^2}} = 2\,w\sqrt{1 + \left(\dfrac{wt^2}{2R}\right)^2}$

Tương tự $\vec{w}_B = \vec{w}_c + \omega^2\,(-\vec{r}_{BC}) + \vec{\beta} \times \vec{r}_{BC} = w\,\vec{i} + \omega^2 R\,(-\vec{i}) + \beta\,(-\vec{k}) \times R\,(\vec{i})$

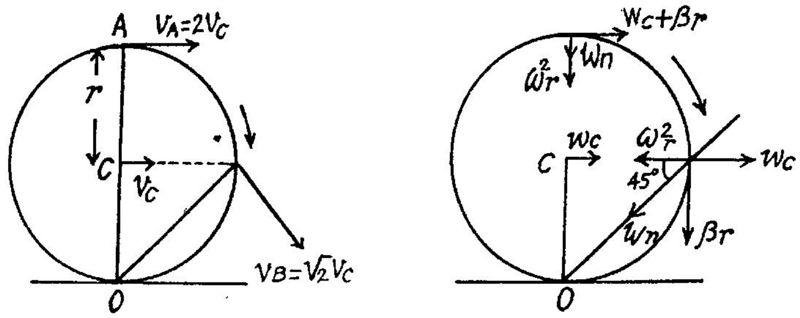
$= \left(v - \dfrac{v_C^2}{R}\right)\vec{i} + \beta R\,(-\vec{j})$ (sử dụng 1) $= \left(w - \dfrac{w^2 t^2}{R}\right)\vec{i} + w\,(-\vec{j})$

Vì vậy: $w_B = \sqrt{\left(w - \frac{w^2 t^2}{R}\right)^2 + w^2}$

Bài 44: Một hình trụ lăn không trượt trên một mặt phẳng ngang. Bán kính của hình trụ bằng r. Tìm bán kính cong của quỹ đạo vạch được bởi hai điểm A và B (hình bên).



Giải: Ta biểu diễn sơ đồ động học của hình trụ dựa vào bài 1.53.



Vì một điểm bất kì của hình trụ theo một đường cong, gia tốc pháp tuyến và bán kính của nó liên hệ với nhau bởi công thức $w_n = \frac{v^2}{R}$. Vì vậy, đối với điểm A: $w_{A(n)} = \frac{v_A^2}{R_A}$, hay $R_A = \frac{4v_c^2}{\omega_r^2} = 4r$ (bởi vì $v_c = \omega r$)

Tương tự đối với điểm B: $w_{B(n)} = \frac{v_B^2}{R_B}$ => $\omega^2 r \cos 45° = \frac{(\sqrt{2}\, v_c)^2}{R_B}$, hay $R_B = 2\sqrt{2}\frac{v_C^2}{\omega^2 r} = 2\sqrt{2}\, r$

Bài 45: Hai vật rắn quay xung quanh những trục giao nhau cố định và vuông góc với nhau với vận tốc góc không đổi $\omega_1 = 3.0$ rad/s và $\omega_2 = 4.0$ rad/s. Tìm mối liên hệ giữa vận tốc góc và gia tốc góc của vật.

Giải: Vận tốc góc tương đối của vật 1 đối với vật 2 là $\vec{\omega}_{12} = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$. vì vận tốc là tương đối tính. Gia tốc tương đối của vật 1 đối với vật 2 là $\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_{s'}$

vơi S' là hệ quy chiếu gắn với vật thứ hai và S là hệ quy chiếu cố định với gốc trùng với điểm giao nhau của hai trục, mà $\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_{s'} + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1$

Vì S' quay với vận tốc góc $\vec{w}_2$. Tuy nhiên $\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_s = 0$ vì vật thứ nhất quay với vận tốc góc không đổi trong không gian, do đó $\vec{\beta}_{12} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$.

Lưu ý rằng, đối với véc-tơ bất kì $\vec{b}$, mối quan hệ trong không gian hệ (k) và một hệ (k') quay với vận tốc góc $\vec{\omega}$ là $\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_K = \left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{b}$

Bài 46: Một vật rắn quay với vận tốc góc $\boldsymbol{\omega} = at\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j}$ với a = 0,50 rad/s^2, b = 0,060 rad/s^3. Hãy xác định:

a) Mô-đun của véc-tơ vận tốc góc và gia tốc góc tại thời điểm t = 10,0s;

b) góc giữa véc-tơ vận tốc góc và gia tốc góc tại thời điểm đó.

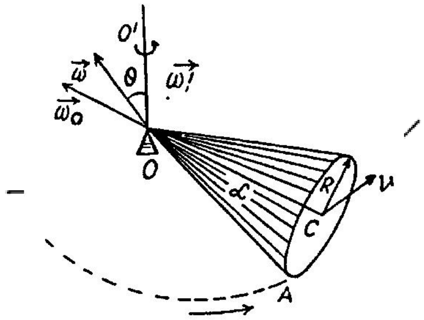
Giải: Ta có $\vec{\omega} = at\,\vec{i} + bt^2\,\vec{j}$ (1). Vậy $\omega = \sqrt{(at)^2 + (bt^2)^2}$, nên $\omega|_{t=10s} = 7.81$ rad/s

Đạo hàm (1) theo thời gian $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = a\,\vec{i} + 2bt\,\vec{j}$ (2). Vậy $\beta = \sqrt{a^2 + (2bt)^2}$ => $\beta|_{t=10s} = 1{\cdot}3$ rad/s^2

b) $\cos\alpha = \frac{\vec{\omega}\cdot\vec{\beta}}{\omega\beta} = \frac{(at\,\vec{i} + bt^2\,\vec{j})\cdot(a\,\vec{i} + 2bt\,\vec{j})}{\sqrt{(at)^2 + (bt^2)^2}\,\sqrt{a^2 + (2bt)^2}}$

Thay các giá trị của a và b vào và t = 10,0s, ta được $\alpha \approx 17°$

Bài 47: Một hình nón tròn xoay có nửa góc ở đỉnh bằng α = 30^o và bán kính đáy r = 5,0cm, lăn đều không trượt trên một mặt phẳng ngang như hình vẽ. Đỉnh của hình nón gắn vào khớp tại điểm O, ở cùng độ cao với điểm C là tâm của đáy hình nón. Vận tốc của điểm C bằng v = 10,0cm/s. Hãy xác định:



a) mô-đun của véc-tơ vận tốc của hình nón và góc hợp bởi véc-tơ đó với đường thẳng đứng

b) mô-đun của véc-tơ gia tốc góc của hình nón.

Giải: Trục của hình nón (OC) quay ngược chiều kim đồng hồ với vận tốc góc không đổi $\vec{\omega}'$ và hình nón tự quay quanh trục của nó cùng chiều kim đồng hồ với vận tốc góc $\vec{\omega}_0$ (hình vẽ). Vận tốc góc tổng hợp của hình nón:

$\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\omega}_0$ (1)

Vì sự quay là thuần, độ lớn của các véc-tơ $\vec{\omega}'$ và ω_0 có thể dễ dàng tìm từ hình

$\omega' = \frac{v}{R\cot\alpha}$, $\omega_0 = v/R$ (2)

Vì $\vec{\omega}' \perp \vec{\omega}_0$, từ (1) và (2): $\omega = \sqrt{\omega'^2 + \omega_0^2} = \sqrt{\left(\frac{v}{R\cot\alpha}\right)^2 + \left(\frac{v}{R}\right)^2} = \frac{v}{R\cos\alpha} = 2{\cdot}3\ \text{rad/s}$

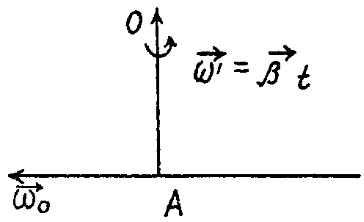
b) Véc-tơ gia tốc góc: $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}' + \vec{\omega}_0)}{dt}$ (vì $\vec{\omega}' =$ constant)

Véc-tơ $\vec{\omega}_0$ quay quanh trục OO'với vận tốc góc $\vec{\omega}'$ mà có độ lớn tăng dần. Sự tăng này trong khoảng thời gian dt bằng $|d\vec{\omega}_0| = \omega_0 \cdot \omega'\, dt$ hoặc trong dạng véc-tơ $d\vec{\omega}_0 = (\vec{\omega}' \times \vec{\omega}_0)\, dt.$. Do đó: $\vec{\beta} = \vec{\omega}' \times \vec{\omega}_0$ (3)

Độ lớn của véc-tơ $\vec{\beta}$ bằng $\beta = \omega' \omega_0$ (as $\vec{\omega}' \perp \vec{\omega}_0$). Vì vậy: $\beta = \frac{v}{R\cot\alpha}\frac{v}{R} = \frac{v^2}{R^2}\tan\alpha = 2{\cdot}3\ \text{rad/s}$

Bài 48: Một vật rắn quay với vận tốc góc không đổi $\omega_0 = 0.50\ \text{rad/s}$ quanh một trục thẳng đứng AB. Tại thời điểm t = 0, trục AB bắt đầu quay quanh trục thẳng đứng với một gia tốc góc không đổi $\beta_0 = 0.10\ \text{rad/s}^2$. Hãy xác định vận tốc góc và gia tốc góc của vật sau thời gian t = 3,5s.

Giải: Trục AB có vận tốc góc $\vec{\omega}' = \vec{\beta}_o t$ (1).



Vận tốc góc của vật $\omega = \sqrt{\omega_o^2 + \omega'^2} = \sqrt{\omega_0^2 + \beta_0^2 t^2} = 0{\cdot}6\ \text{rad/s}$

Và gia tốc góc: $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}' + \vec{\omega}_0)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_0}{dt}$

Mà $\frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \vec{\omega}' \times \vec{\omega}_0$ và $\frac{d\vec{\omega}'}{dt} = \vec{\beta}_0 t$. Vì vậy $\vec{\beta} = (\vec{\beta}_0 t \times \vec{\omega}_0) + \vec{\beta}_0$

Vì $\vec{\beta}_0 \perp \vec{\omega}_0$ nên $\beta = \sqrt{(\omega_0 \beta_0 t)^2 + \beta_0^2} = \beta_0\sqrt{1 + (\omega_0 t)^2} = 0{\cdot}2\ \text{rad/s}^2$