TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN   KỲ THI THỬ ĐẠI HỌC ĐỢT 2
Trường THPT chuyên KHTN

MÔN: TOÁN HỌC ; Khối A
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: /01/2014

Câu 1. (*2 điểm*) Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm trên trục hoành các điểm M từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến phân biệt MA, MB tới (C), trong đó A, B là các tiếp điểm. Trong trường hợp đó, hãy viết phương trình đường thẳng nối hai tiếp điểm.

Câu 2. (*1 điểm*) Giải phương trình lượng giác $\cos 2x - 3\sin x + 4 = \sqrt{3}(3\cos x - \sin 2x)$.

Câu 3. (*1 điểm*) Giải hệ phương trình trong tập số thực $\begin{cases} x^4 + y^2 = 4x^2 + 2y, \\ x^2y - y = 6. \end{cases}$

Câu 4. (*1 điểm*) Tính tích phân

$$I = \int_4^6 \sqrt{\frac{x-4}{(x+2)^3}}\,dx.$$

Câu 5. (*1 điểm*) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy; hai mặt bên (SBC) và (SDC) hợp với nhau một góc $60°$. Gọi K là hình chiếu của A trên SB, hãy tính thể tích khối đa diện $SAKCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AK, SC.

Câu 6. (*1 điểm*) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét các mặt cầu (S) có tâm I thuộc mặt phẳng $(P): x - y + 4 = 0$ và đi qua hai điểm $A(0;0;2), B(0;2;0)$; trong các mặt cầu đó, hãy lập phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất.

Câu 7. (*1 điểm*) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp $E(1;3)$, phương trình cạnh $BC: x - y + 1 = 0$; phương trình đường phân giác trong $AD: 2x - y + 7 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A.

Câu 8. (*1 điểm*) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 6 chữ số đôi một khác nhau và thỏa mãn điều kiện trong mỗi số đó tính từ trái sang phải tổng của ba chữ số đầu nhỏ hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị.

Câu 9. (*1 điểm*) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \sqrt{5 - 4x} + 2\sqrt{4 - 2(x + y + z)}.$$

———HẾT———

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm
Họ và tên:..Số báo danh:..................

ĐÁP ÁN ĐỀ TOÁN KHỐI A (Đợt 2)

Câu 1. a) Tập xác định $\mathbb{R} - \{-1\}$. Đạo hàm $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1);(-1;\infty)$.

Tiệm cận đứng, ngang: $x = -1, y = 1$.

b) Gọi $M(a;0) \in Ox$. Tiếp tuyến qua M, có hệ số góc $k : y = k(x-a)$. Để từ M, kẻ được hai tiếp tuyến thì hệ phương trình sau phải có 2 nghiệm phân biệt khác -1 :

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} = k(x-a) & (1) \\ \dfrac{2}{(x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1), khai triển và rút gọn ta được $f(x) = x^2 - 2x + 2a - 1 = 0$ (3). Khi đó, điều kiện để (3) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác -1 (x_1, x_2 tương ứng là hoành độ các điểm A, B) là $\Delta' = -2a > 0$ và $f(-1) = 2 + 2a \neq 0$, thu được $a < 0; a \neq -1$. Vậy **các điểm $M \in Ox$ cần tìm là các điểm thuộc Ox, có hoành độ âm và khác -1.**

Tiếp theo ta viết phương trình đường thẳng AB. Giả sử $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$. Thế thì $y_i = \dfrac{x_i - 1}{x_i + 1}, i = 1,2$. Nhưng vì x_i là nghiệm của (3) nên ta có thể viết

$$y_i = \frac{x_i - 1 + \frac{1}{1+a}(x_i^2 - 2x_i + 2a - 1)}{x_i + 1} = \frac{1}{1+a}(x_i + a - 2), \text{ với } i = 1,2.$$

Do vậy, **phương trình của đường thẳng AB là** $y = \dfrac{1}{1+a}(x + a - 2)$.

Câu 2. Viết lại phương trình dưới dạng $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x - 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x) + 4 = 0$. Chia cả hai vế của phương trình cho 2, và viết lại phương trình dưới dạng

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0 \text{ hay } \quad 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0.$$

Giải, ta được

a) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ thì $x = \dfrac{\pi}{6} + k.2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ thì $x = \dfrac{\pi}{2} + h.2\pi, x = -\dfrac{\pi}{6} + m.2\pi$, với $h, m \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Hệ đã cho có thể viết lại dưới dạng $\begin{cases} (x^2-2)^2 + (y-1)^2 = 5, \\ x^2 - 2 + y - 1 + (x^2-2)(y-1) = 5. \end{cases}$

Do đó, nếu đặt $a = x^2 - 2, b = y - 1$ thì ta đưa hệ trên về hệ đối xứng loại 1 $\begin{cases} a^2 + b^2 = 5, \\ a + b + ab = 5. \end{cases}$

Giải hệ trên thu được $a = 2, b = 1$ hay $a = 1, b = 2$. Các nghiệm $(x;y)$ tương ứng là $(-2;2), (2;2), (-\sqrt{3};3), (\sqrt{3};3)$.

Câu 4. Viết lại tích phân đã cho

$$I = \int_4^6 \sqrt{\frac{x-4}{x+2}} . \frac{dx}{x+2}.$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x-4}{x+2}}$ thì $t^2 = 1 - \dfrac{6}{x+2}$. Suy ra $x + 2 = \dfrac{6}{1-t^2}$ và $dx = \dfrac{12tdt}{(1-t^2)^2}$, dẫn đến

$$I = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2dt}{1-t^2} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t^2} - 1\right) dt = 2\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - t\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln 3 - 1.$$

Câu 5. 5.1. Tính thể tích khối đa diện

Gọi $O = AC \cap BD$, tâm đáy. Từ giả thiết suy ra $SA \perp (ABCD)$. Dẫn đến $BD \perp SA$, mặt khác $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$. Suy ra $SC \perp BD$. Do vậy nếu hạ OH vuông góc với SC ($H \in SC$) thì mặt phẳng (BHD) sẽ vuông góc với SC, nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) là góc giữa hai đường thẳng BH và DH. Dễ thấy, tam giác BHD cân tại H, các tam giác BOH, DOH vuông tại O. Ta có hai khả năng

a) $\widehat{BHD} = 60^\circ$, thì $\widehat{BHO} = 30^\circ$, dẫn đến $BH = \dfrac{OB}{\sin 30^\circ} = a\sqrt{2}$, vô lí vì tam giác BHC vuông tại H có $BC = a$ là cạnh huyền.

b) $\widehat{BHD} = 120^\circ$, thì $\widehat{BHO} = 60^\circ$, dẫn đến $OH = \dfrac{OB}{\tan 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Suy ra $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Hai tam giác SAC và OHC đồng dạng nên từ tỉ số đồng dạng suy ra $SA = \dfrac{AC.OH}{HC} = a$. Điều này cũng có nghĩa là tam giác SAB vuông cân tại A, kéo theo K là trung điểm của BS.

Ta có $V_{SAKCD} = V_{SABCD} - V_{BKAC}$. Mặt khác, ta lại có $\dfrac{V_{BKAC}}{V_{BSAC}} = \dfrac{BK}{BS} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $V_{BKAC} = \dfrac{1}{2} V_{BSAC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.SA.S_{BAC} = \dfrac{a^3}{12}$. Còn $V_{SABCD} = \dfrac{a^3}{3}$, nên $V_{SAKCD} = \dfrac{a^3}{4}$.

5.2. **Tính khoảng cách**

Gọi M là trung điểm của BC thì $KM \parallel SC$ và $KM = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $d(AK, SC) = d(C, (AKM)) = d(B, (AKM)) = \dfrac{3V_{BKAM}}{S_{AKM}}$. Bằng công thức tỉ số thể tích, ta tính được $V_{BKAM} = \dfrac{1}{4}.V_{BSAC} = \dfrac{a^3}{24}$. Hơn nữa do $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, dẫn đến $(SBC) \perp (SAB)$. Mà $AK \perp SB$ nên $AK \perp (SBC)$, suy ra $AK \perp KM$ hay nói cách khác tam giác AKM vuông tại K, kéo theo $S_{AKM} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{8}$. Từ đây, ta có ngay $d(AK, SC) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 6. Vì (S) đi qua hai điểm A, B nên tâm I thuộc mặt phẳng trung trực của $AB : y - z = 0$. Suy ra I thuộc giao tuyến của (P) và mặt phẳng trung trực, dẫn đến tọa độ của I có dạng $I(t; t+4; t+4)$. Suy ra bán kính của (S) là $R = IA = \sqrt{3t^2 + 12t + 20}$. Do vậy, R nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = -2$, khi đó $I(-2; 2; 2), R = 2\sqrt{2}$. Vậy, phương trình của mặt cầu (S) là $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 8$.

Câu 7. Gọi Δ là trung trực của BC thì Δ đi qua E và vuông góc với BC, dẫn đến phương trình của Δ là $x + y - 4 = 0$. Gọi $F = AD \cap \Delta$ thì $F(-1; 5)$ và dễ thấy F thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Suy ra, phương trình của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$. Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y + 7 = 0, \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = 8. \end{cases}$

Giải hệ này ta suy ra tọa độ $A\left(-\dfrac{9}{5}; \dfrac{17}{5}\right)$ vì $A \neq F$.

Câu 8. Các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, trong đó $a_i \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $a_i \neq a_j$, thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6 - 1$. Vì $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 21$ nên $a_1 + a_2 + a_3 = 10$. Vì 10 chỉ có các biểu diễn sau $10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5$ nên số các số cần tìm là $3.3!.3! = 108$ số.

Câu 9. Viết lại biểu thức S dưới dạng

$$S = \sqrt{1 - 4x + 4(x^2 + y^2 + z^2)} + 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) + 3}$$

Từ đó, $S = 2\left(\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2}\right)$. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, xét các vector $\overrightarrow{u} = \left(x - \frac{1}{2}; y; z\right)$ và $\overrightarrow{v} = (1-x; 1-y; 1-z)$ thì $S = 2\left(|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}|\right)$. Áp dụng bất đẳng thức $|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| \geq |\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|$, ta suy ra $S \geq 3$. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $(x; y; z) = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{9}; \frac{2\sqrt{7}-1}{9}; \frac{2\sqrt{7}-1}{9}\right)$.

Giá trị nhỏ nhất của S là 3.