

Câu I. (2 điểm)

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 6x^2$.
- 2) Hãy tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D sao cho $AB = BC = CD$.

Câu II. (2 điểm)

- 1) Giải phương trình

$$\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan 6x.$$

- 2) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{(x+1)^{10}(x^2+x+1)^3}{(x^2+1)^8}$$

Câu III. (3 điểm)

- 1) Tính nguyên hàm

$$I = \int \frac{\sin x dx}{(\sin x + \cos x)^3}$$

- 2) Cho $P(x) = \left(1 + x + \frac{1}{x^4}\right)^{20}$, tìm số hạng không phụ thuộc x .

- 3) Xét số $a = 112233334444$, thay đổi vị trí các chữ số của a nhận được bao nhiêu số mà hai số 1, hai số 2 không đứng cạnh nhau.

Câu IV. (3 điểm)

- 1) Cho chóp $SABCD$ cạnh bên $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy là hình thoi cạnh a có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

Tính thể tích của chóp $SABCD$.

- 2) Trong hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $P(5; 1)$ biết (C') cắt (C) tại A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

- 3) Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}, \quad d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) cách đều d_1 và d_2 .

Câu V. (1 điểm thưởng) Với $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^6} + \frac{2}{1+b^3} + \frac{3}{1+c^2} \geq \frac{6}{1+abc}$$

— HẾT —

Câu I. 1) $y' = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0; x = \pm\sqrt{3}, y = -9$.
 $y'' = 12(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, y = -5$.

2) $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm phân biệt $A, B, C, D \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 = m$ có 4 nghiệm phân biệt. Từ đồ thị suy ra $-9 < m < 0$.
 Khi đó x_A, x_B, x_C, x_D là 4 nghiệm của $x^4 - 6x^2 - m = 0$.
 Bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $x_D = 3x_C \Leftrightarrow x_D^2 = 9x_C^2 \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$, trong đó t_1, t_2 là 2 nghiệm của $t^2 - 6t - m = 0$ (đặt $x^2 = t$).

$$\text{Bài toán thỏa mãn} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 < m < 0 \\ t_1 + t_2 = 6 \\ t_1 t_2 = -m \\ t_2 = 9t_1 \end{cases} \rightarrow t_1 = \frac{3}{5}, t_2 = \frac{27}{5} \rightarrow m = -\frac{81}{25}$$

Câu II. 1) Điều kiện $\cos x \neq 0, \cos 2x \neq 0, \cos 3x \neq 0, \cos 6x \neq 0$. Phương trình tương đương với

$$\tan x + \tan 2x = \tan 6x - \tan 3x \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 6x \cos 3x}$$

$$+) \text{ Giải } \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

$$+) \text{ Giải } 2 \cos x \cos 2x = 2 \cos 6x \cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x + \cos x = \cos 9x + \cos 3x \Leftrightarrow \cos 9x = \cos x \Leftrightarrow 9x = \pm x + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{5}, x = \frac{k\pi}{4}$$

Thử lại ta có đáp số $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{k\pi}{5}$ (sử dụng vòng tròn đơn vị).

$$2) \text{ Ta có } 8y = \frac{(x^2 + 2x + 1)^5 (2x^2 + 2x + 2)^3}{(x^2 + 1)^8} = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + 1 \right)^5 \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + 2 \right)^3$$

$$\text{Đặt } t = \frac{2x}{x^2 + 1}, -1 \leq t \leq 1, 8y = Y = (t + 1)^5 (t + 2)^3$$

$$\text{Ta có } Y' = 5(t + 1)^4 (t + 2)^3 + 3(t + 2)^2 (t + 1)^5 = (t + 1)^4 (t + 2)^2 (8t + 13)$$

Lập bảng xét dấu của đạo hàm, suy ra $\max Y = Y(1) = 2^5 \cdot 3^3, \min Y = Y(-1) = 0$.

Đáp số $\max y = 108, \min y = 0$.

$$\text{Câu III. 1) } I = \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{(\sin x + \cos x)^3} + \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x - \cos x) dx}{(\sin x + \cos x)^3} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2 \cos^2(x - \frac{\pi}{4})} - \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3} = \frac{1}{4} \tan(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{4} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} + C$$

$$2) P(x) = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^k \left(1 + \frac{1}{x^5}\right)^k = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^k \sum_{i=0}^k C_k^i x^{-5i} = \sum_{k=0}^{20} \sum_{i=0}^k C_{20}^k C_k^i x^{k-5i}, \text{ từ giả thiết suy ra } k = 5i \rightarrow a_0 = C_{20}^0 C_0^0 + C_{20}^5 C_5^1 + C_{20}^{10} C_{10}^2 + C_{20}^{15} C_{15}^3 + C_{20}^{20} C_{20}^4$$

3) Kí hiệu A_1 là tập các số mà hai số 1 đứng cạnh nhau, A_2 là tập các số mà hai số 2 đứng cạnh nhau.

Khi đó hai số 1 đứng cạnh nhau là một số có số phần tử của A_1 bằng $|A_1| = \frac{11!}{2! \cdot 4! \cdot 4!}$, tương tự $|A_2| = \frac{11!}{2! \cdot 4! \cdot 4!}$.

Khi đó: $A_1 \cup A_2$ là tập có ít nhất hai số 1 đứng cạnh nhau hoặc hai số 2 đứng cạnh nhau: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

Mà $A_1 \cap A_2$ là tập có hai số 1, hai số 2 đứng cạnh nhau, nên $|A_1 \cap A_2| = \frac{10!}{4! \cdot 4!}$.

$$\Rightarrow |A_1 \cup A_2| = \frac{11!}{4! \cdot 4!} - \frac{10!}{4! \cdot 4!} = \frac{10!}{4! \cdot 4!} \cdot 10 = 63000$$

Khi thay đổi vị trí các số của a ta nhận được tất cả $d = \frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 4!} = 990 \cdot 210 = 207900$.

Đáp số: $d^* = d - |A_1 \cup A_2| = 207900 - 63000 = 144900$.

Câu IV. 1) Kẻ $SH \perp (ABCD)$. Do $SA = SB = SD$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$.

$$\text{Có } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{5}a}{2\sqrt{3}}, S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2S_{ABD} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{\sqrt{5}a^3}{12} \text{ (đvtt)}$$

2) (C) có tâm $I(1; -2), R = \sqrt{3} \Rightarrow$ phương trình $IF' : 3x - 4y - 11 = 0$.

Tọa độ H (trung điểm của AB) là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - 4y - 11 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow H(-\frac{1}{5}; -\frac{29}{10}) \text{ hoặc } H(\frac{11}{5}; -\frac{17}{10})$.

$$+) H(-\frac{1}{5}; -\frac{29}{10}) \Rightarrow R'^2 = I'H^2 + AH^2 = 43 \Rightarrow (C') : (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 43$$

$$+) H(\frac{11}{5}; -\frac{17}{10}) \Rightarrow R'^2 = 13 \Rightarrow (C') : (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 13$$

3) d_1 qua $A(2; 2; 3)$, có $\vec{u}_1 = (2; 1; 3)$, d_2 qua $B(1; 2; 1)$, có $\vec{u}_2 = (2; -1; 4)$.

$\vec{n} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (7; -2; 4)$. Phương trình mặt phẳng $(P) : 7x - 2y - 4z + D = 0$

$$d(A; (P)) = d(B; (P)) \Leftrightarrow |D - 2| = |D - 1| \Leftrightarrow D = \frac{3}{2} \Rightarrow (P) : 7x - 2y - 4z + \frac{3}{2} = 0$$

Câu V. $+) a_1, a_2 \geq 1$. CMR: $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} \geq \frac{2}{1+\sqrt{a_1 a_2}}$ (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{a_1 a_2} - 1)(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ (đúng).

$$+) a_1, a_2, a_3 \geq 1. \text{ CMR: } \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \frac{1}{1+a_3} \geq \frac{3}{1+\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \frac{1}{1+a_3} + \frac{1}{1+\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}} \geq \frac{4}{1+\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}$$

Áp dụng hai bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{1+a^6} + \frac{2}{1+b^3} + \frac{3}{1+c^2} = \frac{1}{1+a^6} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{3}{1+c^2} \geq \frac{3}{1+a^2 b^2} + \frac{3}{1+c^2} \geq \frac{6}{1+abc} \text{ (đpcm)}$$