TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC NĂM HỌC 2013-2014
Môn: TOÁN - KHỐI A (Đợt 5)
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu I. (2 điểm)
Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - (2m^2 + m - 2)x - m^2 + 2m$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị với $m = 1$.
2) Tìm giá trị của m để hàm số có cực trị thỏa mãn $y_{max}.y_{min} < 0$.

Câu II. (2 điểm)
1) Giải phương trình
$$\cos 2x + 3\cos x - \sin x + 2 = 0.$$
2) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$$y = 3x + \sqrt[4]{4 - 3x^4}$$

Câu III. (2 điểm)
1) Tính nguyên hàm
$$I = \int \frac{4\cos 2x + 3\sin 2x}{1 + 2\sin x + \cos x} dx.$$
2) Xét đa thức $P(x) = (1 + 2x)^{20}$. Xác định hệ số lớn nhất trong khai triển đa thức.

Câu IV. (3 điểm)
1) Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, góc giữa AB' và BC' bằng 60^0. Tính thể tích của lăng trụ.
2) Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;1), B(1;0;-1), C(3;2;-1), D(3;0;1)$. Lập phương trình mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.
3) Viết phương trình chính tắc của elip biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle A_1B_1A_2$ và $\triangle B_1A_2B_2$ lần lượt là 5 và $\frac{5}{3}$. (Trong đó A_1, A_2 là hai đỉnh trên trục lớn, B_1, B_2 là hai đỉnh trên trục nhỏ)

Câu V. (1 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(3x + y) = 4 \\ (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2) = 5x^2 + 2y^2 - 1 \end{cases}$$

—— HẾT ——

ĐÁP ÁN ĐỢT 5 (tóm tắt)

Câu I. 1) Với $m = 1$ ta có $y = x^3 - x^2 - x + 1$. Khi đó $y' = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \leftrightarrow x_{max} = 1, y_{max} = 0; x_{min} = -\frac{1}{3}, y_{min} = \frac{32}{27}$.
$y'' = 6x - 2 = 0 \leftrightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{16}{27}$.

2) Ta có $y = (x+m)(x^2 - 2mx - m + 2)$, $y_{max}.y_{min} < 0 \leftrightarrow$ đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\leftrightarrow x^2 - 2mx - m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-m$. Bài toán thỏa mãn $\leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + m - 2 > 0 \\ f(-m) = 3m^2 - m + 2 \neq 0 \end{cases} \leftrightarrow m < -2 \vee m > 1$.

Câu II. 1) Phương trình tương đương với
$4(\cos^2 x - \sin^2 x) + 12\cos x - 4\sin x + 8 = 0 \leftrightarrow 4\cos^2 x + 12\cos x + 9 = 4\sin^2 + 4\sin x + 1$
$\leftrightarrow (2\cos x + 3)^2 = (2\sin x + 1)^2 \leftrightarrow (2\cos x + 2\sin x + 4)(2\cos x - 2\sin x + 2) = 0$
$\leftrightarrow \cos x - \sin x = -1 \leftrightarrow (\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}) = -(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})^2$
$\leftrightarrow (\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})(2\sin\frac{x}{2}) = 0$.

2) Tập xác định $-\sqrt[4]{\frac{4}{3}} \leqslant x \leqslant \sqrt[4]{\frac{4}{3}}$. Ta có $y = 3 - \dfrac{3x^3}{\sqrt[4]{(4-3x^4)^3}}$.

Nếu $-\sqrt[4]{\frac{4}{3}} \leqslant x \leqslant 0 \Rightarrow y' > 0$.

Xét $0 < x \leqslant \sqrt[4]{\frac{4}{3}}, y' = 0 \leftrightarrow x = 1$. Lập bảng xét dấu ta suy ra $y_{max} = y(1) = 4$, $y_{min} = y(-\sqrt[4]{\frac{4}{3}}) = -3\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$.

Câu III. 1) Ta có $I = 2\int \dfrac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x}{1 + 2\sin x + \cos x}dx = 2\int \dfrac{(2\sin x + \cos x)(2\cos x - \sin x)}{1 + 2\sin x + \cos x}dx$
$\Rightarrow I = 2\int \dfrac{(2\sin x + \cos x)d(1 + 2\sin x + \cos x)}{1 + 2\sin x + \cos x} = 2\int \dfrac{(t-1)dt}{t}$ $(t = 1 + 2\sin x + \cos x)$
$\Rightarrow I = 2\int dt - 2\int \dfrac{dt}{t} = 2t - 2\ln|t| + C$.

2) $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{20} C_{20}^k.2^k.x^k \Rightarrow a_k = C_{20}^k.2^k$. Ta có $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{2^{k+1}C_{20}^{k+1}}{2^k C_{20}^k} = \dfrac{2(20-k)}{k+1} \geqslant 1 \Rightarrow k \leqslant 13$.
Suy ra $a_{k+1} \geqslant\Rightarrow a_k$ với $k \leqslant 13 \Rightarrow a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{13} \leqslant a_{14} \geqslant a_{15} \geqslant \cdots \geqslant a_{20}$.
Vậy $a_{max} = a_{14} = a_{13} = 2^{14}.C_{20}^{14}$.

Câu IV. 1) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.2a.2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a^2$. Đặt $BB' = x$.

Ta có: $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = \dfrac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}}{AB'.BC'} = \dfrac{x^2 - 2a^2}{4a^2 + x}$.

+) Với $(\widehat{\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}}) = 60^0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x^2 - 2a^2}{4a^2 + x}$
$\Rightarrow x = 2\sqrt{2}a \Rightarrow V = 2\sqrt{2}a.\sqrt{3}a^2 = 2\sqrt{6}a^3$.

+) Với $(\widehat{\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}}) = 120^0 \Rightarrow x = 0$ (loại).
Vậy $V = 2\sqrt{6}a^3$ (đvtt).

2) Do $AB = BC = CD = DA = 2\sqrt{2}$ nên tứ diện $ABCD$ đều $\Rightarrow$ tâm I của mặt cầu nội tiếp trùng với trọng tâm của tứ diện $\Rightarrow I(2;1;0)$.

Có $r = d(I,(ABC))$. Mà pt mặt phẳng $(ABC): x - y + z = 0 \Rightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

PT mặt cầu nội tiếp $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \dfrac{1}{3}$.

3)Theo định lí hàm số sin cho tam giác $\Delta A_1B_1A_2$ và $\Delta B_1A_2B_2$:
$\dfrac{A_1A_2}{\sin\widehat{A_1B_1A_2}} = 10 \Leftrightarrow \dfrac{2a}{10} = \sin\widehat{A_1B_1A_2}$.
$\dfrac{B_1B_2}{\sin\widehat{B_1A_2B_2}} = \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2b}{\frac{10}{3}} = \sin\widehat{B_1A_2B_2}$.

Do $\sin\widehat{A_1B_1A_2} = \sin\widehat{B_1A_2B_2}$ nên $a = 3b$ (1).

Mặt khác $S_{A_1B_1A_2} = ab = \dfrac{2a(a^2+b^2)}{20} \Leftrightarrow 10b = a^2 + b^2$ (2).

Từ (1) và (2) có $a = 3, b = 1$.

PT elip $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

Câu V. Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} (2x^2 - y^2) - 1 = 3 - (x^2 + xy + y^2) \\ (x^2 + xy + y^2)(x^2 + y^2) - 3(x^2 + y^2) = (2x^2 - y^2) - 1 \end{cases}$

Giả sử $2x^2 - y^2 \geqslant 1 \Rightarrow (x^2 + xy + y^2) \leqslant 3 \Rightarrow 2x^2 - y^2 \leqslant 1$.

Vậy $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \Rightarrow 3(2x^2 - y^2) = x^2 + y^2 + xy \Leftrightarrow 5x^2 - 4y^2 - xy = 0 \Leftrightarrow (x+y)(5x+4y) = 0$.