

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI

LÊ VĂN QUÝ - TRẦN QUANG VINH

# ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

$K_c$

$\frac{1}{2}\omega t$

$\frac{1}{2}\omega t \cos \omega t$

$\frac{1}{2} \sin \omega t$

$\frac{2\pi}{\omega}$

HÀ NỘI - 1997

## CHƯƠNG MỞ ĐẦU

### ***1-1 Khái niệm về động lực học công trình***

Môn động lực học kết cấu công trình, hay gọi tắt là động lực học công trình, quan tâm nghiên cứu đến tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian và thay đổi theo vị trí trên kết cấu công trình. Trong phần tĩnh lực học kết cấu công trình, đã từng đề cập đến tải trọng di động, nhưng thực chất chỉ nghiên cứu sự thay đổi vị trí của một nhóm tải trọng sao cho ở vị trí nào đó thì tác dụng tĩnh học của nhóm tải trọng đó là tác dụng hữu hiệu nhất, mà chưa xem xét và đề cập đến những tác dụng động học của tải trọng.

Những tác dụng động học của tải trọng chính là nhiệm vụ nghiên cứu của môn động lực học công trình. Đó là tác động của lực quán tính, lực này phát sinh khi vật thể chuyển động, cụ thể như lực do trọng lượng bản thân kết cấu, của tải trọng đặt hay di động trên nó, cũng có thể cả chuyển động của môi trường ( như không khí, nước, động đất ...) làm ảnh hưởng đến công trình. Tuy vậy trong tính toán thông thường người ta hay bỏ qua lực quán tính hoặc chỉ tính gần đúng thông qua hệ số động học. Có nghĩa là lấy kết quả do tải trọng tác dụng tĩnh gây ra nhân với một hệ số gọi là hệ số động học.

Với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, các công trình càng được xây dựng hiện đại hơn (bằng vật liệu nhẹ, thanh mảnh hơn, nhịp lớn hơn, hình thức đa dạng hơn), tải trọng tác dụng trên kết cấu cũng lớn hơn ... thì việc tính toán động học của kết cấu công trình không thể bỏ qua mà phải được quan tâm nhiều hơn. Mặt khác việc tính toán động học khá phức tạp, đòi hỏi công cụ tính toán mạnh. Ngày nay đã được sự hỗ trợ hữu hiệu của các máy tính, cho nên nhiều bài toán động học trước kia không giải quyết được thì nay đã được giải quyết thỏa đáng.

Đối tượng nghiên cứu của động lực học công trình khá rộng như :

- Động lực học của các kết cấu công trình giao thông ( Cầu, hầm, đường sắt, đường ô tô, sân bay, các loại máy dùng trong xây dựng .
- Động lực học các kết cấu xây dựng nhà công nghiệp, nhà dân dụng cao tầng. Các tháp nâng, tháp treo, tháp vô tuyến.
- Động lực học các công trình thủy điện, đập, đê chắn sông.
- Động đất, chấn động của môi trường.
- Động lực học các máy đặt trong công trình xây dựng ( Móng máy, cánh tuốc bin, búa máy, nhà sàn ... )
- Động lực học của gió, nước .
- Động lực học của các loại kết cấu vỏ mỏng : Tấm, vỏ, vỏ tàu, máy bay, tên lửa ...

Động lực học công trình trở thành một môn riêng chuyên nghiên cứu ảnh hưởng của của động học đến công trình từ những năm 30 của thế kỷ thứ XX, nhưng nó chỉ thực sự phát triển sau khi có sự ra đời của các thế hệ máy tính điện tử. Cho đến nay trên thế giới đã hình thành những trường phái nghiên cứu ở một số nước như : Mỹ, Nhật, Liên Xô, Tiệp, Đức, Ba Lan ... và đã được nhiều kết quả khả quan trên các lĩnh vực về nghiên cứu lý luận và ứng dụng .

Trong phạm vi giới hạn về thời gian, phần nghiên cứu của chúng ta chỉ giới hạn ở một số vấn đề về các phương pháp cơ bản để tính động lực, các bài toán dao động của

hệ có một hoặc một số bậc tự do; dao động của dầm thẳng, dao động của một số hệ phức tạp ?

## 1-2 Các phương pháp cơ bản để giải bài toán dao động công trình

Chúng ta nhắc lại hai dạng cơ bản là phương pháp tĩnh và phương pháp năng lượng.

### 1- Phương pháp tĩnh

Trên cơ sở các phương trình tĩnh học quen thuộc (nếu là phẳng : 3 phương trình, nếu là hệ không gian : 6 phương trình) bổ sung các yếu tố tác dụng của lực quán tính.

**Thí dụ :** Đối với hệ phẳng :

$$\begin{cases} \sum X - \sum m \cdot \frac{d^2 X(t)}{dt^2} = 0 \\ \sum Y - \sum m \cdot \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} = 0 \\ \sum M_u - \sum J_{m(u)} \cdot \frac{d^2 \alpha_u(t)}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

Trong đó :

$X(t), Y(t)$

$\alpha_u(t)$

Là chuyển vị tịnh tiến của khối lượng  $m$  theo phương trục  $X$  và  $Y$ .  
Là chuyển vị xoay của khối lượng  $m$  quanh trục  $u$  (trục vuông góc với mặt phẳng  $xOy$ ).

$$-m \cdot \frac{d^2 X(t)}{dt^2} \quad ; \quad -m \cdot \frac{d^2 Y(t)}{dt^2}$$

Các thành phần theo phương  $X, Y$  của lực quán tính của khối lượng  $m$  khi chuyển động.

$$J_{m(u)} = \int_m \rho_u^2 dm$$

Moment quán tính của khối lượng  $m$  đối với trục  $u$ ,  $\rho_u$  là khoảng cách từ phân tố khối lượng  $dm$  đến trục  $u$ .

### 2- Phương pháp năng lượng

Dựa trên cơ sở định luật bảo toàn năng lượng

$$K + U = \text{Const}$$

Trong đó :  $K$ – Động năng của hệ khi dao động.

$U$ – Thế năng của hệ

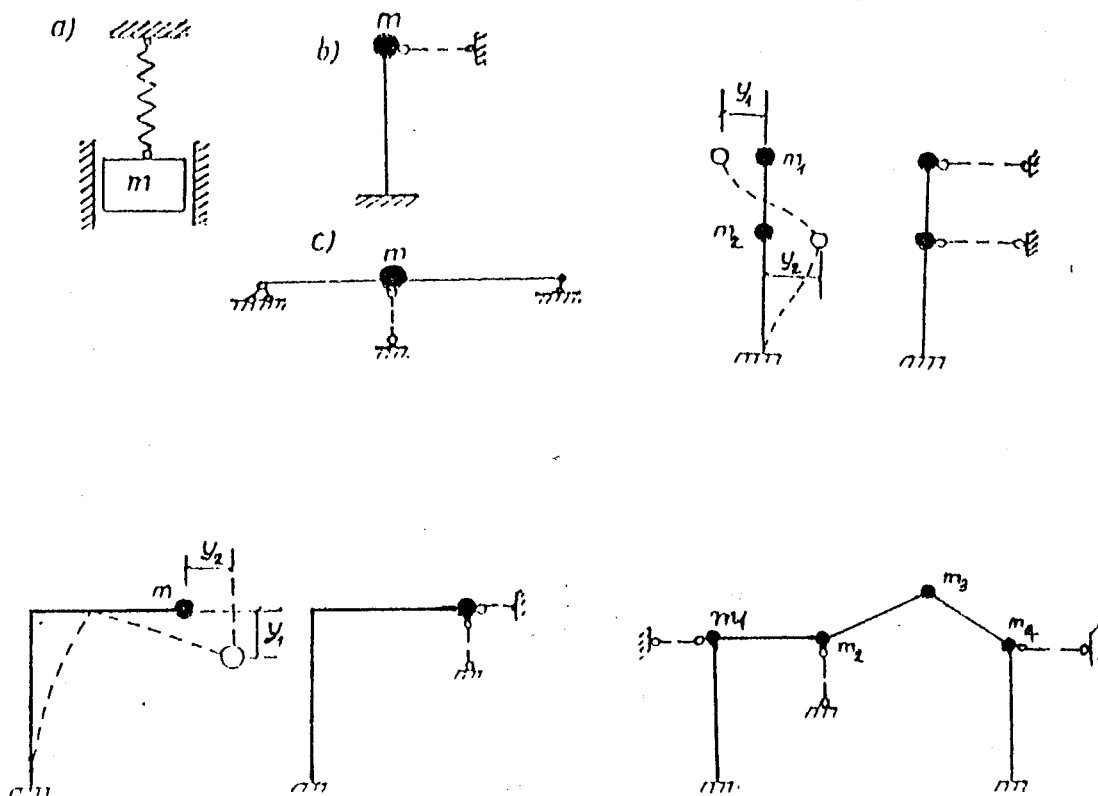
3- Ngoài các phương pháp trên, đối với từng bài toán cụ thể, kết cấu cụ thể, tải trọng tác dụng ...

Người ta có thể giải bài toán động lực học công trình bằng những phương pháp khác nhau nhằm đơn giản hóa quá trình tính toán.

### 1-3 Bậc tự do của hệ đàn hồi

Định nghĩa về độ tự do của hệ đàn hồi cũng tương tự như trong phần cơ học kết cấu, chỉ khác ở chỗ ta xét trên khối lượng. Do đó bậc tự do của hệ đàn hồi là thông số độc lập cần thiết để xác định vị trí của tất cả các khối lượng đặt trên hệ đó.

Bậc tự do của hệ càng nhiều thì việc bảo toàn động học càng phức tạp hơn. Những hệ đàn hồi có khối lượng phân bố đều là những hệ có bậc tự do bằng vô cùng. Cũng cần quan niệm rằng việc phân chia hệ theo bậc tự do chỉ là lý tưởng hóa sơ lược, còn thực tế các hệ đều là hệ có nhiều bậc tự do. Tuy nhiên nhiều trường hợp thay thế không khác nhiều so với hệ thực. Hình vẽ dưới đây nêu lên một số trường hợp về cách phân chia bậc tự do của hệ.



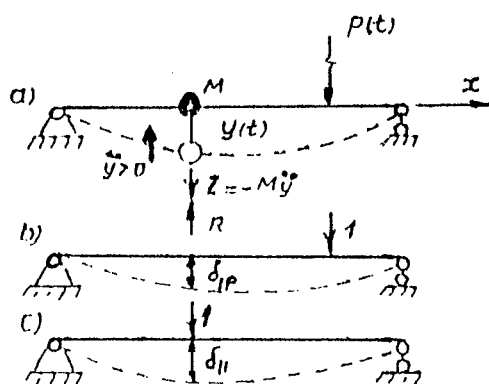


## CHƯƠNG 1

### DAO ĐỘNG CỦA HỆ CÓ MỘT BẬC TỰ DO

#### 1-1 Phương trình vi phân tổng quát của dao động

Để thiết lập phương trình tổng quát của hệ có một bậc tự do, ta nghiên cứu trường hợp sau đây :



Hình 1-1

Có một khối lượng tập trung  $m$  đặt trên dầm giản đơn  $AB$ , coi dầm là vật thể đàn hồi và không có khối lượng. Hệ chịu tác động của lực kích thích thay đổi theo thời gian  $P(t)$ . Hình 1-1.

Vị trí khối lượng  $m$  khi dao động được xác định qua hàm số  $y(t)$  với quy ước khi khối lượng  $m$  chuyển vị xuống dưới là dương và vị trí ban đầu của khối lượng khi chưa dao động có tọa độ  $y=0$ .

Trong trường hợp trên dao động của khối lượng  $m$  chịu tác dụng của các lực sau :

- Lực quán tính của khối lượng  $Z = -m.\ddot{y}$ , lực này đặt tại khối lượng  $m$ .
- Lực kích thích  $P(t)$ .
- Lực cản  $R = \beta.\dot{y}$  (còn gọi là lực phản hồi).

Trong đó :

$\beta$  : Hệ số tỷ lệ đặc trưng cho sự cản, đơn vị là  $\frac{kN}{cm.s}$   
 $\dot{y}$  : Vận tốc của khối lượng  $m$ .

Gọi :  $\delta_{11}$  là chuyển vị theo phương chuyển động tại điểm đặt khối lượng  $m$  do lực đơn vị tác dụng tĩnh tại điểm đặt khối lượng  $m$  sinh ra .

$\delta_{1P}$  là chuyển vị tại điểm đặt khối lượng  $m$  do lực đơn vị tác dụng tĩnh tại điểm đặt của lực kích thích gây ra. Hình 1-1b và c

Nếu coi chuyển vị của hệ là nhỏ, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta viết được phương trình chuyển vị  $y(t)$  của khối lượng  $m$  như sau :

$$y(t) = \delta_{11}.Z - \delta_{11}.R + \delta_{1P}.P(t)$$

Hay

$$y(t) = \delta_{11}.m.\ddot{y} - \delta_{11}.\beta.\dot{y} + \delta_{1P}.P(t)$$

Chia hai vế cho  $m.\delta_{11}$ , sau khi biến đổi ta có :

$$\ddot{y} + 2\alpha.\dot{y} + \omega^2.y = \omega^2.\delta_{1P}.P(t) \quad (1-1)$$

Trong đó :

$$\omega^2 = \frac{1}{m.\delta_{11}} \quad ; \quad 2\alpha = \frac{\beta}{m} \quad (1-2)$$

Phương trình (1-1) được gọi là phương trình vi phân tổng quát của dao động của hệ có một bậc tự do.

## 1-2 Dao động tự do không có lực cản và có lực cản

### 1- Dao động tự do không có lực cản

Dao động tự do (hay còn gọi là dao động riêng) của hệ là dao động sinh ra bởi một lực kích động bất kỳ tác dụng trên hệ rồi ngưng ngay tức thời.

Từ phương trình (1-1) viết được phương trình vi phân của dao động tự do không có lực cản :

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (1-3)$$

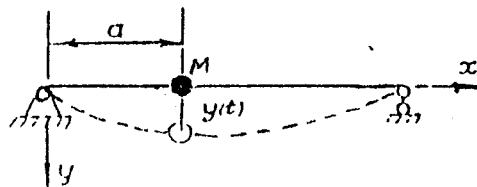
Đây là phương trình vi phân cấp hai không có vế phải và có hệ số là hằng số.

Nghiệm của phương trình (1-3) có dạng :

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (1-4)$$

A, B là những hằng số tích phân, xác định bằng các điều kiện ban đầu.

Đạo hàm bậc nhất của chuyển vị  $y(t)$  theo thời gian sẽ có được vận tốc của khối lượng m.



Hình 1-2

$$\dot{y}(t) = v = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t \quad (1-5)$$

Khi  $t = 0$ ;  $y = y_0$  và  $\dot{y} = \dot{y}_0 = v_0$

Thay các điều kiện trên vào phương trình (1-4) và phương trình (1-5) có được :

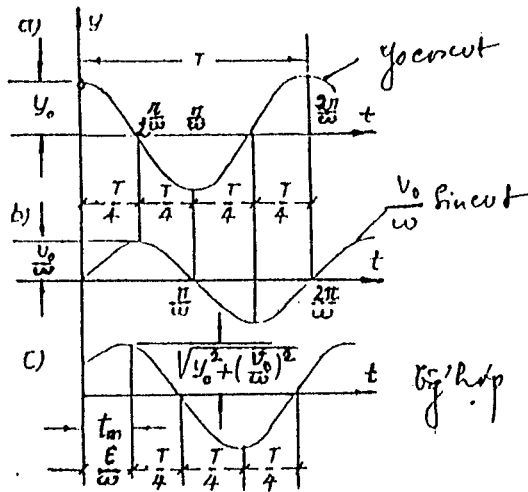
$$A = y_0 \quad ; \quad B = \frac{v_0}{\omega}$$

Vậy phương trình dao động có dạng :

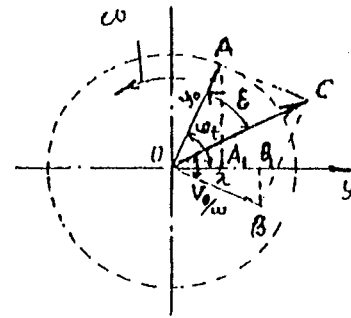
$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (1-6)$$

Phương trình (1-6) cho thấy dao động của hệ có hai thành phần : Dao động phụ thuộc chuyển vị ban đầu  $y_0$  của khối lượng tỷ lệ với hàm  $\cos \omega t$ , và dao động phụ thuộc tốc độ ban đầu  $v_0$  tỷ lệ với hàm  $\sin \omega t$ .

Hình 1-3 cho thấy chuyển động của khối lượng m theo thời gian t



Hình 1-3



Hình 1-4

Nếu biểu diễn dao động bằng véc tơ quay (Hình 1-4). Trên hình biểu thị véc tơ  $\vec{OA}$  có độ lớn bằng  $y_0$  quay quanh điểm cố định O với vận tốc góc  $\omega$  không đổi ( $\omega$  gọi là tần số góc của dao động). Nếu ở thời điểm ban đầu ( $t = 0$ ) véc tơ  $\vec{OA}$  trùng với trục y, thì ở thời điểm bất kỳ  $t$  véc tơ  $\vec{OA}$  sẽ hợp với trục y một góc là  $\omega t$ . Hình chiếu của véc tơ  $\vec{OA}$  lên trục y là  $OA_1 = y_0 \cos \omega t$  chính là số hạng đầu của biểu thức (1-6) véc tơ  $\vec{OB}$  có độ lớn  $V_0/\omega$  và vuông góc với vectơ  $\vec{OA}$ , hình chiếu của véc tơ  $\vec{OB}$  lên trục y là  $OB_1 = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t$  chính là số hạng thứ hai của biểu thức (1-6).

Chuyển vị toàn phần y của khối lượng m dao động trên trục y được xác định bằng tổng hai hình chiếu của hai véc tơ vuông góc với nhau  $\vec{OA}$  và  $\vec{OB}$  cùng quay với vận tốc góc  $\omega$  cũng nhận được kết quả như trên nếu xét véc tơ  $\vec{OC}$  (Tổng hình học của hai véc tơ  $\vec{OA}$  và  $\vec{OB}$  và lời giải là hình chiếu của  $\vec{OC}$  trên trục y).

Độ lớn của véc tơ  $\vec{OC}$  là a và được tính bằng biểu thức theo quan hệ hình học.

$$OC = a = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad (1-7)$$

$\vec{OC}$  Hợp với trục y một góc  $(\omega t - \epsilon)$ .

Trong đó :

$$\epsilon = \arctg \frac{v_0}{\omega \cdot y_0}$$

Phương trình (1-6) viết được dưới dạng :

$$y = a \cdot \cos(\omega t - \epsilon) \quad (1-8)$$



Nếu gọi  $\lambda$  là góc hợp giữa vectơ  $\vec{OC}$  và  $\vec{OB}$  thì công thức (1-8) có thể viết dưới dạng

$$y = a \cdot \cos \left[ \omega t - \left( \frac{\pi}{2} - \lambda \right) \right]$$

Hay

$$y = a \cdot \sin(\omega t + \lambda) \quad (1-9)$$

Trong đó :

$$\lambda = \arctg \left( \frac{y_0 \cdot \omega}{v_0} \right) \quad (1-10)$$

Các đại lượng  $a$ ;  $\lambda$  là các hằng số phụ thuộc điều kiện ban đầu của chuyển động.

So sánh hai biểu thức (1-6) và (1-9) ta thấy tổng của hai chuyển động đơn điều hoà là một chuyển động đơn điều hoà.

Độ lớn của vectơ  $\vec{OC}$  là  $a$  được gọi là biên độ dao động ;  $\lambda$  là góc lệch pha giữa hai dao động biểu diễn trên hình 1-3b và 1-3c còn  $\varepsilon$  là độ lệch pha của dao động trên hình 1-3a và 1-3c.

$t_m = \frac{\varepsilon}{\omega}$  Là thời gian lệch nhau giữa hai tung độ cực đại của dao động trên hình

1-3a và hình 1-3c.

Ta cũng thấy khi khối lượng  $m$  chuyển vị xa vị trí cân bằng nhiều nhất, tức là đạt biên độ  $y_{\max}$  thì khi đó vận tốc  $\dot{y} = v = 0$ , còn khi  $y = 0$  thì  $\dot{y} = v_{\max}$ . Hay nói cách khác khi thế năng bằng không ( $m$  ở vị trí cân bằng  $y = 0$ ) thì động năng cực đại, động năng này làm khối lượng tiếp tục chuyển vị, chỉ đến lúc động năng giảm bằng không ( $v = 0$ ) thì thế năng lại đạt tới cực đại ... quá trình cứ thế tiếp diễn.

Dao động chúng ta đang khảo sát là dao động điều hoà. Sau đây ta xét các đại lượng đặc trưng của dao động trên, đó là tần số và chu kỳ dao động.

Chúng ta nhắc lại vài định nghĩa sau :

- **Chu kỳ dao động** là thời gian cần thiết để khối lượng  $m$  thực hiện được một dao động toàn phần. Ký hiệu chu kỳ dao động là  $T$ .

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (s)$$

- **Tần số dao động** là số lần dao động trong một giây. Ký hiệu là  $f$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1/s)$$

- $\omega = 2\pi \cdot f$  gọi là tần số vòng của dao động riêng (thường gọi tắt là **tần số dao động riêng**).

Từ biểu thức (1-2) có được :

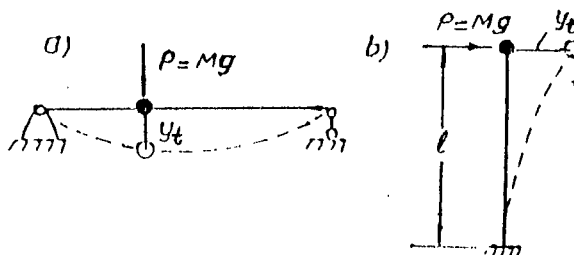
a- Tần số vòng của dao động riêng :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{P \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{y_t}} \quad (1/s) \quad (1-11)$$

Trong đó :

$g$  : Gia tốc trọng trường ( $\text{cm/s}^2$ )

$y_t$  : Chuyển vị của khối lượng  $m$  do lực  $P = m \cdot g$  tác dụng tĩnh tại điểm đặt khối lượng  $m$  gây ra. Hình 1-5a, b .



Hình 1-5

Thí dụ trường hợp 1-5b. Nếu xét cả uốn dọc ta có :

$$y_t = \delta_{11} \cdot P = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^3}{EJ}}{1 - \frac{P}{P_{Ole}}} \cdot P$$

Hay

$$y_t = \frac{\ell^3}{3EJ(1 - \frac{m \cdot g}{P_{Ole}})} \cdot m \cdot g$$

b- Tần số dao động

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{y_t}} \quad (1-12)$$

c- Chu kỳ dao động

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{y_t}{g}} \quad (1-13)$$

$$\text{Từ biểu thức } y = a \cdot \sin(\omega t + \lambda) \quad \text{có} \quad y_{\max} = a \quad (1-14)$$

$$\text{Vận tốc} \quad v = \dot{y} = a \cdot \omega \cos(\omega t + \lambda) \quad \text{có} \quad \dot{y}_{\max} = a \cdot \omega \quad (1-15)$$

$$\text{Gia tốc} \quad \ddot{y} = -a \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \lambda) \quad \text{có} \quad \ddot{y}_{\max} = a \cdot \omega^2 \quad (1-16)$$

Muốn xác định giá trị  $t_m$  xác định tọa độ thời gian xảy ra chuyển vị lớn nhất của khối lượng  $m$  ta thiết lập .

$$y_{\max} = a \cdot \sin(\omega t_m + \lambda) = a$$

Vậy

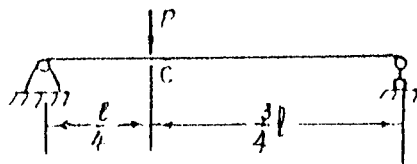
$$\omega \cdot t_m + \lambda = \frac{\pi}{2}$$

Do đó

$$t_m = \frac{1}{\omega} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \lambda \right) = \frac{\varepsilon}{\omega}$$

### Thí dụ 1-1:

Xác định tần số vòng và chu kỳ dao động riêng của dầm trên hình 1-6. Cho  $P=0,75\text{kN}$ ;  $l=1\text{m}$ ;  $F_d=4 \times 4\text{cm}$ ;  $E=2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ ;  $g=981\text{cm/s}^2$



Hình 1-6

Chuyển vị tĩnh tại điểm C theo cách tính thông thường ta có được :

$$y_t = \frac{3}{256} \cdot \frac{l^3}{EJ} \cdot P$$

Vậy

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_t}} = \sqrt{981 \cdot \frac{256}{3} \cdot \frac{2,1 \cdot 10^4 \cdot 21,3}{100^3 \cdot 0,75}} = 70,6 \text{ s}^{-1}$$

Chu kỳ dao động riêng :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{70,6} = 0,089 \text{ (s)}$$

### Thí dụ 1-2 :

Xác định tần số, chu kỳ dao động và chuyển vị cực đại của khối lượng ở đầu thanh (hình 1-7).  $P = 3,5\text{kN}$ ;  $l = 1,50\text{m}$ ;  $J=2140\text{cm}^4$ ;  $E=2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ . Tại thời gian ban đầu ( $t = t_0$ ) trọng tâm khối lượng lệch về bên trái một khoảng cách  $y_0 = 1,2\text{cm}$  và có vận tốc chuyển động  $v_0 = \dot{y}_0 = 1,8\text{m/s}$

Chuyển vị tĩnh tại đầu thanh do lực đơn vị tác dụng

$$\delta_{11} = \frac{\ell^3}{3EJ} = \frac{150^3}{3.2,1.10^4.2140} = 0,025 \quad (\text{cm/kN})$$

+ Tần số vòng :

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{P \cdot \delta_{11}}} \\ &= \sqrt{\frac{981}{3,50 \cdot 0,025}} = 104,5 \quad (\text{s}^{-1})\end{aligned}$$

+ Chu kỳ dao động :

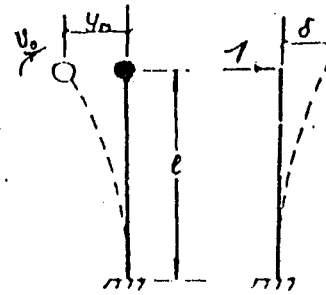
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{104,5} = 0,0602 \quad (\text{s})$$

+ Tần số dao động :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,0602} = 16,6 \quad (\text{s}^{-1})$$

+ Biên độ dao động :

$$y_{\max} = a = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{1,2^2 + \left(\frac{108}{104,5}\right)^2} = 2,1 \quad (\text{cm})$$



Hình 1-7

## 1-2 Dao động tự do có lực cản

Để tránh phức tạp cho bài toán dao động khi xét tới ảnh hưởng của lực cản (Do lực cản có nhiều dạng khác nhau với những đặc trưng khác nhau) ta chỉ xét trường hợp lực cản tỷ lệ với vận tốc.

Phương trình vi phân của dao động tự do có lực cản :

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (1-17)$$

Trong đó đã biết :

$$2\alpha = \frac{\beta}{m} ; \quad \omega^2 = \frac{1}{m \cdot \delta_{11}}$$

Phương trình đặc trưng của (1-17) có dạng :

$$S^2 + 2\alpha S + \omega^2 = 0 \quad (1-18)$$

Nghiệm của (1-18) có dạng :

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

$$S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1-17) có dạng tổng quát

$$y = e^{-\alpha t} \left( C_1 \cdot e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \cdot t} \right) \quad (1-19)$$

Nghiệm của phương trình (1-19) rõ ràng phụ thuộc quan hệ tỷ lệ giữa  $\alpha$  và  $\omega$ . Tùy theo độ lớn của  $\alpha$  và  $\omega$  sẽ xảy ra ba trường hợp sau đây :

a- Trường hợp lực cản nhỏ ( $\alpha < \omega$ )

Đây là trường hợp thường xảy ra, khi đó nghiệm

$$S_{1,2} = -\alpha \pm i \cdot \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

Gọi  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$

$$S_{1,2} = -\alpha \pm i \cdot \omega_1$$

Phương trình (1-19) có dạng :

$$y = e^{-\alpha t} \cdot (C_1 \cdot e^{i \cdot \omega_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_1 \cdot t})$$

Nếu thay :  $e^{i \cdot \omega_1 \cdot t} = \cos \omega_1 t + i \cdot \sin \omega_1 t$

Và  $e^{-i \cdot \omega_1 \cdot t} = \cos \omega_1 t - i \cdot \sin \omega_1 t$

Thì có thể viết phương trình (1-19) dưới dạng :

$$y = e^{-\alpha t} \cdot (A \cdot \cos \omega_1 t + B \cdot \sin \omega_1 t) \quad (1-20)$$

Trong đó :  $A = C_1 + C_2$  và  $B = i \cdot (C_1 - C_2)$  là các hằng số tích phân xác định từ điều kiện ban đầu  $t = 0 \rightarrow y = y_0$  ;  $\dot{y} = \dot{y}_0 = v_0$  . Vận tốc của chuyển động.

$$v = \dot{y} = -\alpha \cdot e^{-\alpha t} \cdot (A \cdot \cos \omega_1 t + B \cdot \sin \omega_1 t) + e^{-\alpha t} \cdot \omega_1 \cdot (-A \cdot \sin \omega_1 t + B \cdot \cos \omega_1 t)$$

Hay  $v = -\alpha y + e^{-\alpha t} \cdot \omega_1 \cdot (-A \cdot \sin \omega_1 t + B \cdot \cos \omega_1 t)$

Thay điều kiện ban đầu vào có được :

$$A = y_0 \quad ; \quad B = \frac{v_0 + \alpha y_0}{\omega_1}$$

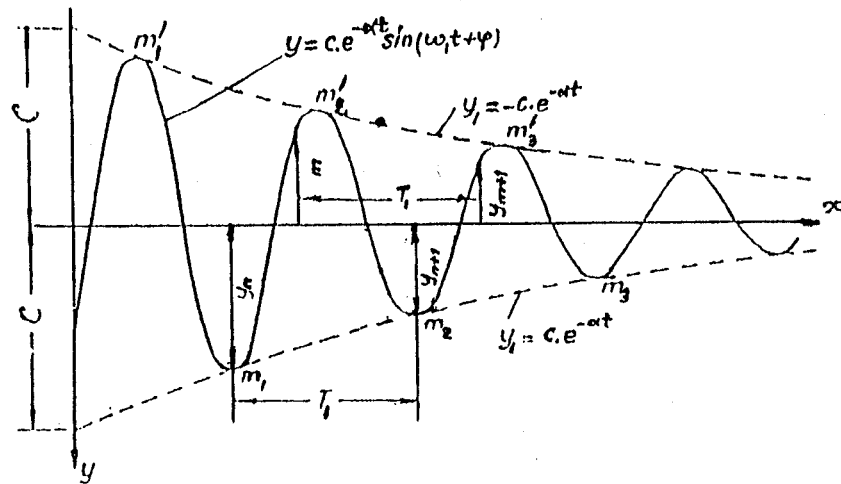
Vậy có :

$$y = e^{-\alpha t} \cdot \left[ y_0 \left( \cos \omega_1 t + \frac{\alpha \cdot y_0}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t \right) + \frac{v_0}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t \right]$$

Hay

$$y = e^{-\alpha t} \left( y_0 \cdot \cos \omega_1 t + \frac{v_0 + \alpha \cdot y_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (1-21)$$

- Số hạng thứ nhất tỷ lệ với  $\cos \omega_1 t$  chỉ phụ thuộc chuyển vị ban đầu  $y_0$ .
- Số hạng thứ hai tỷ lệ với  $\sin \omega_1 t$  phụ thuộc cả chuyển vị ban đầu  $y_0$  và tốc độ ban đầu  $v_0$ . Phương trình cho thấy đây là dao động tắt dần. Có dạng biểu diễn như hình 1-8.



Hình 1-8

Nếu đặt  $A = C \cdot \sin \varphi$   
 $B = C \cdot \cos \varphi$

Với  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

Và  $\varphi = \arctg \frac{A}{B}$

Thì phương trình (1-21) có thể viết dưới dạng :

$$y = C \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

Hay

$$y = e^{-\alpha t} \cdot \sqrt{y_0^2 + \frac{(v_0 + \alpha y_0)^2}{\omega_1^2}} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (1-22)$$

+ Chu kỳ dao động :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \quad (s)$$

+ Tần số dao động :

$$f = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}{2\pi} \quad (1/s)$$

+ Tần số vòng của dao động tắt dần :

$$\omega_1 = f.2\pi \quad (1/s)$$

Dao động riêng tắt dần là một dao động điều hòa. Nhưng biên độ thay đổi theo thời gian  $C.e^{-\alpha t}$  và tắt dần theo quy luật số mũ âm.

Để nghiên cứu độ tắt dần ta xét tỷ số giữa hai biên độ chuyển vị của khối lượng cách nhau một chu kỳ  $T_1$

$$\begin{aligned} \text{Ký hiệu } \eta &= \frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{C.e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)}{C.e^{-\alpha(t+T_1)} \cdot \sin[\omega_1 \cdot (t + T_1) + \varphi]} \\ &= \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T_1)}} = e^{\alpha T_1} \end{aligned}$$

Suy ra :

$$\alpha \cdot T_1 = \ln\left(\frac{y_n}{y_{n+1}}\right) = \chi$$

$\chi$  biểu thị tốc độ tắt dần có tên gọi là Logarit dêcrêmen của dao động và luôn luôn là một hằng số.  $\chi$  là hệ số quan trọng, độ lớn của nó được đo đạc bằng thực nghiệm trên kết cấu thực tế.

Một số kết quả đo đạc cho thấy :

Kết cấu thép	$\chi = 0,10 - 0,5$
Kết cấu gỗ	$\chi = 0,03 - 0,15$
Kết cấu BTCT	$\chi = 0,08 - 0,20$
Cầu thép	$\chi = 0,01 - 0,15$
Cầu BTCT	$\chi = 0,31$
Dầm BTCT	$\chi = 0,28$
Khung BTCT	$\chi = 0,12$

Thường thì tần số vòng  $\omega_1$  sắp xỉ với tần số  $\omega$ . Đối với trường hợp tắt dần xảy ra rất nhanh, cho nên trong tính toán người ta thường lấy

$$\omega_1 \cong \omega$$

### Ảnh hưởng của lực cản tới chu kỳ dao động

Ta có chu kỳ dao động tự do :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

Chu kỳ dao động có lực cản :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}}$$

$$\frac{T_1}{T} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}} > 1$$

Có nghĩa là lực cản sẽ làm cho chu kỳ dao động dài hơn, dao động xảy ra chậm hơn dao động tự do .

**b- Trường hợp lực cản lớn ( $\alpha > \omega$ )**

Đặt :  $\omega_2 = \alpha^2 - \omega^2$

Nghiệm của phương trình (1-17) có dạng

$$y = e^{-\alpha t} \cdot (\gamma_1 \cdot e^{\omega_2 t} + \gamma_2 \cdot e^{-\omega_2 t})$$

Hay :

$$y = e^{-\alpha t} \cdot (C_1 \cdot \text{ch}\omega_2 t + C_2 \cdot \text{sh}\omega_2 t)$$

Hay viết dưới dạng khác:

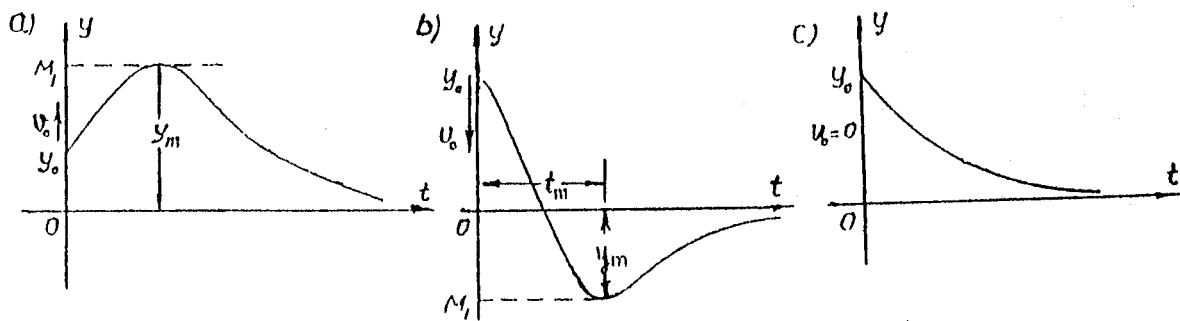
$$y = a_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \text{sh}\left(\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \cdot t + \theta\right) \quad (2-23)$$

$C_1$ ;  $C_2$  xác định từ điều kiện ban đầu  $y$  và  $v$  khi  $t = 0$ . Sau khi có  $C_1$  và  $C_2$  thay vào có :

$$y = e^{-\alpha t} \cdot \left( y_0 \cdot \text{ch}\omega_2 t + \frac{v_0 + \alpha \cdot y_0}{\omega_2} \text{sh}\omega_2 t \right) \quad (2-24)$$

**Đây là phương trình của chuyển động không tuần hoàn : Hình 1-9 cho thấy ba dạng chuyển động có thể xảy ra :**





Hình 1-9

### c- Trường hợp $\alpha = \omega$

Khi đó phương trình đặc trưng có nghiệm kép :

$$S_{1,2} = -\alpha$$

Nghiệm có dạng :

$$y = e^{-\alpha t} \cdot (C_1 t + C_2) \quad (1-25)$$

Đây cũng là chuyển động không tuần hoàn như trường hợp b.

Qua khảo sát ba trường hợp nói trên, trường hợp b và c coi như không xảy ra dao động và trong thực tế hai trường hợp này ít xảy ra.

### 1-3 Dao động cưỡng bức trong trường hợp tổng quát

Phương trình vi phân tổng quát của dao động (1-1) đã được thiết lập trong mục 1-1.

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \delta_{1P} \cdot P(t)$$

#### 1- Trường hợp lực cản nhỏ ( $\alpha < \omega$ )

Nghiệm riêng của phương trình (1-1) có dạng :

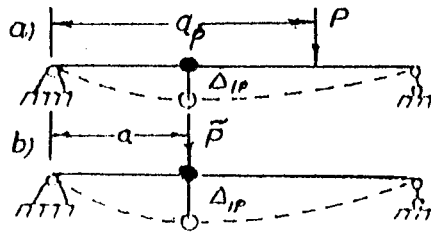
$$y = y_0 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left( \cos \omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{v_0}{\omega_1} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega_1 t \right) \quad (1-26)$$

- Số hạng đầu là dao động do độ lệch  $y_0$  so với vị trí cân bằng. Số hạng sau là dao động do ảnh hưởng của vận tốc ban đầu  $v_0$ .

- Lực kích thích  $P(t)$  sẽ làm cho chuyển vị có thêm một số hạng nữa.

Xét tại thời điểm  $\tau$  bất kỳ ở trong khoảng thời điểm 0 và  $t$  nếu trong khoảng thời gian  $d\tau$  thì lực kích thích sẽ làm cho tốc độ  $v$  có gia số  $dv$ , chính  $dv$  sẽ làm cho chuyển vị tổng cộng lại thời điểm  $\tau$  có thêm một lượng tương tự như số hạng thứ hai của biểu thức (1-26).

$$dy = d \left\{ y_0 \cdot e^{-\alpha t} \cdot (\cos \omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t) + \frac{v_0}{\omega_1} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega_1 t \right\} + \frac{dv}{\omega_1} \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \sin \omega_1(t-\tau) \quad (1-27)$$



Hình 1-10

Cần xác định số gia vận tốc  $dv$ . Giá trị xung lượng do tác động trong khoảng thời gian đó sẽ bằng biến thiên động lượng tại thời điểm đó. Nghĩa là :

$$S = P(\tau) \cdot d\tau = d(mv) \quad (1-28)$$

$P(\tau)$  ở đây biểu thị lực kích thích đặt tại khối lượng  $m$ . Nếu  $P(\tau)$  đặt ở vị trí bất kỳ thì ta phải thay bằng lực kích thích tương đương  $\tilde{P}(\tau)$  đặt tại khối lượng. Như hình 1-10.

$$\Delta_{1P} = P \cdot \delta_{1P}$$

Và  $\Delta_{1P} = \tilde{P} \cdot \delta_{11}$

Suy ra :  $\tilde{P} = P \cdot \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$

Vậy :  $S = \tilde{P}(\tau) \cdot d\tau = P(\tau) \cdot \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \cdot d\tau \quad (1-29)$

Hay :

$$P(\tau) \cdot \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \cdot d\tau = d(m \cdot v)$$

Do  $m$  không thay đổi nên

$$dv = \frac{1}{m} \cdot P(\tau) \cdot \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \cdot d\tau$$

Và thay vào biểu thức (1-27) có được :

$$dy = d \left\{ y_0 \cdot e^{-\alpha t} \cdot (\cos \omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t) + \frac{v_0}{\omega_1} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega_1 t \right\} + \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11} \cdot m \cdot \omega_1} \cdot P(\tau) \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \sin \omega_1(t-\tau) \cdot d\tau$$

Do

$$\omega^2 = \frac{1}{m \cdot \delta_{11}}$$

Vậy :

$$dy = d \left\{ y_0 \cdot e^{-\alpha t} \cdot (\cos \omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t) + \frac{v_0}{\omega_1} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega_1 t \right\} \\ + \frac{\omega^2 \cdot \delta_{1P}}{\omega_1} \cdot P(\tau) \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \sin \omega_1(t-\tau) \cdot d\tau$$

Lấy tích phân của biểu thức trên từ  $\tau = 0$  đến  $\tau = t$ ; ta có

$$y = y_0 \cdot e^{-\alpha t} \cdot (\cos \omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t) + \frac{v_0}{\omega_1} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega_1 t \\ + \frac{\omega^2 \cdot \delta_{1P}}{\omega_1} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \sin \omega_1(t-\tau) \cdot d\tau \quad (1-30)$$

Hay

$$y = a \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi) + \frac{\omega^2 \cdot \delta_{1P}}{\omega_1} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \sin \omega_1(t-\tau) \cdot d\tau \quad (1-31)$$

Với

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{(v_0 + \alpha \cdot y_0)^2}{\omega_1^2}} \quad ; \quad \text{và} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_0 \cdot \omega_1}{v_0 + \alpha \cdot y_0}$$

## 2- Trường hợp lực cản lớn ( $\alpha > \omega$ )

Phương trình có dạng :

$$y = a \cdot e^{-\alpha t} \cdot \operatorname{sh} \left( \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \cdot t + \theta \right) \\ + \frac{\omega^2 \cdot \delta_{1P}}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} \int_0^t P(\tau) \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \operatorname{sh} \left( \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} (t-\tau) \right) d\tau \quad (1-32)$$

## 3- Trường hợp ( $\alpha = \omega$ )

$$y = a \cdot e^{-\alpha t} (A_2 t + B_2) + \omega^2 \cdot \delta_{1P} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot (t-\tau) \cdot d\tau \quad (1-33)$$

\* **Chú ý :**

Khi thiết lập các biểu thức ta đã coi lực kích thích  $P(t)$  không tham gia vào các điều kiện ban đầu  $y_0, v_0$  tức là dao động riêng xảy ra trước khi đặt lực  $P(t)$ .

**1-4 Dao động cưỡng bức có và không có lực cản chịu lực kích thích tuần hoàn  $P(t) = P.\sin rt$**

**1- Trường hợp không có lực cản**

**a- Phương trình dao động**

$$\ddot{y} + \omega^2.y = \omega^2.\delta_{1P}.P(t) \quad (1-34)$$

Từ kết quả đã thiết lập cho trường hợp dao động cưỡng bức không có lực cản và thay  $P(t) = P.\sin rt$ ;  $\alpha = 0$ ;  $\omega_1 = \omega$  sẽ nhận được nghiệm của (1-34).

$$y = A.\cos\omega t + P.\sin\omega t + P.\delta_{1P}.\omega \int_0^t \sin\omega(t-\tau).\sin r\tau.d\tau$$

Lấy tích phân số hạng thứ ba trong công thức trên ta có

$$\int_0^t \sin\omega(t-\tau).\sin r\tau.d\tau = \frac{\omega}{\omega^2 - r^2} \left( \sin rt - \frac{r}{\omega}.\sin\omega t \right)$$

Thay vào nghiệm của (1-34) và chú ý  $A = y_0$ ;  $B = \frac{v_0 + \alpha.y_0}{\omega_1}$  sẽ nhận được :

$$y = y_0.\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}.\sin\omega t + \frac{P.\delta_{1P}}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}} \left( \sin rt - \frac{r}{\omega}.\sin\omega t \right)$$

Hay

$$y = y_0.\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}.\sin\omega t - \frac{P.\delta_{1P}}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}}.\frac{r}{\omega}.\sin\omega t + \frac{P.\delta_{1P}}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}}.\sin rt \quad (1-35)$$

Hai số hạng đầu của (1-35) phụ thuộc điều kiện ban đầu  $y_0$ ;  $v_0$  của hệ và có tần số của dao động tự do nếu  $y_0 = 0$ ;  $v_0 = 0$  thì hai số hạng đó không tồn tại. Số hạng thứ ba luôn xuất hiện cùng với dao động cưỡng bức nên nó biểu thị dao động tự do bẩm sinh. Số hạng thứ tư tần số lực kích thích là tần số dao động nên biểu thị dao động thuần cưỡng bức.

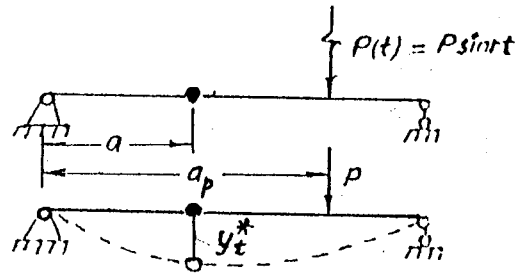
Nếu ở thời điểm  $t = 0$  hệ ở vị trí tĩnh, tức  $y_0 = 0$ ;  $v_0 = 0$  thì ta có

$$y = \frac{P.\delta_{1P}}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}} \left( \sin rt - \frac{r}{\omega}.\sin\omega t \right) \quad (1-36)$$

Thay tích  $P \cdot \delta_{IP} = y_t^*$  (hình 1-11) là chuyển vị tại khối lượng  $m$  do biên độ  $P$  của lực kích thích tác dụng tĩnh gây nên, ta sẽ viết được :

$$y = y_t^* \cdot \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}} \cdot (\sin rt - \frac{r}{\omega} \cdot \sin \omega t)$$

(1-37)



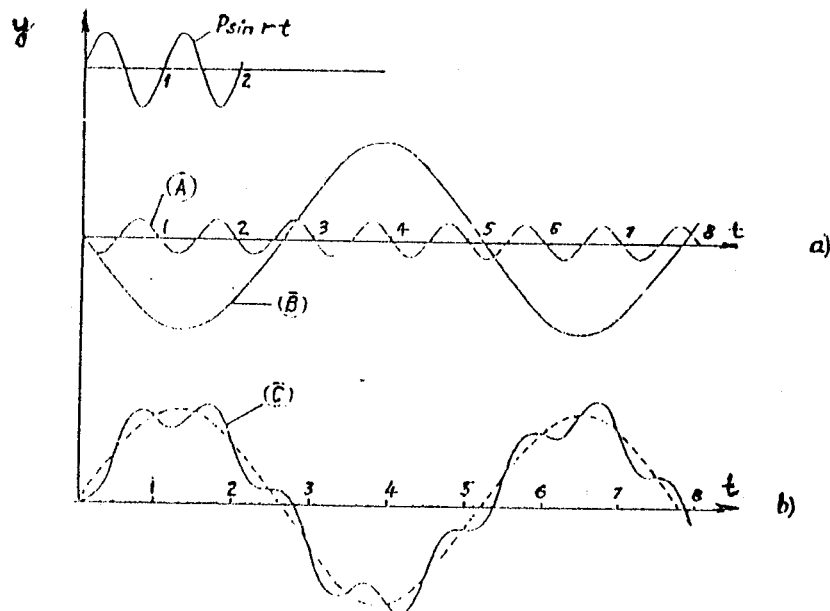
Hình 1-11

+ Dễ nhận thấy dao động có hai thành phần, một phần dao động với tần số lực kích thích  $r$  và một phần với tần số dao động tự do  $\omega$ .

Một điều cần chú ý là phần dao động riêng (số hạng thứ hai trong công thức) khi có lực cản dù nhỏ cũng sẽ mất dần sau một thời gian dao động. Sau đó hệ sẽ chuyển sang giai đoạn ổn định dao động theo chu kỳ và tần số như chu kỳ và tần số của lực kích thích, tức là :

$$y = y_t^* \cdot \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}} \cdot \sin rt \quad (1-38)$$

Hình 1-12 mô tả dạng dao động cưỡng bức không có lực cản.



Hình 1-12

### b- Hệ số động

Từ phương trình (1-37) suy ra ,

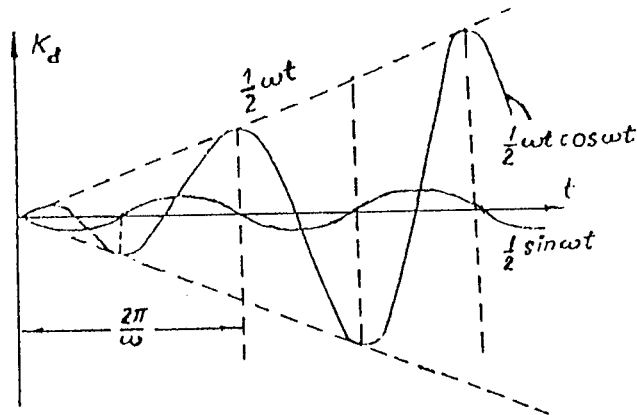
$$K_d = \frac{y}{y_t^*} = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}} (\sin rt - \frac{r}{\omega} \sin \omega t) \quad (1-39)$$

Trường hợp  $r = \omega$  tức là tần số của dao động tự do bằng tần số của lực kích thích lúc này xuất hiện hiện tượng cộng hưởng.

Tìm giới hạn của hệ số động bằng cách áp dụng qui tắc Lôpitan ta có :

$$\lim_{r \rightarrow \omega} K_d = \left( \frac{t \cos rt - \frac{1}{\omega} \sin \omega t}{-\frac{2r}{\omega^2}} \right)_{r=\omega} = \frac{1}{2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$$

Biểu diễn hàm số  $\frac{1}{2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$  trên hình 1-13.



Hình 1-13

Có thể thấy hệ số động sẽ tăng lên vô hạn theo thời gian nhưng không xảy ra tức thời mà đòi hỏi một thời gian nhất định.

Biên độ lớn nhất của chuyển động xuất hiện khi  $|\sin rt| = 1$

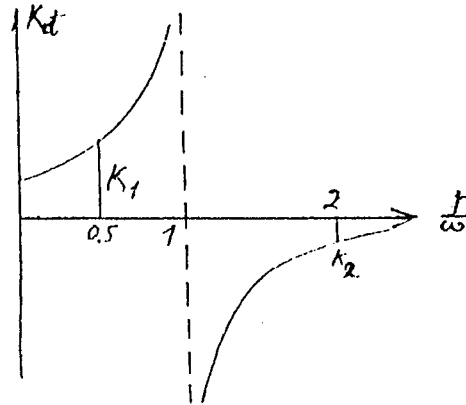
$$y_d = y_t^* \cdot \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}} \quad (1-40)$$

Khi đó hệ số động là :

$$K_d = \frac{y_d}{y_t^*} = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}} \quad (1-41)$$

Hình 1-14 biểu diễn quan hệ của hệ số động theo  $r/\omega$ .

Rõ ràng  $K_d$  rất nhạy thay đổi với tỷ số  $r/\omega$  thay đổi, khi  $r = \omega$  hay  $r \approx \omega$  thì  $K_d$  sẽ tăng vọt. Vì vậy người ta phải chú ý thiết kế để tần số  $\omega$  và  $r$  khác nhau tối thiểu là 25%



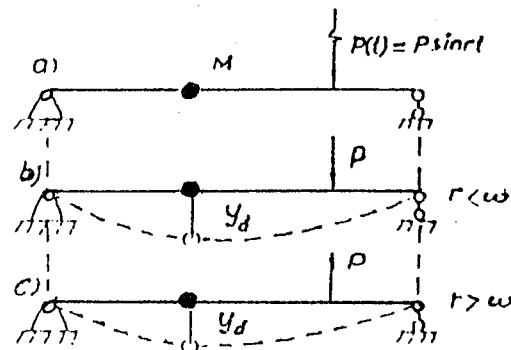
Hình 1-14

Khi  $r < \omega$  thì  $K_d > 1$ .  
 $r \ll \omega$  thì  $K_d \approx 1$ .  
 Và  $y_d \approx y_t^*$   
 $r > \omega$  thì  $K_d < 1$ .  
 $r \gg \omega$  thì  $K_d \rightarrow 0$

Như vậy khi tần số của lực kích thích càng lớn so với tần số dao động riêng thì hệ số động càng gần bằng không và biên độ dao động càng nhỏ.

Dấu của hệ số động :

- + Khi  $r < \omega$  thì  $K_d > 0$
- + Khi  $r > \omega$  thì  $K_d < 0$
- Khi  $r < \omega$ ,  $K_d > 0$  nên dao động cưỡng bức và lực kích thích luôn luôn cùng pha
- Khi  $r > \omega$ ,  $K_d < 0$  nên dao động cưỡng bức và lực kích thích lệch pha và bằng  $\pi$



Hình 1-15

Có hệ số động ta có thể chuyển bài toán động về bài toán tĩnh. Ví dụ chuyển vị  $y_d$  của khối lượng  $m$  lực bất lợi nhất.

$$y_d = y_t^* \cdot K_d$$

Tương tự cho nội lực và ứng suất :

$$M_d = M_t \cdot K_d \quad ; \quad Q_d = Q_t \cdot K_d$$

$$\sigma_d = \sigma_t \cdot K_d \quad ; \quad \tau_d = \tau_t \cdot K_d$$

### c- Hiện tượng phách

Khi  $r \approx \omega$  tức  $r/\omega = 1$  ;  $\omega + r = 2\omega = 2r$

Do đó  $\omega^2 - r^2 = (\omega + r) \cdot (\omega - r) = 2\omega \cdot (\omega - r)$

Thay các quan hệ trên vào phương trình (1-39) ta có :

$$y = y_t^* \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - r^2} \left( \sin r t - \frac{r}{\omega} \sin \omega t \right)$$

$$y = y_t^* \cdot \frac{\omega^2}{2\omega(\omega - r)} \cdot \left( 2 \cos \frac{r + \omega}{2} t \cdot \sin \frac{r - \omega}{2} t \right)$$

$$y = y_t^* \cdot \frac{\omega \cdot \sin \left( \frac{r - \omega}{2} t \right)}{(\omega - r)} \cdot \cos r t$$

Ký hiệu  $A(t) = y_t^* \cdot \frac{1}{\omega - r} \cdot \sin \left( \frac{r - \omega}{2} t \right) \cdot t$  là biên độ của dao động thì:

$$y = A(t) \cdot \cos r t \quad (1-42)$$

Chu kỳ của biên độ dao động  $A(t)$  :

$$T_A = \frac{2\pi}{\left( \frac{r - \omega}{2} \right)} = \frac{4\pi}{r - \omega} \quad (1-43)$$

Chu kỳ của dao động :

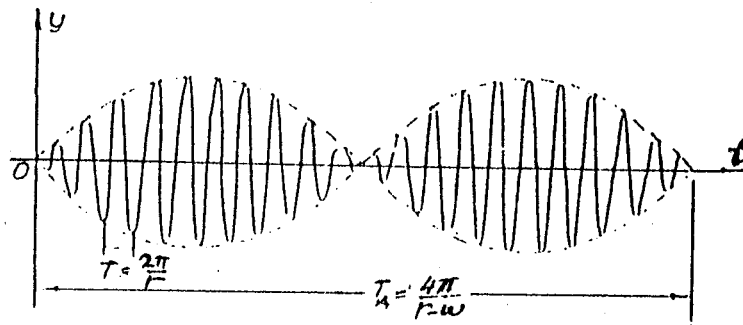
$$T = \frac{2\pi}{r}$$

Ta thấy  $T_A \gg T$ .

Như vậy khi  $r \approx \omega$  thì phương trình dao động có dạng theo công thức (1-42). Khi đó các biên độ dao động biến đổi theo chu kỳ  $T_A$ . Hiện tượng này là hiện tượng phách điều hoà của dao động. Hình 1-16 biểu thị chu kỳ  $T_A$ .

Hiện tượng phách cũng xảy ra khi hệ chịu từ hai lực kích thích trở lên và cũng còn nhiều nguyên nhân gây ra hiện tượng phách.





Hình 1-16

## 2- Trường hợp có lực cản

### a- Phương trình dao động

$$\ddot{y} + 2\alpha.\dot{y} + \omega^2.y = \omega^2.\delta_{1P}.P \sin rt \quad (1-44)$$

$$\text{Nghiệm có dạng : } y = y_1 + y_2 \quad (1-45)$$

Trong đó :

- $y_1$  : Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất (Cũng chính là nghiệm của phương trình vi phân của dao động tự do). Khi  $\alpha < \omega$  thì :

$$y_1 = e^{-\alpha t} . (A.\cos \omega_1 t + B.\sin \omega_1 t) \quad (1-46)$$

Với :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

- $y_2$  : Nghiệm riêng của phương trình vi phân có vế phải có dạng

$$y_2 = C.\cos rt + D.\sin rt \quad (1-47)$$

Tiến hành theo cách giải phương trình vi phân có được nghiệm toàn phần sau :

$$y = e^{-\alpha t} . (A.\cos \omega_1 t + B.\sin \omega_1 t) + C.\cos rt + D.\sin rt$$

Trong đó :

$$\begin{cases} C = -\frac{\omega^2.\delta_{1P}.P.2\alpha.r}{(\omega^2 - r^2)^2 + 4\alpha^2.r^2} \\ D = -\frac{\omega^2.\delta_{1P}.P.(\omega^2 - r^2)}{(\omega^2 - r^2)^2 + 4\alpha^2.r^2} \end{cases} \quad (1-48)$$

Số hạng đầu chứa phần tử  $e^{-\alpha t}$  biểu thị dao động tự do tắt dần. Hai số hạng sau biểu diễn dao động cưỡng bức.

Nếu biểu diễn nghiệm theo hằng số tích phân khác với :

$$a = \sqrt{D^2 + C^2}$$

$$\text{và} \quad \operatorname{tg} \lambda = -\frac{C}{D}$$

Thì nghiệm tổng quát có dạng :

$$y = e^{-\alpha t} \cdot (A \cdot \cos \omega_1 t + B \cdot \sin \omega_1 t) + A \cdot \sin(rt - \lambda) \quad (1-49)$$

Xác định hằng số tích phân A; B từ điều kiện :

$$t = 0; y = y_0 \text{ và}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 = v_0$$

Sau khi tiến hành đạo hàm và biến đổi, có được :

$$\begin{cases} A = y_0 + a \cdot \sin \lambda \\ B = \frac{v_0 + y_0 \cdot \alpha + \alpha \cdot a \cdot \sin \lambda - \arccos \lambda}{\omega_1} \end{cases} \quad (1-50)$$

Thay vào nghiệm toàn phần có được :

$$y = e^{-\alpha t} \cdot \left[ (y_0 + a \cdot \sin rt) \cdot \cos \omega_1 t + \frac{v_0 + \alpha \cdot y_0 + \alpha \cdot a \cdot \sin rt - \arccos rt}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t \right] + a \cdot \sin(rt - \lambda) \quad (1-51)$$

Khi ở thời điểm đầu nếu :  $y_0 = 0$  ;  $v_0 = 0$  thì

$$y = e^{-\alpha t} \cdot \left[ a \cdot \sin rt \cdot \cos \omega_1 t + \frac{a \cdot \sin rt - \arccos rt}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t \right] + a \cdot \sin(rt - \lambda)$$

Thay trị số của a vào công thức trên ta có :

$$y = \frac{\delta_{1P} \cdot P}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 \cdot r^2}{\omega^4}}} \cdot \left[ \sin(rt - \lambda) + e^{-\alpha t} \cdot (\sin \lambda \cdot \cos \omega_1 t + \frac{\alpha \cdot \sin \lambda - r \cos \lambda}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t) \right] \quad (1-52)$$

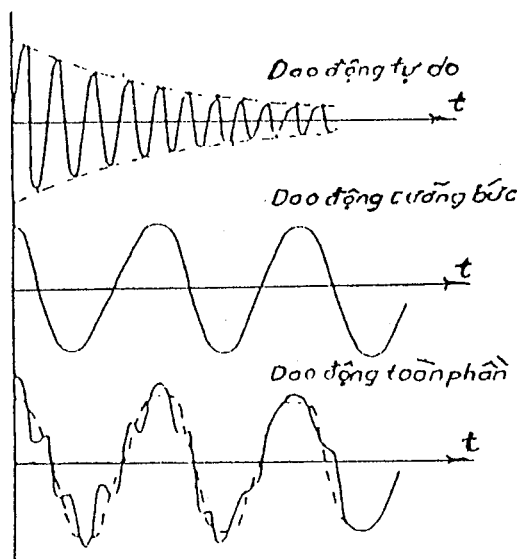
Hay

$$y = \frac{y_t^*}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 \cdot r^2}{\omega^4}}} \cdot \left[ \sin(rt - \lambda) + e^{-\alpha t} \cdot (\sin \lambda \cdot \cos \omega_1 t + \frac{\alpha \cdot \sin \lambda - r \cos \lambda}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t) \right] \quad (1-53)$$

Như vậy dao động của hệ gồm hai phần : Một phần dao động riêng với tần số  $\omega_1$ , một phần dao động cưỡng bức với tần số  $r$ .

Phần dao động riêng sẽ tắt dần, do có hệ số  $e^{-\alpha t}$  vì vậy khi dao động cưỡng bức ở thời kỳ ổn định sẽ có :

$$y = \frac{y_t^*}{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 \cdot r^2}{\omega^4}} \cdot \sin(rt - \lambda) \quad (1-55)$$



Hình 1-17 cho thấy quá trình và dạng dao động.

Nếu cho  $\alpha = 0$  (Không có lực cản) thì sẽ nhận được kết quả như ở phần không có lực cản.

Hình 1-17

### b- Hệ số động

$$K_d = \frac{y}{y_t^*} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma^2 \cdot \frac{r^2}{\omega^2}}} \cdot \sin(rt - \lambda) + e^{-\alpha t} \left( \sin \lambda \cdot \cos \omega_1 t + \frac{\alpha \cdot \sin \lambda - r \cos \lambda}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t \right) \quad (1-56)$$

Với :

$$\gamma = \frac{2\alpha}{\omega}$$

Công thức (1-56) có thể viết dưới dạng khác nếu đặt :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

: Chu kỳ dao động riêng không có lực cản

$$T_P = \frac{2\pi}{r}$$

: Chu kỳ dao động của lực kích thích

Hệ số động có trị số lớn nhất khi  $|\sin(rt - \lambda)| = 1$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{T^2}{T_P^2})^2 + \gamma^2 \cdot (\frac{T^2}{T_P^2})}} \quad (1-57)$$

Khi đó dao động riêng đã tắt

- Trường hợp cộng hưởng ( $r = \omega$ )

Khi đó  $T = T_P$

$$K_d = \frac{1}{\gamma} = \frac{\omega}{2\alpha}$$

Rõ ràng khi  $\alpha = 0$  thì  $K_d = \infty$ .

Trong thực tế  $\alpha \neq 0$  cho nên  $K_d \neq \infty$ , tuy vậy người ta thiết kế tránh cho hai tần số  $\omega$  và  $r$  trùng nhau để tránh cho hệ số động  $K_d$  tăng lớn nhanh đột ngột.

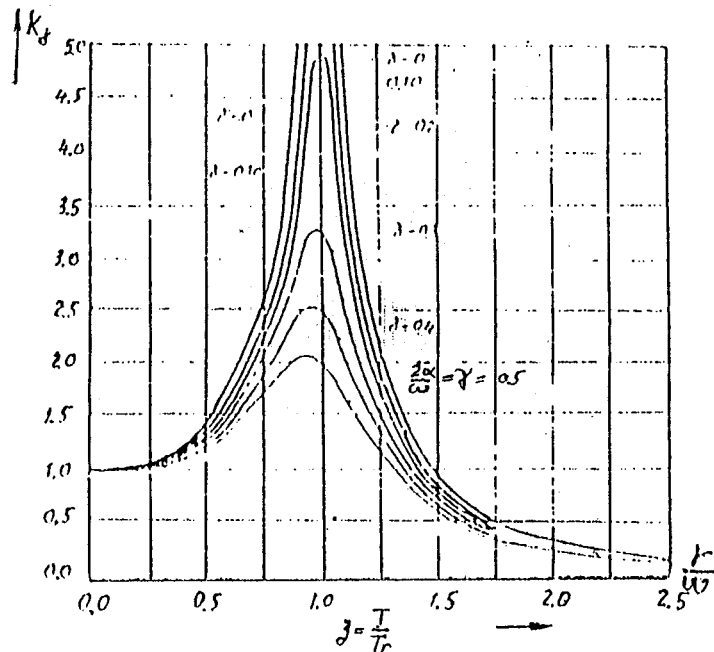
Hình 1-18 cho thấy sự thay đổi của  $K_d$  theo tỷ lệ

$$\frac{T}{T_P} = \frac{r}{\omega}$$

Với các môi trường cản khác nhau. Trên đồ thị cho thấy khi

$$\frac{3}{4} \leq \frac{T}{T_P} \leq \frac{5}{4}$$

thì  $K_d$  tăng rất nhanh. Trên đồ thị miền này gọi là miền cộng hưởng.



Hình 1-18

### c- Hiện tượng phách

Khi có hiện tượng phách xảy ra phương trình dao động có dạng :

$$y = a(1 - e^{-\alpha t}) \cdot \sin rt + 2a \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\left(\frac{r - \omega_1}{2}\right) \cdot t \cos rt \quad (1-58)$$

Số hạng đầu biểu thị dao động cưỡng bức không có lực cản, số hạng thứ hai biểu thị dao động cưỡng bức có lực cản có biên độ :

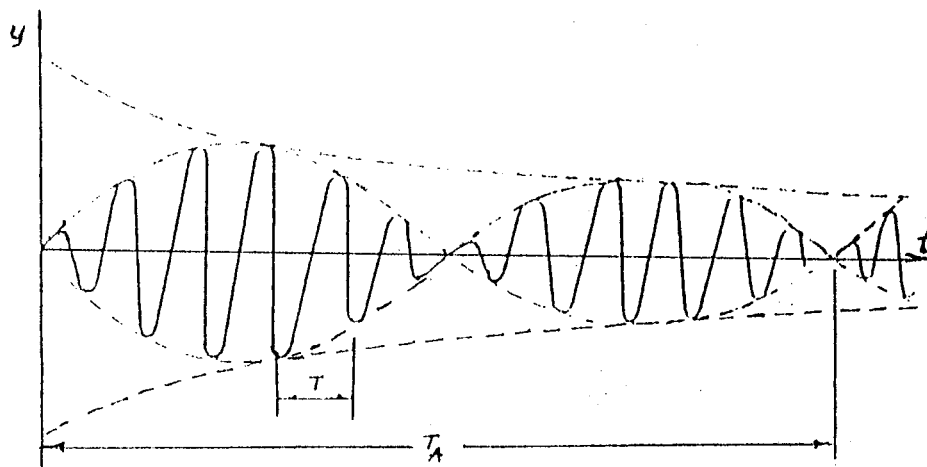
$$A(t) = 2a \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \frac{r - \omega_1}{2} t$$

Chu kỳ biến đổi của biên độ  $A(t)$  là :

$$T_A = \frac{2\pi}{\frac{r - \omega_1}{2}} = \frac{4\pi}{r - \omega_1}$$

còn chu kỳ của dao động là  $T = 2\pi/r$  so sánh thấy  $T_A > T$ .

Hình 1-19 biểu diễn hiện tượng phách .

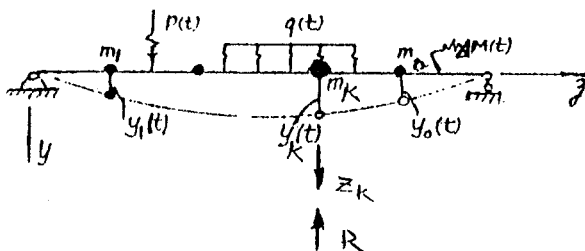


Hình 1-19

## CHƯƠNG 2

### DAO ĐỘNG CỦA HỆ CÓ MỘT SỐ BẬC TỰ DO

#### 2-1 Phương trình vi phân tổng quát của dao động



Hình 2-1

Xét một dầm có  $n$  khối lượng tập trung, bỏ qua kích thước của khối lượng và trọng lượng bản thân.

Hệ xem như có  $n$  bậc tự do.

Hệ dao động dưới tác dụng của các lực như hình 2-1.

- Lực quán tính do các khối lượng dao động.
- Lực cản đặt tại các khối lượng.
- Lực kích thích.

Ký hiệu  $Z_k = -m_k \cdot \ddot{y}_k(t)$  lực quán tính do khối lượng  $m_k$  dao động.

$R_k(t)$  : Lực cản đặt tại khối lượng  $m_k$ .

$q(t)$ ;  $P(t)$ ;  $M(t)$  các lực kích thích

Theo nguyên lý D'alambert phương trình chuyển động của các khối lượng có dạng :

$$y_k(t) = \delta_{k1} \cdot [z_1(t) - R_1(t)] + \delta_{k2} \cdot [z_2(t) - R_2(t)] + \dots + \delta_{kn} \cdot [z_n(t) - R_n(t)] + \Delta_{kp}(t) = 0$$

(2-1)

Trong đó :

- $\delta_{ki}$  : Chuyển vị của khối lượng  $m_k$  do lực đơn vị đặt tại khối lượng  $m_i$  theo phương chuyển vị  $y_i$  gây ra.
- $\Delta_{kp}(t)$  : Chuyển vị của khối lượng  $m_k$  do các tải trọng  $q(t)$ ,  $P(t)$ ,  $M(t)$  gây ra ( coi  $m_k = 0$  ).

Thay giá trị các lực quán tính vào và biến đổi, ta nhận được :

$$y_k(t) - \delta_{k1} \cdot [-m_1 \cdot \ddot{y}_1(t) - R_1(t)] - \delta_{k2} \cdot [-m_2 \cdot \ddot{y}_2(t) - R_2(t)] - \dots - \delta_{kn} \cdot [-m_n \cdot \ddot{y}_n(t) - R_n(t)] - \Delta_{kp}(t) = 0$$

Hay :

$$y_k(t) + \delta_{k1} \cdot [m_1 \cdot \ddot{y}_1(t) + R_1(t)] + \delta_{k2} \cdot [m_2 \cdot \ddot{y}_2(t) + R_2(t)] + \dots + \delta_{kn} \cdot [m_n \cdot \ddot{y}_n(t) + R_n(t)] - \Delta_{kp}(t) = 0$$

(2-2)

Biểu thức (2-2) là phương trình vi phân tổng quát của dao động hay phương trình chính tắc của hệ có  $n$  bậc tự do dùng để xác định các chuyển vị động  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  ...  $y_n(t)$  của các khối lượng.

- Trường hợp không xét lực cản

$$y_k(t) + \delta_{k1} \cdot m_1 \cdot \ddot{y}_1(t) + \delta_{k2} \cdot m_2 \cdot \ddot{y}_2(t) + \dots + \delta_{kn} \cdot m_n \cdot \ddot{y}_n(t) - \Delta_{kp}(t) = 0$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2-3)$$

- Trường hợp xét dao động tự do (không có lực kích thích) thì số hạng  $\Delta_{kp}(t) = 0$  trong các biểu thức trên

## 2-2 Dao động riêng của hệ có một bậc tự do

### 1- Phương trình vi phân của dao động

#### a- Không có lực cản

$$y_k(t) + m_1 \cdot \delta_{k1} \cdot \ddot{y}_1(t) + m_2 \cdot \delta_{k2} \cdot \ddot{y}_2(t) + \dots + m_n \cdot \delta_{kn} \cdot \ddot{y}_n(t) = 0$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2-4)$$

Giả sử nghiệm tổng quát có dạng :

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n y_{ki}(t) \quad (2-5)$$

Với các nghiệm riêng có dạng

$$y_{ki}(t) = y_{ki} \cdot F_i(t)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2-6)$$

$y_{ki}$  : Các hằng số chưa biết

$F_i(t)$ : Các hàm số theo thời gian  $t$  chưa xác định.

Xét một nghiệm riêng thứ  $i$  tương ứng với các khối lượng ta viết được :

$$\left. \begin{aligned} y_{1i}(t) &= y_{1i} \cdot F_i(t) \\ y_{2i}(t) &= y_{2i} \cdot F_i(t) \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\ y_{ni}(t) &= y_{ni} \cdot F_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

Biểu thức (2-7) cho thấy tỷ lệ giữa chuyển vị của các khối lượng không phụ thuộc vào thời gian và là một số xác định. Đường cong tạo bởi các tung độ  $y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}$  là đường cong đàn hồi của dầm và là dạng chính thứ  $i$  của dao động riêng.



Hình 2-2





$$\left. \begin{array}{ccccccc}
 (m_1 \delta_{11} - u_i) y_{1i} & + & m_2 \cdot \delta_{12} \cdot y_{2i} & + & \dots + & m_n \cdot \delta_{1n} \cdot y_{ni} & = 0 \\
 m_1 \cdot \delta_{21} \cdot y_{1i} & + & (m_2 \cdot \delta_{22} - u_i) y_{2i} & + & \dots + & m_n \cdot \delta_{2n} \cdot y_{ni} & = 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 m_1 \cdot \delta_{n1} \cdot y_{1i} & + & m_2 \cdot \delta_{n2} \cdot y_{2i} & \dots + & (m_n \cdot \delta_{nn} - u_i) y_{ni} & = 0
 \end{array} \right\} \quad (2-13)$$

Đây là phương trình cơ bản của dao động riêng : Điều kiện tồn tại nghiệm là định thức của các hệ số của phương trình phải bằng không :

$$D = \begin{vmatrix} (m_1 \delta_{11} \cdot \omega_i^2 - 1) & m_2 \cdot \delta_{12} \cdot \omega_i^2 & \dots & m_n \cdot \delta_{1n} \cdot \omega_i^2 \\ m_1 \cdot \delta_{21} \cdot \omega_i^2 & (m_2 \cdot \delta_{22} \cdot \omega_i^2 - 1) & \dots & m_n \cdot \delta_{2n} \cdot \omega_i^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \cdot \delta_{n1} \cdot \omega_i^2 & m_2 \cdot \delta_{n2} \cdot \omega_i^2 & \dots & (m_n \cdot \delta_{nn} \cdot \omega_i^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-14)$$

Hay

$$D = \begin{vmatrix} (m_1 \delta_{11} - u_i) & m_2 \cdot \delta_{12} & \dots & m_n \cdot \delta_{1n} \\ m_1 \cdot \delta_{21} & (m_2 \cdot \delta_{22} - u_i) & \dots & m_n \cdot \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \cdot \delta_{n1} & m_2 \cdot \delta_{n2} & \dots & (m_n \cdot \delta_{nn} - u_i) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-15)$$

Giải hệ phương trình trên ta sẽ có n nghiệm  $u_1, u_2, \dots, u_n$  và tương ứng có được một phổ các tần số dao động riêng  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Trong đó  $\omega_1$  là tần số dao động riêng thứ nhất hay tần số cơ bản.

Phương trình (2-14), (2-15) được gọi là phương trình tần số hay phương trình thế kỷ. Có các tần số dao động riêng ta sẽ có các dạng chính của dao động.

Xác định phương trình chuyển động tổng quát của khối lượng từ các công thức (2-7) và (2-11) sẽ viết được phương trình chuyển động của các khối lượng ứng với tần số  $\omega_i$

$$\left. \begin{array}{l}
 y_{1i}(t) = y_{1i} \cdot A_i^* \cdot \sin(\omega_i t + \lambda_i) \\
 y_{2i}(t) = y_{2i} \cdot A_i^* \cdot \sin(\omega_i t + \lambda_i) \\
 \dots \dots \dots \\
 y_{ki}(t) = y_{ki} \cdot A_i^* \cdot \sin(\omega_i t + \lambda_i) \\
 \dots \dots \dots \\
 y_{ni}(t) = y_{ni} \cdot A_i^* \cdot \sin(\omega_i t + \lambda_i)
 \end{array} \right\} \quad (2-16)$$

Thay vào nghiệm tổng quát (2-5) ta có :

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n y_{ki} \cdot A_i^* \cdot \sin(\omega_i t + \lambda_i) \quad (2-17)$$

$$\text{Đặt: } \mu_{ki} = \frac{y_{ki}}{y_{1i}} \quad (2-18)$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$       chỉ thứ tự khối lượng  $m_k$   
 $i = 1, 2, 3, \dots, n$       chỉ thứ tự tần số riêng  $\omega_i$

và đặt  $C_i = y_{1i} \cdot A_i^*$  ta lại có :

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n \mu_{ki} \cdot C_i \cdot \sin(\omega_i t + \lambda_i) \quad (2-19)$$

Đây là phương trình tổng quát của dao động tự do tại khối lượng  $m_k$ .

**- Xác định  $C_i$  và  $\lambda_i$ .**

Đây là các hằng số phụ thuộc vào điều kiện ban đầu của các dao động tự do. Khi  $t=0$  ta có :

$$y_k(0) = \sum_{i=1}^n \mu_{ki} \cdot C_i \cdot \sin \lambda_i \quad (2-20)$$

$$\dot{y}_k(0) = v_k(0) = \sum_{i=1}^n \mu_{ki} \cdot C_i \cdot \omega_i \cdot \cos \lambda_i$$

(  $k = 1, 2, \dots, n$  )

từ 2n phương trình trên sẽ xác định được 2n trị số của  $C_i$  và  $\lambda_i$ .

**- Xác định  $\mu_{ki}$**

$$\text{Từ } \mu_{ki} = \frac{y_{ki}}{y_{1i}} \text{ ta có } \mu_{1i} = 1$$

Hệ phương trình chính tắc (2-12) ta chia tất cả cho  $y_{1i}$  sẽ có n phương trình chứa các hệ số  $\mu_{ki}$ , nhưng do  $\mu_{1i} = 1$ , vậy chỉ còn tìm (n-1) hệ số còn lại do đó chỉ cần phải giải (n-1) phương trình bất kỳ của phương trình trên.

**b- Có kể tới lực cản**

Coi lực cản tỷ lệ với vận tốc :

$$R_k(t) = \beta_k \cdot \dot{y}_k(t)$$

Phương trình vi phân của dao động riêng có dạng :

$$y_k(t) + \delta_{k1} \cdot [m_1 \cdot \ddot{y}_1(t) + \beta_1 \cdot \dot{y}_1(t)] + \dots + \delta_{kn} \cdot [m_n \cdot \ddot{y}_n(t) + \beta_n \cdot \dot{y}_n(t)] = 0$$

Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng có dạng :

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n y_{ki}(t) \quad \text{và} \quad y_{ki}(t) = y_{ki} \cdot F_i(t)$$

Sử dụng phương trình cho nghiệm thứ  $i$ .

$$y_{ki} \cdot F_i(t) + m_1 \cdot \delta_{k1} \left[ \ddot{F}_i(t) + \frac{\beta_1}{m_1} \cdot \dot{F}_i(t) \right] \cdot y_{1i} + \dots +$$

$$+ m_n \cdot \delta_{kn} \left[ \ddot{F}_i(t) + \frac{\beta}{m_n} \cdot \dot{F}_i(t) \right] \cdot y_{ni} = 0 \quad (2-21)$$

Gọi  $\beta_i / m_i =$  hằng số  $= 2\alpha$  thì phương trình (2-21) sẽ có dạng :

$$\frac{\ddot{F}_i(t) + 2\alpha \dot{F}_i(t)}{F_i(t)} = \frac{y_{ki}}{m_1 \cdot \delta_{k1} y_{1i} + \dots + m_n \cdot \delta_{kn} \cdot y_{ni}} \quad (a)$$

Cho đẳng thức này bằng  $-\omega_i^2$  ta nhận được :

$$\ddot{F}_i(t) + 2\alpha \cdot \dot{F}_i(t) + \omega_i^2 \cdot F_i(t) = 0 \quad (b)$$

$$\text{Và} \quad m_1 \cdot \delta_{k1} \cdot \omega_i^2 \cdot y_{1i} + \dots + m_n \cdot \delta_{kn} \cdot \omega_i^2 \cdot y_{ni} - y_{ki} = 0$$

Nghiệm của phương trình (a) có dạng :

$$F_i(t) = e^{-\alpha t} \cdot [A_i \cdot \sin \omega_i^* t + B_i \cdot \cos \omega_i^* t]$$

$$\text{Với} \quad \omega_i^* = \sqrt{\omega_i^2 - \alpha^2}$$

- Phương trình (b) có dạng của phương trình (2-10), các nghiệm  $\omega_i$  cũng xác định theo phương trình tần số (2-14).
- Phương trình chuyển động của các khối lượng  $m_k$  khi có kể lực cản có dạng :

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n y_{ki} \cdot F_i(t) = \sum_{i=1}^n y_{ki} \cdot e^{-\alpha t} \cdot [A_i \cdot \sin \omega_i^* t + B_i \cdot \cos \omega_i^* t]$$

Hay

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n \mu_{ki} \cdot e^{-\alpha t} \cdot C_i \cdot \sin(\omega_i^* t - \lambda_i) \quad (2-22)$$

$\mu_{ki}$ ,  $C_i$ ,  $\lambda_i$  xác định như ở phần trên

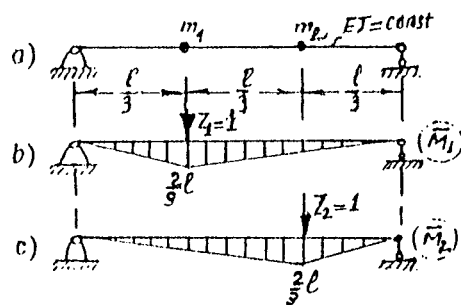
### **Thí dụ 2-1 :**

Cho dầm có hai khối lượng tập trung  $m_1=m_2=m$  – Hình 2-3. Tìm tần số dao động riêng.

Hệ có hai bậc tự do, phương trình tần số có dạng :

$$\begin{vmatrix} (m_1 \cdot \delta_{11} - u) & m_2 \cdot \delta_{12} \\ m_1 \cdot \delta_{21} & (m_2 \cdot \delta_{22} - u) \end{vmatrix} = 0$$

Vẽ biểu đồ moment đơn vị  $\overline{M}_1, \overline{M}_2$



$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 = \delta_{22} = \frac{4}{243} \cdot \frac{\ell^3}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 = \frac{7}{486} \cdot \frac{\ell^3}{EJ}$$

Thay các giá trị  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$  vào phương trình tần số và khai triển ta có :

Hình 2-3

$$u^2 - u \cdot (m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22}) + m_1 \cdot m_2 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2) = 0$$

Hay

$$u^2 - u \cdot m \cdot 2 \cdot \frac{4}{243} \cdot \frac{\ell^3}{EJ} + m^2 \cdot \left( \frac{4}{243} \cdot \frac{\ell^3}{EJ} \right)^2 - \left( \frac{7}{486} \cdot \frac{\ell^3}{EJ} \right)^2 = 0$$

Giải phương trình ta có :

$$u_1 = \frac{5}{162} \cdot \frac{m \cdot \ell^3}{EJ}$$

$$u_2 = \frac{1}{486} \cdot \frac{m \cdot \ell^3}{EJ}$$

Suy ra :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{u_1}} = 5,96 \sqrt{\frac{EJ}{m \cdot \ell^3}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{u_2}} = 22 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m \cdot \ell^3}}$$

- Dạng dao động của dầm ứng với tần số  $\omega_1$  (hình 2-4)

$$y_{11}(t) = y_{11} \cdot A_1^* \cdot \sin(\omega_1 t + \lambda_1)$$

$$y_{21}(t) = y_{21} \cdot A_1^* \cdot \sin(\omega_1 t + \lambda_1)$$

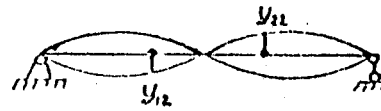
- Dạng dao động của dầm ứng với tần số  $\omega_2$  (hình 2-5)

$$y_{12}(t) = y_{12} \cdot A_2^* \cdot \sin(\omega_2 t - \lambda_2)$$

$$y_{22}(t) = y_{22} \cdot A_2^* \cdot \sin(\omega_2 t - \lambda_2)$$



Hình 2-4



Hình 2-5

– Phương trình dao động tổng quát của các khối lượng có dạng

$$\begin{aligned} y_1 &= \mu_{11}.C_1.\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + \mu_{12}.C_2.\sin(\omega_2 t - \lambda_2) \\ y_2 &= \mu_{21}.C_1.\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + \mu_{22}.C_2.\sin(\omega_2 t - \lambda_2) \end{aligned} \quad (a)$$

Tính các hệ số  $\mu$  :

$$\mu_{11} = \frac{y_{1i}}{y_{1i}} = 1$$

và từ hệ phương trình chính tắc ta có được :

$$\begin{aligned} (m_1.\delta_{11}.\omega_1^2 - 1) + m_2.\delta_{12}.\omega_1^2.\mu_{21} &= 0 \\ m_1.\delta_{21}.\omega_1^2 + (m_2.\delta_{22}.\omega_1^2 - 1).\mu_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Suy ra :

$$\mu_{21} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = -\frac{m_1.\delta_{11}.\omega_1^2 - 1}{m_2.\delta_{12}.\omega_1^2} = -\frac{m_1.\delta_{21}.\omega_1^2}{m_2.\delta_{22}.\omega_1^2 - 1}$$

- Xác định  $C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2$

Ở thời điểm  $t = 0$  có :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1(0) \quad ; \quad \dot{y}_1(t) = v_1(0) \\ y_2(t) &= y_2(0) \quad ; \quad \dot{y}_2(t) = v_2(0) \end{aligned}$$

Từ (a) ta có được :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= \omega_1.C_1.\cos(\omega_1 t + \lambda_1) + \omega_2.C_2.\cos(\omega_2 t - \lambda_2) \\ \dot{y}_2(t) &= \mu_{21}.\omega_1.C_1.\cos(\omega_1 t + \lambda_1) + \mu_{22}.\omega_2.C_2.\cos(\omega_2 t - \lambda_2) \end{aligned}$$

Thay các biểu thức trên vào các phương trình điều kiện ban đầu khi  $t = 0$  để xác định được các giá trị của  $C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2$  .

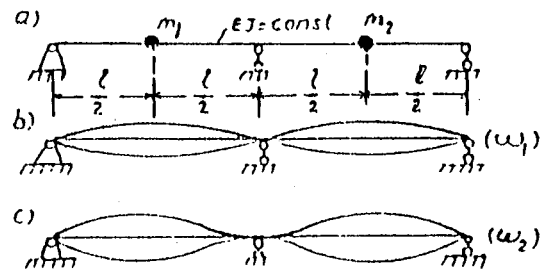
### Thí dụ 2-2 :

Xác định tần số dao động riêng của dầm liên tục có hai khối lượng tập trung  $m_1 = m_2 = m$  (hình 2-6)

Hệ có hai bậc tự do nên phương trình tần số có dạng như đã viết ở thí dụ 2-1.

Theo cách tính ở cơ kết cấu cho dầm liên tục có :

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{23\ell^3}{1536.EJ}$$
$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{3\ell^3}{512.EJ}$$



Hình 2-6

Thay vào phương trình tần số, khai triển và giải phương trình bậc hai ta nhận được :

$$u_1 = \frac{m.\ell^3}{48.EJ} \quad ; \quad \text{Vậy } \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{u_1}} = \sqrt{\frac{48.EJ}{m.\ell^3}}$$
$$u_2 = \frac{7.m.\ell^3}{768.EJ} \quad ; \quad \text{Vậy } \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{u_2}} = \sqrt{\frac{109,72.EJ}{m.\ell^3}}$$

Dạng dao động của dầm với tần số  $\omega_1$  ,  $\omega_2$  như hình 2-6 b và c .

### 2-2 Sử dụng tính đối xứng của hệ

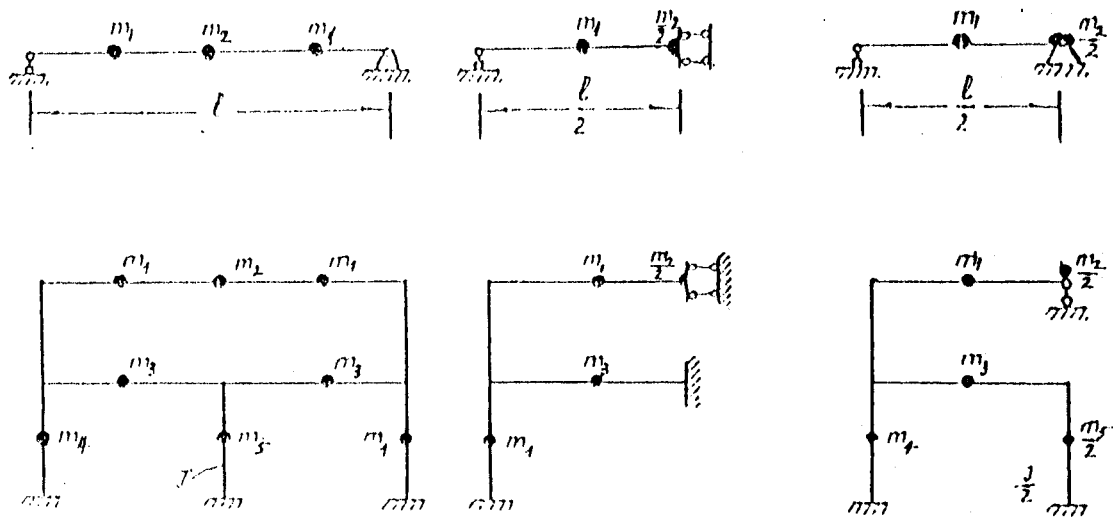
Đối với kết cấu đối xứng, khi dao động dạng chính của dao động riêng cũng có hai dạng : Đối xứng và phản đối xứng.

Theo dạng chính của dao động riêng lực quán tính phát sinh tại các khối lượng tập trung có hai loại : lực quán tính đối xứng và lực quán tính phản đối xứng .

Như vậy nếu kết cấu đối xứng ta có thể tách bài toán thành hai loại và tìm tần số riêng ứng với từng loại. Có hai cách thực hiện :

#### a-Tính theo nửa hệ

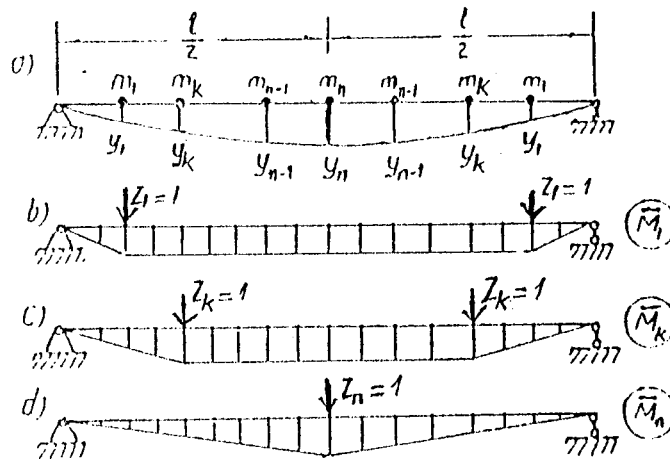
Hình 2-7 cho thấy cách tính trên nửa tưng ứng với dạng dao động đối xứng và phản đối xứng.



Hình 2-7

### b- Dùng chuyển vị kép

Xét một đoạn dầm có khối lượng phân bố như hình 2-8 (Giả sử số khối lượng là lẻ). Xét dao động đối xứng.



Hình 2-8

Đặt  $Y_1 = 2y_1$  ;  $Y_2 = 2y_2$  ; ..... ;  $Y_k = 2y_k$  ; ..... ;  $Y_{m-1} = 2y_{m-1}$  riêng  $Y_n = y_n$  các chuyển vị  $Y_k$  gọi là chuyển vị kép.

Phương trình của chuyển vị kép viết được :

$$2y_k = Y_k = \delta_{k1} \cdot Z_1 + \delta_{k2} \cdot Z_2 + \dots + \delta_{kn} \cdot Z_n \quad (2-24)$$

Trong đó :

$\delta_{ki}$  : Chuyển vị theo phương cặp lực  $z_k$  do cặp lực  $z_i = 1$  gây ra .

$z_k$  : Cặp lực quán tính tại các khối lượng  $m_k$ .

Do  $z_k = -m_k \cdot \ddot{y}_k$  nên ta có:

$$2y_k = Y_k = \delta_{k1} \cdot (-m_1 \cdot \ddot{y}_1) + \delta_{k2} \cdot (-m_2 \cdot \ddot{y}_2) + \dots + \delta_{kn} \cdot (-m_n \cdot \ddot{y}_n)$$

Hay

$$Y_k = \delta_{k1} \cdot \left[ -\frac{m_1}{2} (2\ddot{y}_1) \right] + \delta_{k2} \cdot \left[ -\frac{m_2}{2} (2\ddot{y}_2) \right] + \dots + \delta_{kn} \cdot (-m_n \cdot \ddot{y}_n) \quad (2-25)$$

Từ quan hệ

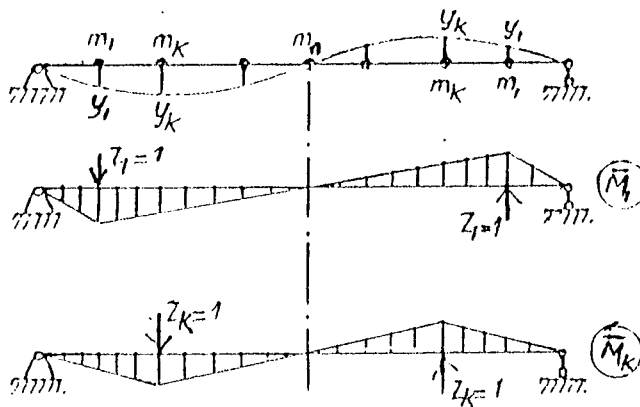
$$\ddot{Y}_1 = 2\ddot{y}_1 \quad ; \quad \ddot{Y}_2 = 2\ddot{y}_2 \quad ; \dots \ddot{Y}_k = 2\ddot{y}_k \quad ; \dots \ddot{Y}_{n-1} = 2\ddot{y}_{n-1}$$

Suy ra :

$$Y_k = -\delta_{k1} \cdot \left( \frac{m_1}{2} \right) \cdot \ddot{Y}_1 - \delta_{k2} \cdot \left( \frac{m_2}{2} \right) \cdot \ddot{Y}_2 - \dots - \delta_{kn} \cdot (m_n) \cdot \ddot{Y}_n$$

Dạng phương trình (2-25) tương tự phương trình (2-4) vì vậy có thể tìm tần số dao động riêng ứng với dạng đối xứng theo phương trình tần số .

$$D = \begin{vmatrix} \left( \frac{m_1}{2} \cdot \delta_{11} \cdot \omega_i^2 - 1 \right) & \frac{m_2}{2} \cdot \delta_{12} \cdot \omega_i^2 & \dots & m_n \cdot \delta_{1n} \cdot \omega_i^2 \\ \frac{m_1}{2} \cdot \delta_{21} \cdot \omega_i^2 & \left( \frac{m_2}{2} \cdot \delta_{22} \cdot \omega_i^2 - 1 \right) & \dots & m_n \cdot \delta_{2n} \cdot \omega_i^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{m_1}{2} \cdot \delta_{n1} \cdot \omega_i^2 & \frac{m_2}{2} \cdot \delta_{n2} \cdot \omega_i^2 & \dots & \left( m_n \cdot \delta_{nn} \cdot \omega_i^2 - 1 \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-26)$$



Hình 2-9

Giải phương trình (2-26) sẽ có được  $n$  tần số dao động ứng với các dao động đối xứng.

Dạng dao động phản đối xứng, hình 2-9. Do khối lượng  $m_n$  không chuyển động do đó không cần để ý đến.

Tương tự như lý luận ở phần trên ta sẽ viết được phương trình tần số ứng với các dạng dao động phản đối xứng.



$$D = \begin{vmatrix} \left( \frac{m_1}{2} \cdot \delta_{11} \cdot \omega_i^2 - 1 \right) & \frac{m_2}{2} \cdot \delta_{12} \cdot \omega_i^2 & \dots & \frac{m_{n-1}}{2} \cdot \delta_{1(n-1)} \cdot \omega_i^2 \\ \frac{m_1}{2} \cdot \delta_{21} \cdot \omega_i^2 & \left( \frac{m_2}{2} \cdot \delta_{22} \cdot \omega_i^2 - 1 \right) & \dots & \frac{m_{n-1}}{2} \cdot \delta_{2(n-1)} \cdot \omega_i^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{m_1}{2} \cdot \delta_{(n-1)1} \cdot \omega_i^2 & \frac{m_2}{2} \cdot \delta_{(n-2)2} \cdot \omega_i^2 & \dots & \frac{m_{n-1}}{2} \cdot \delta_{(n-1)(n-1)} \cdot \omega_i^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2-27)$$

Định thức trên có cấp  $(n-1)$ .

Giải phương trình (2-27) sẽ có các tần số dao động riêng ứng với các dạng dao động phản đối xứng.

**Chú ý:**  $\delta_{ik} = \overline{M}_i \cdot \overline{M}_k$  Ở hai phương trình có ý nghĩa như sau:

- Ở phương trình tính cho dạng dao động đối xứng đó là chuyển vị kép theo phương cặp lực đối xứng  $z_i$  do cặp lực đối xứng  $z_k$  bằng một đơn vị gây nên. Còn ở phương trình (2-27) đó là chuyển vị kép theo phương cặp lực phản đối xứng  $z_i$  do cặp lực phản đối xứng  $z_k = 1$  gây nên.

### Thí dụ 2-3:

Áp dụng tính chất đối xứng, tính tần số dao động riêng của hệ trên hình (2-3)

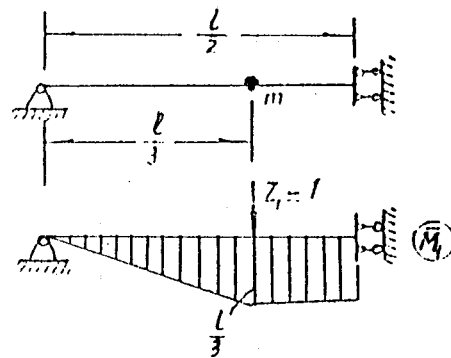
#### a- Tính trên nửa hệ

Sơ đồ tính như hình 2-10 và phương trình tần số có dạng

$$D = (m \cdot \delta_{11} \cdot \omega^2 - 1) = 0$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta_{11}}} \\ \delta_{11} &= \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1 \\ &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{3} \cdot \frac{\ell}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{3} + \frac{\ell}{3} \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \frac{\ell}{3} \right] \\ &= \frac{15 \cdot \ell^3}{486 \cdot EJ} = \frac{5}{162} \cdot \frac{\ell^3}{EJ} \end{aligned}$$



Hình 2-10

Vậy

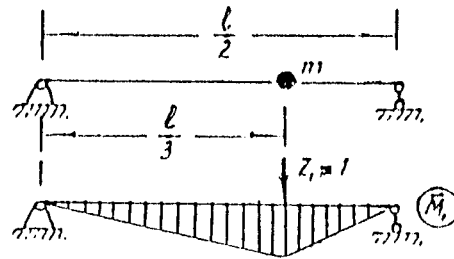
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{162 \cdot EJ}{5m \cdot \ell^3}} \approx 5,69 \sqrt{\frac{EJ}{m \cdot \ell^3}}$$

Sơ đồ tính với dạng phản đối xứng, hình (2-11) tương tự tính được :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta_{11}}}$$

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 = \frac{\ell^3}{486 \cdot EJ}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{486 \cdot EJ}{m \cdot \ell^3}} \approx 22 \sqrt{\frac{EJ}{m \cdot \ell^3}}$$



Hình 2-11

### b- Dùng chuyển vị kép

Sơ đồ quy ước như hình 2-12 .

- Tần số dao động riêng ứng với dạng dao động đối xứng.

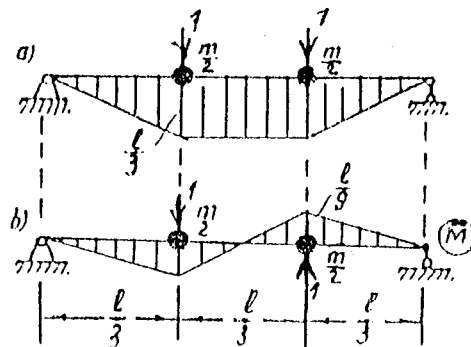
- Theo phương trình tần số

Thay vào có :

- Tần số dao động riêng ứng với dạng dao động phản đối xứng

$$D = \frac{m}{2} \cdot \delta_{11} \cdot \omega_1^2 - 1 = 0$$

$$\text{Vậy } \omega_1^2 = \frac{1}{\frac{m}{2} \cdot \delta_{11}}$$



Hình 2-12

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 = \frac{2}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{3} \cdot \frac{\ell}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{3} + \frac{\ell}{3} \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \frac{\ell}{3} \right] = \frac{15 \cdot \ell^3}{486 \cdot EJ} \cdot 2$$

Thay vào ta có :

$$\omega_1^2 = \frac{162EJ}{5 \cdot m \cdot \ell^3}$$

Tần số dao động riêng ứng với dao động phản đối xứng

$$D = \frac{m}{2} \cdot \delta_{11} \cdot \omega_2^2 - 1 = 0$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\frac{m}{2} \cdot \delta_{11}}$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{3} \cdot \frac{\ell}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{\ell}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \frac{\ell}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{9} \right] = \frac{\ell^3}{486 \cdot EJ} \cdot 2$$

Suy ra

$$\omega_2^2 = \frac{486 \cdot EJ}{m \cdot \ell^3}$$

### 2-3 Dao động cưỡng bức của hệ khi không có lực cản chịu lực kích thích bất kỳ $P(t)$

1- Trước khi xét bài toán dao động cưỡng bức không có lực cản chịu lực kích thích bất kỳ  $P(t)$  ta cần nêu vắn tắt các khái niệm sau :

- Dạng chính thứ  $i$  của dao động riêng là dao động ứng với một tần số  $\omega_i$  nào đó.
- Các dạng chính của dao động có tính trực giao và được biểu thị bằng công thức :

$$\sum_{k=i}^n m_k \cdot y_{ki} \cdot y_{kj} = 0 \quad (2-28)$$

Hay được định nghĩa như sau :

- Công của ngoại lực hay nội lực của một dạng chính này trên chuyển vị (Hay biến dạng của một dạng chính khác thì bằng không.
- Một hệ tải trọng  $P_k(t)$  đặt tại vị trí các khối lượng  $m_k$  có thể phân tích theo dạng tổng của các thành phần biểu diễn theo dạng chính của các dao động riêng.

$$P_k(t) = \sum_{k=i}^n P_{ki}(t) \quad (2-29)$$

$$\text{Với} \quad P_{ki}(t) = m_k \cdot y_{ki} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n P_k(t) \cdot y_{ki}}{\sum_{k=1}^n m_k \cdot y_{ki}^2} \quad (2-30)$$

Trong đó :

- $i$  : Chỉ số biểu thị tần số dao động riêng
- $k$  : Chỉ số biểu thị khối lượng
- Chuyển vị của khối lượng  $m_k$  do tải trọng gây ra trong hệ dao động cưỡng bức có thể phân tích dưới dạng tổng của  $n$  chuyển vị thành phần.

$$\Delta_{kp}(t) = \sum_{i=1}^n \Delta_{ki}(t) \quad (2-31)$$

$$\text{Với} \quad \Delta_{ki}(t) = y_{ki} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_{kp}(t) \cdot m_k \cdot y_{ki}}{\sum_{k=1}^n m_k \cdot y_{ki}^2} \quad (2-32)$$

## 2- Xét một hệ có tải trọng đặt tại các vị trí khối lượng $P_1(t)$ , $P_2(t)$ ... $P_n(t)$

- Phương trình vi phân của dao động có dạng

$$y_k(t) + m_1 \cdot \delta_{k1} \cdot \ddot{y}_1(t) + \dots + m_n \cdot \delta_{kn} \cdot \ddot{y}_n(t) = \Delta_{kp}(t) \quad (2-33)$$

Trong đó :

$$\Delta_{kp}(t) = \delta_{k1} \cdot P_1(t) + \delta_{k2} \cdot P_2(t) + \dots + \delta_{kn} \cdot P_n(t)$$

Nghiệm của phương trình (2-33) có dạng :

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n y_{ki} \cdot F_i(t) \quad (2-34)$$

$F_i(t)$  : Hàm số chưa biết được tính theo phương trình dạng

$$\ddot{F}_i(t) + \omega_i^2 \cdot F_i(t) = H_i(t) \quad (2-35)$$

Trong đó :

$$H_i(t) = \frac{\sum_{k=1}^n P_k(t) \cdot y_{ki}}{\sum_{k=1}^n m_k \cdot y_{ki}^2} \quad (2-36)$$

Nghiệm của phương trình (2-35) có dạng :

$$F_i(t) = A_i \cdot \sin \omega_i t + B_i \cdot \cos \omega_i t + \dots + \frac{1}{\omega_i} \cdot \int_0^t H_i(t) \cdot \sin \omega_i(t - u) \cdot du$$

- Nếu xét đến lực cản thì phần dao động riêng sẽ mất đi nên nghiệm  $F_i(t)$  còn :

$$F_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \cdot \int_0^t H_i(t) \cdot \sin \omega_i(t - u) \cdot du$$

Thay giá trị của  $H_i(t)$  vào ta có :

$$F_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \cdot \int_0^t \frac{\sum_{k=1}^n P_k(u) \cdot y_{ki}}{\sum_{k=1}^n m_k \cdot y_{ki}^2} \cdot \sin \omega_i(t - u) \cdot du$$

Cuối cùng phương trình (2-33) viết được có dạng :

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{ki}}{\omega_i} \cdot \int_0^t \frac{P_1(u) + P_2(u) \cdot \mu_{2i} + \dots + P_n(u) \cdot \mu_{ni}}{m_1 + m_2 \cdot \mu_{2i}^2 + \dots + m_n \cdot \mu_{ni}^2} \cdot \sin \omega_i(t-u) \cdot du \quad (2-37)$$

$$\text{Với} \quad \mu_{ki} = \frac{-y_{ki}}{y_{1i}} \quad (2-38)$$

Áp dụng công thức trên viết cho trường hợp hệ có ba bậc tự do chịu tải trọng  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$  và  $P_3(t)$  đặt tại ba khối lượng  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  có :

$$y_k(t) = y_{k1}(t) + y_{k2}(t) + y_{k3}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Hay } y_k(t) &= \frac{\mu_{k1}}{\omega_1} \cdot \int_0^t \frac{P_1(u) + P_2(u) \cdot \mu_{21} + P_3(u) \cdot \mu_{31}}{m_1 + m_2 \cdot \mu_{21}^2 + m_3 \cdot \mu_{31}^2} \cdot \sin \omega_1(t-u) \cdot du \\ &+ \frac{\mu_{k2}}{\omega_2} \cdot \int_0^t \frac{P_1(u) + P_2(u) \cdot \mu_{22} + P_3(u) \cdot \mu_{32}}{m_1 + m_2 \cdot \mu_{22}^2 + m_3 \cdot \mu_{32}^2} \cdot \sin \omega_2(t-u) \cdot du \\ &+ \frac{\mu_{k3}}{\omega_3} \cdot \int_0^t \frac{P_1(u) + P_2(u) \cdot \mu_{23} + P_3(u) \cdot \mu_{33}}{m_1 + m_2 \cdot \mu_{23}^2 + m_3 \cdot \mu_{33}^2} \cdot \sin \omega_3(t-u) \cdot du \\ &\quad (k=1, 2, 3) \end{aligned}$$

## 2-4 Dao động cưỡng bức của hệ chịu lực kích thích $P(t)=P \cdot \sin rt$

### 1-Lực điều hoà và bài toán dao động cưỡng bức

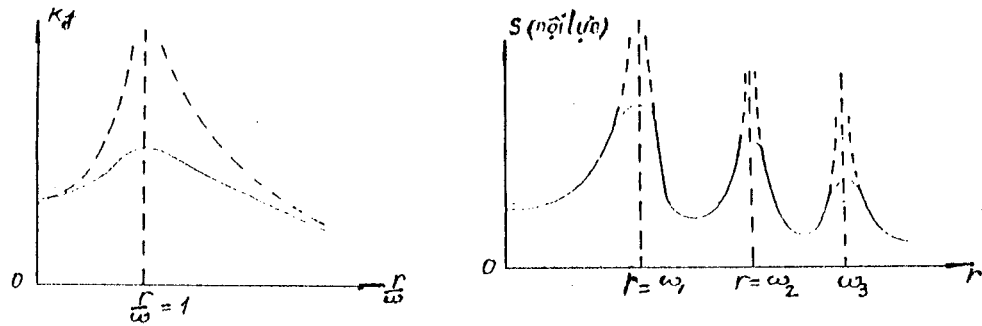
Hầu hết trong thực tế kỹ thuật lực kích thích tác động lên kết cấu là các lực điều hoà (lực thay đổi điều hoà) các lực này có dạng của hàm sin hay cosin. Vì vậy chúng ta chủ yếu xét bài toán dao động do tác dụng của loại lực này. Các lực tác động có thể là  $P(t) = P \cdot \sin rt$ ;  $M(t) = M \cdot \sin rt$ ;  $q(t) = q \cdot \sin rt$ . Nội lực, ứng suất phát sinh trong kết cấu cũng là nội lực ứng suất theo thời gian  $M=M(t)$ ,  $Q=Q(t)$ ,  $N=N(t)$ ,  $\sigma = \sigma(t)$ ,  $\tau=\tau(t)$

Đối với hệ có một bậc tự do hoặc hệ có nhiều bậc tự do, người ta luôn chú trọng đến khả năng hình thành cộng hưởng (hệ có một bậc tự do khi  $r/\omega = 1$ ; hệ có nhiều bậc tự do khi  $r = \omega_1$ ,  $r = \omega_2$ ,  $r = \omega_3 \dots$ ) khi đó biên độ của nội lực động và chuyển vị động sẽ tăng đột ngột ảnh hưởng xấu đến kết cấu, hình 2-13 cho thấy ảnh hưởng của hiện tượng cộng hưởng.

Người ta thường tạo các lực kích thích có tần số nhỏ hơn tần số dao động riêng, cho nên hệ có nhiều bậc tự do người ta chỉ cần quan tâm đến tần số dao động riêng thấp nhất  $\omega_1$  để kiểm tra hiện tượng cộng hưởng.

Bài toán dao động cưỡng bức có 2 nhiệm vụ cơ bản :

- Một là kiểm tra hiện tượng cộng hưởng.
- Hai là vẽ biểu đồ biên độ nội lực động và chuyển vị động để kiểm tra độ bền, độ cứng của công trình.



Hình 2-13

## 2- Biểu thức nội lực và chuyển vị động

Ta xét dao động trong giai đoạn ổn định tức là khi hệ dao động có cùng chu kỳ với lực kích thích, phần dao động riêng mất đi do ảnh hưởng của lực cản.

Khi hệ dao động sẽ chịu tác dụng các lực sau :

- Các lực kích thích  $P(t)$ .
- Các lực quán tính  $Z_1(t)$ ,  $Z_2(t)$  ...  $Z_n(t)$  tác dụng tại vị trí các khối lượng tương ứng và theo phương chuyển vị của khối lượng .

Biểu thức tổng quát của nội lực động tại tiết diện  $k$  do các ngoại lực gây ra

$$S_k(t) = S_{kp}(t) + \bar{S}_{k1}.Z_1(t) + \bar{S}_{k2}.Z_2(t) + \dots + \bar{S}_{kn}.Z_n(t)$$

Do xét dao động ở giai đoạn ổn định cho nên có thể viết được

$$S_k(t) = S_k \cdot \sin rt$$

$$Z_i(t) = Z_i \cdot \sin rt$$

Vậy có thể viết biểu thức nội lực động tổng quát cực trị khi tải trọng đạt cực trị

$$S_k = S_{kp} + \bar{S}_{k1}.Z_1 + \bar{S}_{k2}.Z_2 + \dots + \bar{S}_{kn}.Z_n \quad (2-39)$$

Trong đó :

$S_{kp}$  : Nội lực tại tiết diện  $k$  do biên độ của các lực kích thích tác dụng tĩnh gây ra.

$Z_i$  : Biên độ của lực quán tính đặt tại khối lượng  $i$  .

$\bar{S}_{ki}$  : Nội lực tại tiết diện  $k$  do lực  $Z_i = 1$  tác dụng tĩnh tại khối lượng thứ  $i$  gây ra.

Chuyển vị cực đại tại tiết diện  $k$  :

$$\Delta_k = \Delta_{kp} + \delta_{k1}.Z_1 + \delta_{k2}.Z_2 + \dots + \delta_{kn}.Z_n \quad (2-40)$$

Trong đó :

$\Delta_{kp}$  : Chuyển vị tại  $k$  do biên độ của các lực kích thích tác dụng tĩnh gây ra

$\delta_{ki}$  : Chuyển vị tại  $k$  do  $Z_i = 1$  tác dụng tĩnh tại khối lượng thứ  $i$  gây ra.

Bây giờ cần phải xác định các biên độ của lực quán tính  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ . Để giải quyết vấn đề này ta xét biểu thức chuyển động của khối lượng thứ  $k$  .



Hệ phương trình trên là hệ phương trình chính tắc để xác định biên độ của các lực quán tính. Giải hệ phương trình sẽ có các nghiệm  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ .

**Chú ý :**  $Z_k > 0$  Chiều của lực theo chiều giả thiết ban đầu.

$Z_k < 0$  Chiều của lực ngược lại.

Có các lực  $Z_k$ , các lực kích thích sẽ được đặt vào hệ và tính theo cơ học kết cấu thông thường, ta sẽ có được nội lực và chuyển vị lớn nhất trong trạng thái động tại mỗi tiết diện của kết cấu.

### 3- Sự hình thành khả năng cộng hưởng

Từ hệ phương trình chính tắc, tìm biểu đồ lực quán tính theo quy tắc Krame viết được:

$$Z_k = \frac{D_k}{D} \quad (2-46)$$

$D_k$  : Định thức suy từ định thức  $D$  bằng cách thay cột thứ  $k$  của  $D$  bằng các số hạng tự do nhưng đổi dấu

$D$  : Định thức của các hệ số

Sau khi thay giá trị các  $\delta_{kk}^*$  bằng quan hệ (2-45) vào và biến đổi có được

$$D = \frac{1}{m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n \cdot r^{2n}} \cdot \begin{vmatrix} (\delta_{11} \cdot m_1 \cdot r^2 - 1) & \delta_{12} \cdot m_2 \cdot r^2 & \dots & \delta_{1n} \cdot m_n \cdot r^2 \\ \delta_{21} \cdot m_1 \cdot r^2 & (\delta_{22} \cdot m_2 \cdot r^2 - 1) & \dots & \delta_{2n} \cdot m_n \cdot r^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} \cdot m_1 \cdot r^2 & \delta_{n2} \cdot m_2 \cdot r^2 & \dots & (\delta_{nn} \cdot m_n \cdot r^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-47)$$

Khi  $r = \omega$ , phần trong của định thức sẽ trở thành phương trình tần số, khi đó định thức  $D=0$  và  $Z_k = \infty$ .

Như vậy khi tần số lực kích thích  $r$  trùng với một trong các tần số dao động riêng  $\omega_i$  thì đều xảy ra hiện tượng cộng hưởng.

#### **Thí dụ 2-4 :**

Vẽ biểu đồ moment động của dầm như hình 2-14. Cho biết  $P = 5\text{kN}$ , số vòng quay của mô tơ  $n = 450\text{vòng/phút}$ ,  $G=10\text{kN}$ . Dầm có chiều dài  $l=6\text{m}$ ,  $J=8880\text{cm}^4$ ,  $E=2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ , gia tốc trọng trường  $g = 981 \text{ cm/s}^2$ . Bỏ qua khối lượng phân bố của dầm.

#### **a- Tìm tần số dao động riêng**

Dầm có hai bậc tự do. Tần số dao động riêng đã tính ở thí dụ trước có.



$$\omega_1 = 5,96 \sqrt{\frac{EJ}{m \cdot \ell^3}} \quad ; \quad \omega_2 = 22 \sqrt{\frac{EJ}{m \cdot \ell^3}}$$

$$m = \frac{G}{g} = \frac{10}{9,81} = 1,02 \text{ kNs}^2 / \text{m}$$

$$\text{Vậy } \omega_1 = 52,5 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad \omega_2 = 203 \text{ s}^{-1}$$

b- Tính biểu đồ lực quán tính có

$$\delta_{11}^* \cdot Z_1 + \delta_{12} Z_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot Z_1 + \delta_{22}^* Z_2 + \Delta_{2P} = 0$$

Theo cách tính của cơ học kết cấu có :

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4}{243} \cdot \frac{\ell^3}{EJ} = 1,908 \cdot 10^{-4} \text{ m/kN}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7}{486} \cdot \frac{\ell^3}{EJ} = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ m/kN}$$

$$\delta_{11}^* = \delta_{22}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m \cdot r^2}$$

$$\text{Do } r = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2.3,14.480}{60} = 50 \text{ s}^{-1}$$

$$\delta_{11}^* = \delta_{22}^* = 1,908 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{1,02 \cdot 50^2}$$

$$\Delta_{1P} = \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_P = 5 \cdot 1,908 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta_{2P} = \overline{M}_2 \cdot \overline{M}_P = 5 \cdot 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Có thể tính trực tiếp

$$\Delta_{1P} = P \cdot \delta_{11} \text{ và } \Delta_{2P} = P \cdot \delta_{22}$$

Thay các giá trị đã tính được vào phương trình ta giải được :

$$Z_1 = 5,196 \cdot P = 25,98 \text{ kN}$$

$$Z_2 = 5,13 \cdot P = 25,65 \text{ kN}$$

c- Tính biên độ của moment động và hệ số động  $K_d$  vẽ biểu đồ moment động theo biểu thức

$$M_d = \overline{M}_1 \cdot Z_1 + \overline{M}_2 \cdot Z_2 + M_P$$

Hoặc trực tiếp vẽ theo sơ đồ tải trọng.

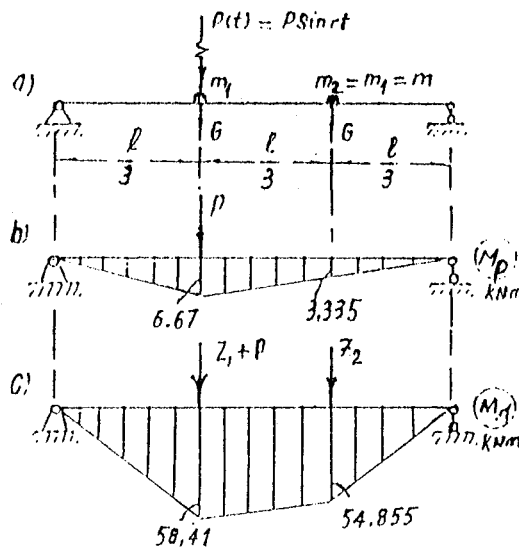
Hệ số động :

$$K_d = \frac{M_d}{M_t} = \frac{M_d}{M_p}$$

Theo hình vẽ ta có tỷ lệ này lớn nhất tại vị trí khối lượng  $m_2$ .

Vậy

$$K_{d \max} = \frac{54,855}{3,33} = 16,4$$



Hình 2-14

#### d- Biểu đồ moment tổng cộng

$$M_{tc} = M_d + M_t^*$$

$M_t^*$  : Biểu đồ moment tĩnh do trọng lượng của khối lượng công trình gây ra.

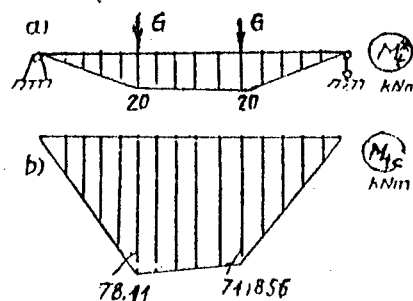
Trong thực tế người ta xác định hệ số động  $K_d$  bằng các công thức kinh nghiệm trong các qui trình.

Người ta xem tải trọng như tác dụng tĩnh để vẽ biểu đồ  $M_t$  (hay  $M_p$ ) và sử dụng các công thức

$$M_{tc} = M_t \cdot K_d + M_t^*$$

$$\text{Hay } M_{tc} = M_p \cdot K_d + M_t^*$$

Biểu đồ  $M_t^*$  và  $M_{tc}$  vẽ trên hình 2-15.



Hình 2-15



## CHƯƠNG 3

# DAO ĐỘNG CỦA KẾT CẤU KHUNG VÀ DẦM LIÊN TỤC

### 3-1 Khái niệm

Tính dao động của kết cấu khung và dầm liên tục có thể thực hiện được bằng hai phương pháp tổng quát : Phương pháp chính xác và phương pháp gần đúng.

- **Tính theo phương pháp chính xác** nếu ta xem xét đầy đủ các yếu tố sẽ dẫn đến việc giải bài toán có số bậc tự do bằng vô cùng theo sơ đồ biến dạng, kèm theo vào đó là các dạng của biến dạng và lực quán tính. Một bài toán như vậy sẽ quá phức tạp, cho nên khi tính theo phương pháp chính xác người ta vẫn tìm cách đơn giản hóa dạng các giả thiết có thể chấp nhận được mà vẫn thu được lời giải tin cậy.

- **Tính theo phương pháp gần đúng** nhằm đơn giản bài toán thực tế về một số sơ đồ đơn giản hơn để dễ dàng tính toán hơn.

Tóm lại có thể giải các hệ phức tạp (trong đó có hệ khung và dầm liên tục) bằng nhiều cách khác nhau, trong đó có một số phương pháp thực chất giống như các phương pháp của cơ học kết cấu tĩnh lực học, một số là các phương pháp khác, đặc biệt chỉ dùng để giải bài toán động học.

### 3-2 Tính dao động của khung siêu tĩnh bằng phương pháp chuyển vị

#### 1- Dao động cưỡng bức

Dùng phương pháp chuyển vị để tính toán động học cũng tương tự như giải bài toán tĩnh, chỉ có điều khác biệt là các ẩn số chuyển vị đường và chuyển vị góc ở bài toán động là yếu tố phụ thuộc thời gian  $t$ .

Hình 3-1 cho thấy dạng kết cấu cơ bản, ẩn số cơ bản của phương pháp chuyển vị trong bài toán động học.

Nếu lực tác động trên hệ là lực điều hòa với tần số  $r$  thì các chuyển vị và phản lực động của các liên kết phụ ở hệ cơ bản cũng thay đổi theo tần số  $r$ .

Tức là:

$$Z_i(t) = Z_i \cdot \sin rt$$

$$R_{ik}(t) = R_{ik} \cdot \sin rt$$

Điều kiện để hệ cơ bản làm việc giống hệ thực là phản lực tại các liên kết phụ phải bằng không.

$$R_i(t) = R_{i1} \cdot \sin rt + R_{i2} \cdot \sin rt + \dots + R_{in} \cdot \sin rt + R_{ip} \cdot \sin rt = 0$$

Đặt 
$$\frac{R_{in} \cdot \sin rt}{Z_n \cdot \sin rt} = r_{in}$$

Thay vào phương trình trên và biến đổi ta sẽ nhận được :

$$r_{i1}.Z_1 + r_{i2}.Z_2 + \dots + r_{in}.Z_n + R_{ip} = 0 \quad (3-1)$$

$$(i=1,2,\dots,n)$$

Trong đó :

$Z_i$  : Các trị số biên độ chưa biết của các chuyển vị góc hay chuyển vị thẳng tại các nút của khung (Tại các liên kết phụ thêm vào) .

$r_{ik}$  : Trị số biên độ của phản lực tại liên kết thứ  $i$  do chuyển vị động  $...Z_k(t)=1.\sin rt$  tại liên kết phụ thứ  $k$  gây ra ở hệ cơ bản.

$R_{ip}$  : Trị số biên độ của phản lực tại liên kết phụ thứ  $i$  do các tải trọng động gây ra ở hệ cơ bản.

Từ phương trình (3-1) ta có thể có được hệ  $n$  phương trình chính tắc để tính các ẩn số cơ bản  $Z_i$  . Các hệ số và số hạng tự do của phương trình được xác

định theo phương pháp đã biết của phương pháp chuyển vị. Bảng 3-1 và bảng 3-2 cho các giá trị biên độ moment uốn và lực cắt ở đầu các phần tử mẫu.

Biên độ moment động được xây dựng theo công thức :

$$M_P^d = \overline{M}_1^d.Z_1 + \overline{M}_2^d.Z_2 + \dots + \overline{M}_n^d.Z_n + M_P^{od}$$

Các biểu đồ  $Q_P^d$  ,  $N_P^d$  được suy ra từ biểu đồ  $M_P^d$  như cách tìm thông thường của kết cấu tĩnh.

- Nếu hệ là kết cấu đối xứng thì ta có thể tính theo phương pháp đơn giản hoá đã biết.
- Nếu lực động tác dụng là thay đổi bất kỳ thì phải phân tích tải trọng thành chuỗi lượng giác sau đó tính với từng số hạng riêng và cộng các kết quả lại.

## 2- Dao động riêng

Khi không có lực kích thích trong biểu thức (3-1)  $R_{ip} = 0$  ta sẽ có được phương trình chính tắc của dao động riêng.

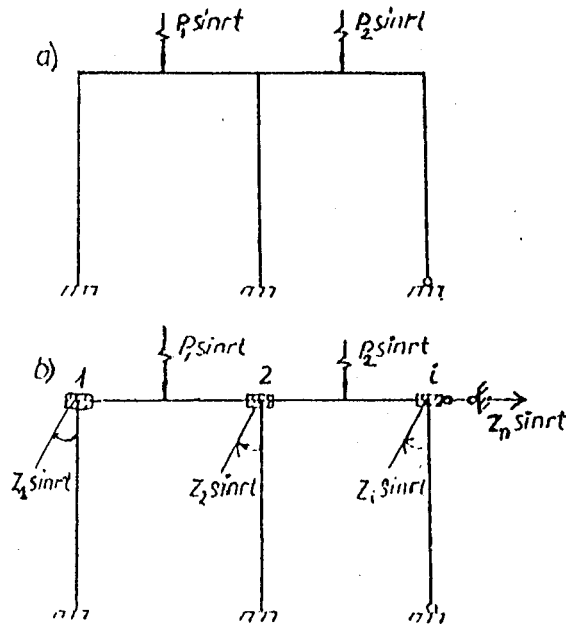
$$r_{11}.Z_1 + r_{12}.Z_2 + \dots + r_{1n}.Z_n = 0$$

$$r_{21}.Z_1 + r_{22}.Z_2 + \dots + r_{2n}.Z_n = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_{n1}.Z_1 + r_{n2}.Z_2 + \dots + r_{nn}.Z_n = 0$$

(3-2)



Hình 3-1

Điều kiện hệ có nghiệm khi

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (3-3)$$

Khai triển định thức (3-3) sẽ dẫn đến phương trình xác định thông số  $\lambda = k \cdot l$  từ đó suy ra tần số cần tìm.

$l$  : Chiều dài của thanh.

$k$  : Hệ số của từng thanh phụ thuộc khối lượng, tần số, độ cứng của thanh.

### Thí dụ 3-1 :

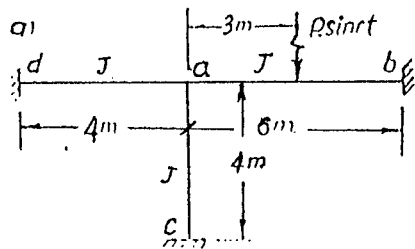
Vẽ biểu đồ moment uốn động của khung cho trên hình 3-2. Cho biết  $EJ = hs$  ;  $k_{ab} = 0,6m^{-1}$  ;  $k_{ac} = 0,3.m^{-1}$  và  $k_{ad} = 0,5m^{-1}$ .

Chọn hệ cơ bản như hình 3-2b. Phương trình chính tắc có dạng

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_{1P} = 0$$

Theo bảng 3-1 ta tính được phản lực đơn vị  $r_{11}$ .

$$r_{11} = \sum \frac{4EJ}{l} \cdot \mu_1(\lambda) = 4EJ \cdot \left( \frac{1}{l_{ab}} \cdot \mu_1(\lambda_{ab}) + \frac{1}{l_{ac}} \cdot \mu_1(\lambda_{ac}) + \frac{1}{l_{ad}} \cdot \mu_1(\lambda_{ad}) \right)$$



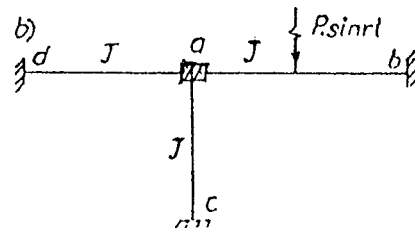
Trong đó :

$$\lambda_{ab} = k_{ab} \cdot l_{ab} = 0,6 \cdot 6 = 3,6$$

$$\lambda_{ac} = k_{ac} \cdot l_{ac} = 0,3 \cdot 4 = 1,2$$

$$\lambda_{ad} = k_{ad} \cdot l_{ad} = 0,5 \cdot 4 = 2,0$$

Từ bảng 5 trong phần phụ lục ta tìm được giá trị của các hàm số vòng.



$$\mu_1(ab) = \mu_1(3,6) = 0,42845;$$

$$\mu_1(1,2) = 0,99505;$$

$$\mu_1(2,0) = 0,96083;$$

Hình 3-2

Do đó :

$$r_{11} = 4EJ \left( \frac{1}{6} \cdot 0,42845 + \frac{1}{4} \cdot 0,99505 + \frac{1}{4} \cdot 0,96083 \right) = 2,24151 \cdot EJ$$

Theo bảng 3-1 ta cũng tính được

$$R_{1P} = M_o = \frac{P}{0,6} \cdot \left( \frac{9,60477 \times 0,98416 - 9,36399 \times 1,766823}{9,60477^2 - 8,92147 \times 9,36399} \right) = -1,1824 \cdot P$$

Bảng 3-1

TT	Sơ đồ	Trị số biên độ moment		Trị số biên độ lực cắt	
		$M_{ab}=M(0)$	$M_{ba}=M(l)$	$Q_{ab}=Q(0)$	$Q_{ba}=Q(l)$
1		$\frac{4EJ}{l} \cdot \mu_1(\lambda)$	$\frac{2EJ}{l} \cdot \mu_2(\lambda)$	$-\frac{6EJ}{l^2} \cdot \varepsilon_1(\lambda)$	$-\frac{6EJ}{l^2} \cdot \varepsilon_2(\lambda)$
2		$-\frac{6EJ}{l^2} \cdot \mu_3(\lambda)$	$-\frac{6EJ}{l^2} \cdot \mu_4(\lambda)$	$\frac{12EJ}{l^3} \cdot \varepsilon_4(\lambda)$	$\frac{12EJ}{l^3} \cdot \varepsilon_4(\lambda)$
3		$\frac{3EJ}{l} \cdot \mu_5(\lambda)$	0	$-\frac{3EJ}{l^2} \cdot \varepsilon_5(\lambda)$	$-\frac{3EJ}{l^2} \cdot \varepsilon_5^*(\lambda)$
4		$-\frac{3EJ}{l^2} \cdot \mu_6(\lambda)$	0	$\frac{3EJ}{l^3} \cdot \varepsilon_6(\lambda)$	$-\frac{3EJ}{l^3} \cdot \varepsilon_6^*(\lambda)$
5		$-\frac{3EJ}{l^2} \cdot \mu_7(\lambda)$	0	$\frac{3EJ}{l^3} \cdot \varepsilon_7(\lambda)$	$\frac{3EJ}{l^3} \cdot \varepsilon_8^*(\lambda)$
6		$\frac{EJ}{l} \cdot \mu_8(\lambda)$	$-\frac{EJ}{l} \cdot \mu_9(\lambda)$	$\frac{EJ}{l^2} \cdot \varepsilon_9(\lambda)$	0

Bảng 3-1 (Tiếp)

TT	Sơ đồ	Công thức xác định biên độ của Nội lực và chuyển vị
1		$M_0 = \frac{P}{k} [C_\lambda \cdot D_{k(l-a)} - D_\lambda \cdot C_{k(l-a)}] : \Delta_1$ $Q_0 = P [C_\lambda \cdot C_{k(l-a)} - B_\lambda \cdot D_{k(l-a)}] : \Delta_1$ $M_1 = \frac{P}{k} [D_\lambda \cdot C_{ka} - C_\lambda \cdot D_{ka}] : \Delta_1$ $Q_1 = P [B_\lambda \cdot D_{ka} - C_\lambda \cdot C_{ka}] : \Delta_1$
2		$M_0 = -M_1 = \frac{q}{k^2} [C_\lambda \cdot (A_\lambda - 1) - D_\lambda^2] : \Delta_1$ $Q_0 = -Q_1 = \frac{q}{k} [C_\lambda \cdot D_\lambda - B_\lambda \cdot (A_\lambda - 1)] : \Delta_1$
3		$M_0 = \frac{P}{k} [D_\lambda \cdot B_{k(l-a)} - B_\lambda \cdot D_{k(l-a)}] : \Delta_2$ $Q_0 = P [A_\lambda \cdot D_{k(l-a)} - C_\lambda \cdot B_{k(l-a)}] : \Delta_2$ $Q_1 = P [B_\lambda \cdot C_{ka} - A_\lambda \cdot D_{ka}] : \Delta_2$ $Y_1' = \frac{P}{k^2 \cdot EJ} [C_\lambda \cdot D_{ka} - D_\lambda \cdot C_{ka}] : \Delta_2$
4		$M_0 = \frac{q}{k^2} [C_\lambda \cdot D_\lambda - B_\lambda \cdot (A_\lambda - 1)] : \Delta_2$ $Q_0 = \frac{q}{k} [A_\lambda \cdot (A_\lambda - 1) - C_\lambda^2] : \Delta_2$ $Q_1 = \frac{q}{k} [A_\lambda \cdot (A_\lambda - 1) - B_\lambda \cdot D_\lambda] : \Delta_2$ $Y_1' = \frac{q}{k^2 \cdot EJ} [D_\lambda^2 - C_\lambda (A_\lambda - 1)] : \Delta_2$
5		$M_0 = \frac{P}{k} [A_\lambda \cdot C_{k(l-a)} - D_\lambda \cdot D_{k(l-a)}] : \Delta_3$ $Y_0' = \frac{P}{k^3 \cdot EJ} [B_\lambda \cdot D_{k(l-a)} - C_\lambda \cdot C_{k(l-a)}] : \Delta_3$ $M_1 = \frac{P}{k} [C_\lambda \cdot A_{ka} - A_\lambda \cdot C_{ka}] : \Delta_3$ $Q_1 = P [D_\lambda \cdot C_{ka} - B_\lambda \cdot A_{ka}] : \Delta_3$
6		$M_0 = \frac{q}{k^2} \cdot D_\lambda : \Delta_3$ $M_1 = -\frac{q}{k^2} [A_\lambda \cdot D_\lambda + B_\lambda \cdot C_\lambda] : \Delta_3$ $Y_0' = \frac{q}{EJ \cdot k^4} [C_\lambda \cdot D_\lambda - B_\lambda \cdot (A_\lambda - 1)] : \Delta_3$ $Q_1 = \frac{q}{k} [D_\lambda^2 - B_\lambda^2] : \Delta_3$
$\Delta_1 = C_\lambda^2 - B_\lambda \cdot D_\lambda$ ; $\Delta_2 = A_\lambda \cdot D_\lambda - B_\lambda \cdot C_\lambda$ ; $\Delta_3 = A_\lambda \cdot B_\lambda - C_\lambda \cdot D_\lambda$		



## CÁC HÀM SỐ

$$\begin{aligned}
\mu_1(\lambda) &= \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{B_\lambda \cdot C_\lambda - A_\lambda \cdot D_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda \cdot D_\lambda} = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda}{1 - \text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda} & ; & \quad \varepsilon_1(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{A_\lambda \cdot C_\lambda - B_\lambda^2}{C_\lambda^2 - B_\lambda \cdot D_\lambda} = \frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{\text{sh}\lambda \cdot \sin\lambda}{1 - \text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda} = \mu_3(\lambda) \\
\mu_2(\lambda) &= \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{D_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda \cdot D_\lambda} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\text{sh}\lambda - \sin\lambda}{1 - \text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda} & ; & \quad \varepsilon_2(\lambda) = \frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{C_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda \cdot D_\lambda} = \frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{\text{ch}\lambda - \cos\lambda}{1 - \text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda} = \mu_4(\lambda) \\
\mu_3(\lambda) &= -\frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{D_\lambda^2 - A_\lambda \cdot C_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda \cdot D_\lambda} = \frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{\text{sh}\lambda \cdot \sin\lambda}{1 - \text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda} & ; & \quad \varepsilon_3(\lambda) = \frac{\lambda^3}{12} \cdot \frac{A_\lambda \cdot B_\lambda - C_\lambda \cdot D_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda \cdot D_\lambda} = \frac{\lambda^3}{12} \cdot \frac{\text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda + \text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda}{1 - \text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda} \\
\mu_4(\lambda) &= \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{C_\lambda}{C_\lambda - B_\lambda \cdot D_\lambda} = \frac{\lambda^2}{6} \cdot \frac{\text{ch}\lambda - \cos\lambda}{1 - \text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda} & ; & \quad \varepsilon_4(\lambda) = \frac{\lambda^3}{12} \cdot \frac{B_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda \cdot D_\lambda} = \frac{\lambda^3}{12} \cdot \frac{\text{sh}\lambda + \sin\lambda}{1 - \text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda} \\
\mu_5(\lambda) &= \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{D_\lambda^2 - B_\lambda^2}{A_\lambda \cdot D_\lambda - B_\lambda \cdot C_\lambda} = \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{\text{sh}\lambda \cdot \sin\lambda}{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda} & ; & \quad \varepsilon_5(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{A_\lambda \cdot B_\lambda - C_\lambda \cdot D_\lambda}{A_\lambda \cdot D_\lambda - B_\lambda \cdot C_\lambda} = \frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{\text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda + \text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda}{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda} ; \\
& & & \quad \varepsilon_5^*(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{B_\lambda}{A_\lambda \cdot D_\lambda - B_\lambda \cdot C_\lambda} = \frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{\text{sh}\lambda + \sin\lambda}{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda} = \mu_7(\lambda) \\
\mu_6(\lambda) &= -\frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{A_\lambda \cdot B_\lambda - C_\lambda \cdot D_\lambda}{A_\lambda \cdot D_\lambda - B_\lambda \cdot C_\lambda} = \frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{\text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda + \text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda}{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda} & ; & \quad \varepsilon_6(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{C_\lambda^2 - A_\lambda^2}{A_\lambda \cdot D_\lambda - B_\lambda \cdot C_\lambda} = \frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{2\text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda}{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda} ; \\
& & & \quad \varepsilon_6^*(\lambda) = -\frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{A_\lambda}{A_\lambda \cdot D_\lambda - B_\lambda \cdot C_\lambda} = \frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{\text{ch}\lambda + \cos\lambda}{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda} = \varepsilon_7(\lambda) \\
\mu_7(\lambda) &= -\frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{B_\lambda}{A_\lambda \cdot D_\lambda - B_\lambda \cdot C_\lambda} = \frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{\text{sh}\lambda + \sin\lambda}{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda} & ; & \quad \varepsilon_7(\lambda) = \varepsilon_6^*(\lambda) \\
& & & \quad \varepsilon_8(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{B_\lambda \cdot D_\lambda - A_\lambda^2}{A_\lambda \cdot D_\lambda - B_\lambda \cdot C_\lambda} = \frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{1 + \text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda}{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda} \\
\mu_8(\lambda) &= \lambda \cdot \frac{A_\lambda^2 - C_\lambda^2}{A_\lambda \cdot B_\lambda - C_\lambda \cdot D_\lambda} = \lambda \cdot \frac{2\text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda}{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda + \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda} & ; & \quad \varepsilon_9(\lambda) = \lambda^2 \cdot \frac{B_\lambda \cdot C_\lambda - A_\lambda \cdot D_\lambda}{A_\lambda \cdot B_\lambda - C_\lambda \cdot D_\lambda} = \lambda^2 \cdot \frac{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda}{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda + \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda} \\
\mu_9(\lambda) &= \lambda \cdot \frac{A_\lambda}{A_\lambda \cdot B_\lambda - C_\lambda \cdot D_\lambda} = \lambda \cdot \frac{\text{ch}\lambda + \cos\lambda}{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda + \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda}
\end{aligned}$$

Do đó :

$$Z_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}} = \frac{1,18024.P}{2,24151.EJ} = 0,526536 \frac{P}{EJ}$$

**Vẽ biểu đồ moment uốn động :**

- Đối với thanh a-b :

$$k_{ab} = 0,6 ; \lambda_{ab} = 3,6.$$

Các điều kiện ban đầu ở đầu trái của thanh .

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = Z_1 = 0,526536 \cdot \frac{P}{EJ}; M(0) = \bar{M}_1 \cdot Z_1 + M_P^0$$

$$\bar{M}_1 = 4 \cdot \frac{EJ}{6} \cdot 0,42845 = 0,285633 \cdot EJ$$

$$M_P^0 = R_{1P} = -1,18024 \cdot P$$

$$M(0) = 0,285633 \cdot EJ \times 0,526536 \cdot \frac{P}{EJ} - 1,18024 \cdot P = -1,02984 \cdot P$$

Lực cắt :

$$Q_0 = \bar{Q}_1 \cdot Z_1 + Q_P^0$$

Từ bảng 3 - 1 ta có:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1 &= -\frac{6EJ}{6^2} \cdot \varepsilon_1(3,6) = -\frac{EJ}{6} \cdot \frac{\lambda_{ab}^2 \cdot (C_{\lambda_{ab}} \cdot A_{\lambda_{ab}} - B_{\lambda_{ab}}^2)}{6(C_{\lambda_{ab}}^2 - B_{\lambda_{ab}} \cdot D_{\lambda_{ab}})} = \\ &= -\frac{EJ}{6^2} \cdot \frac{3,6^2 \cdot (9,60477 \times 8,70801 - 8,92147^2)}{9,60477^2 - 8,92147 \times 9,36399} = 0,1672 \cdot EJ \end{aligned}$$

Từ bảng 3 - 1 ta cũng có:

$$\begin{aligned} Q_P^0 &= P \cdot \frac{C_{\lambda_{ab}} \cdot C_{\frac{\lambda_{ab}}{2}} - B_{\lambda_{ab}} \cdot D_{\frac{\lambda_{ab}}{2}}}{C_{\lambda_{ab}}^2 - B_{\lambda_{ab}} \cdot D_{\lambda_{ab}}} = \\ &= P \cdot \frac{9,60477 \times 1,66823 - 8,92147 \times 0,98416}{9,60477^2 - 8,92147 \times 9,36399} = 0,83145 \cdot P \end{aligned}$$

Do đó

$$Q_0 = 0,1672 \cdot EJ \times 0,526536 \cdot \frac{P}{EJ} + 0,83145 \cdot P = 0,919488 \cdot P$$

Từ phương trình biên độ chuyển vị và nội lực của thanh thẳng khi dao động cưỡng bức ta viết được phương trình biên độ moment uốn động trong thanh ab như sau:

Khi  $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned} M_1(z) &= -0,6EJ \times 0,526536 \frac{P}{EJ} \cdot D_{kz} - 1,02984 \cdot P \cdot A_{kz} + \frac{0,919488 \cdot P}{0,6} \cdot B_{kz} \\ &= -0,315929 \cdot P \cdot D_{kz} - 1,02984 \cdot P \cdot A_{kz} + 1,53248 \cdot P \cdot B_{kz} \end{aligned} \quad (a)$$

Khi  $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$

$$\begin{aligned} M_2(z) &= M_1(z) + \frac{\Delta Q_a}{k} \cdot B_{k(z-a)} = M_1(z) - \frac{P}{0,6} \cdot B_{k(z-\frac{1}{2})} \\ &= M_1(z) - 1,666667 \cdot B_{k(z-\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (b)$$

- Đối với thanh d-a :

$$k_{ad} = 0,5 \quad ; \quad \lambda_{ad} = 2,0$$

Nếu chọn gốc tọa độ ở đầu trái, ta có các thông số ban đầu.

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \quad ; \quad M(0) = \frac{2EJ}{4} \cdot \mu_2(2) \cdot Z_1 = \frac{EJ}{2} \cdot 1,05922 \times 0,52654 \cdot \frac{P}{EJ} = 0,278861 \cdot P \\ y'(0) &= 0 \quad ; \quad Q(0) = -\frac{6EJ}{4^2} \cdot \varepsilon_2(2) \cdot Z_1 = -\frac{6EJ}{16} \cdot 1,08572 \times 0,52654 \cdot \frac{P}{EJ} = -0,214378 \cdot P \end{aligned}$$

Ta có phương trình moment uốn động :

$$M(z) = 0,278861 \cdot P \cdot A_{kz} - \frac{0,214378}{0,5} \cdot P \cdot B_{kz} \quad (c)$$

- Đối với thanh a-c :

$$k_{ac} = 0,3 \quad ; \quad \lambda_{ac} = 1,2$$

Chọn gốc tọa độ ở đầu c, ta có thông số ban đầu :

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \quad ; \quad M(0) = \frac{2EJ}{4} \cdot 1,00744 \times 0,52654 \cdot \frac{P}{EJ} = 0,265229 \cdot P \\ y'(0) &= 0 \quad ; \quad Q(0) = -\frac{6EJ}{4^2} \cdot 1,01075 \times 0,52654 \cdot \frac{P}{EJ} = -0,199575 \cdot P \end{aligned}$$

Ta có phương trình moment uốn động :

$$M(z) = 0,265229 \cdot P \cdot A_{kz} - 0,66525 \cdot P \cdot B_{kz} \quad (d)$$

Lần lượt cho  $z$  những giá trị khác nhau, theo bảng 4 trong phần phụ lục ta dễ dàng xác định giá trị của các hàm số vòng và từ đó suy ra moment uốn động tại các tiết diện khác nhau trong mỗi thanh theo các phương trình (a) , (b) , (c) và (d) .

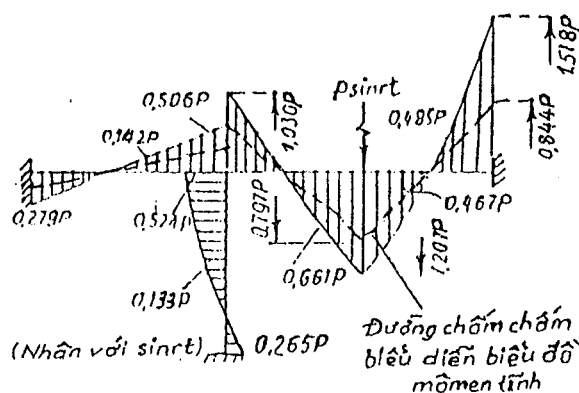
Kết quả tính toán được ghi trong bảng 3-3. Biểu đồ biên độ moment uốn động vẽ trên hình 3-3. Đường đứt nét trên hình vẽ là biểu đồ moment uốn tĩnh do lực  $P$  tác dụng tĩnh gây ra.

Bảng 3-3

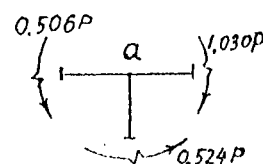
z	Tung độ biểu đồ moment uốn động		
	Thanh ab	Thanh da	Thanh ca
0	-1,0298.P	0,2789.P	0,2652.P
1	-0,1263.P		
2	-0,6606.P	-0,1418.P	-0,1329.P
3	-1,2066.P		
4	-0,4665.P	-0,5059.P	-0,5239.P
5	-0,4848.P		
6	-1,5175.P		

Để kiểm tra kết quả tính toán, ta thực hiện kiểm tra điều kiện cân bằng nút a – hình 3-4.

$$- 0.5059.P - 0,5239.P + 1,0298.P = 0$$



Hình 3-3



Hình 3-4

### Thí dụ 3-2 :

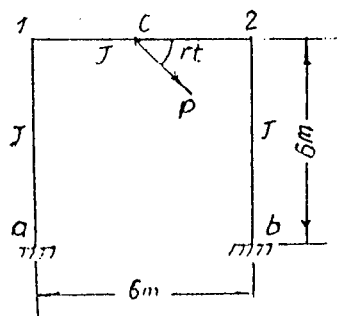
Cho khung có kích thước như hình 3-5. Xác định tần số dao động riêng và vẽ biểu đồ moment uốn động do lực P quay với tần số dao động cưỡng bức  $r = 10 \text{ s}^{-1}$ . Cho biết  $EJ=4.10^4 \text{ kNm}^2$  và trọng lượng mỗi thanh là 80 kN

#### 1- Xác định tần số dao động riêng

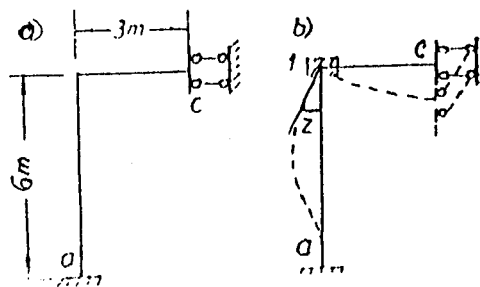
Vì hệ đối xứng nên để làm đơn giản bài toán ta có thể xác định tần số ứng với các dạng dao động đối xứng và phản đối xứng.

- a- **Trường hợp dao động đối xứng** Để nghiên cứu dao động đối xứng ta có thể vận dụng khái niệm chuyển vị kép hoặc áp dụng cách biến đổi sơ đồ tính để tính với nửa hệ. Nếu dùng cách tính với nửa hệ ta có sơ đồ tính như hình 3-6a. Hệ cơ bản có dạng như hình 3-6a. Phương trình tần số có dạng:

$$R_{11} = 0$$



Hình 3-5



Hình 3-6

Theo các số liệu cho trong bảng 3-1 ta có :

$$r_{11} = \frac{4EJ}{6} \cdot \mu_1(\lambda_{1a}) + \frac{EJ}{3} \cdot \mu_8(\lambda_{1c})$$

Trong đó :  $\lambda_{1a} = k \cdot \ell$  ;  $\lambda_{1c} = k \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} \cdot \lambda$

Hay 
$$\lambda \cdot \frac{\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - \text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda}{1 - \text{ch}\lambda \cdot \text{ccs}\lambda} + \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{2\text{ch}\frac{\lambda}{2} \cdot \cos\frac{\lambda}{2}}{\text{ch}\frac{\lambda}{2} \cdot \sin\frac{\lambda}{2} + \text{sh}\frac{\lambda}{2} \cdot \cos\frac{\lambda}{2}} = 0$$

Sau khi biến đổi về cùng một biến số  $\lambda$  ta được phương trình :

$$2\text{ch}\lambda \cdot \sin\lambda - 2\text{sh}\lambda \cdot \cos\lambda - \text{sh}\lambda + \sin\lambda = 0$$

Hai nghiệm đầu tiên của phương trình :

$$\lambda_1 = k_1 \cdot \ell = 3,56 \quad ; \quad \lambda_2 = k_2 \cdot \ell = 7,43$$

Từ đó ta dễ dàng xác định được tần số dao động riêng theo công thức ta đã biết :

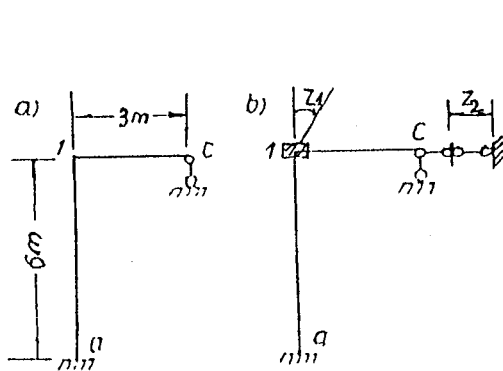
$$\omega_1 = k_1^2 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{3,56^2}{6^2} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 6}{80}} = 60,7 \text{ (s}^{-1}\text{)}$$

$$\omega_2 = k_2^2 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{7,43^2}{6^2} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 6}{80}} = 265,5 \text{ (s}^{-1}\text{)}$$

**b- Trường hợp dao động phản đối xứng. Sơ đồ tính có dạng như hình 3-7a. Hệ cơ bản vẽ trên hình 3-7b. Phương trình tần số**

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Sử dụng các số liệu trong bảng 3-1 ta có thể xác định được các phản lực đơn vị như sau :



Hình 3-7

Từ điều kiện cân bằng moment tại nút 1 khi nút 1 chuyển vị góc  $z_1 = 1 \cdot \sin rt$ , ta có:

$$r_{11} = \frac{4EJ}{6} \cdot \mu_1(\lambda) + \frac{3EJ}{3} \cdot \mu_5\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (a)$$

Từ điều kiện cân bằng của thanh ngang bị cắt khi nút 1 chuyển vị góc  $z_1 = 1 \cdot \sin rt$  như hình 3-8b, ta có :

$$r_{21} = -\frac{6EJ}{6^2} \cdot \varepsilon_1(\lambda) = -\frac{EJ}{6} \cdot \varepsilon_1(\lambda) \quad (b)$$

Từ điều kiện cân bằng của nút 2 khi chuyển vị góc  $z_2 = 1 \cdot \sin rt$  như hình 3-8c, ta có :

$$r_{12} = -\frac{6EJ}{6^2} \cdot \varepsilon_1(\lambda) = -\frac{EJ}{6} \cdot \varepsilon_1(\lambda) \quad (c)$$

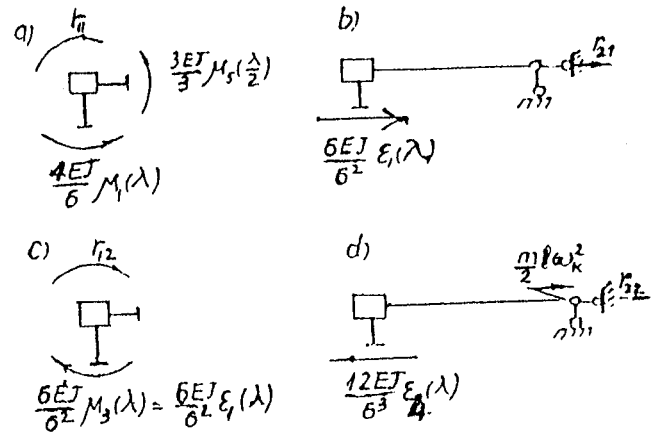
Từ điều kiện cân bằng của thanh ngang bị cắt khi  $z_2 = 1 \cdot \sin rt$  như hình 3-8d đồng thời có chú ý đến ảnh hưởng của khối lượng  $m$  của thanh ngang ta có

$$r_{22} = \frac{12EJ}{6^3} \cdot \varepsilon_3(\lambda) \cdot \frac{m \cdot \ell}{2} \cdot \omega_k^2$$

Ta đã có 
$$\frac{m \cdot \ell}{2} \cdot \omega_k^2 = \frac{\lambda^4}{2} \cdot \frac{EJ}{\ell^3} = \frac{EJ \cdot \lambda^4}{2 \times 6^3}$$

Suy ra 
$$r_{22} = \frac{12EJ}{6^3} \cdot \varepsilon_3(\lambda) - \frac{EJ \cdot \lambda^4}{2 \times 6^3} \quad (d)$$

Thay các số liệu vừa tìm được vào phương trình tần số ta có :



Hình 3-8

$$D = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} \cdot EJ \cdot \mu_1(\lambda) + EJ \cdot \mu_5\left(\frac{\lambda}{2}\right) & -\frac{EJ}{6} \cdot \varepsilon_1(\lambda) \\ -\frac{EJ}{6} \cdot \varepsilon_1(\lambda) & \frac{EJ}{18} \cdot \varepsilon_3(\lambda) - \frac{EJ \cdot \lambda^4}{432} \end{vmatrix} = 0$$

Nghiệm thứ nhất của phương trình có giá trị  $\lambda_1 = 1,79$ . Do đó tần số thứ nhất của dạng dao động chính bằng :

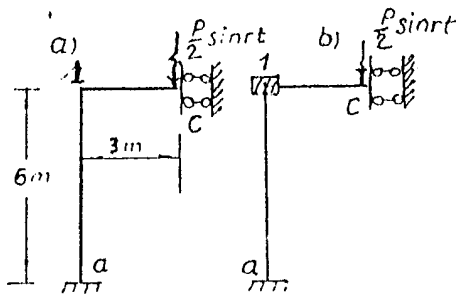
$$\omega_1 = \frac{1,79^2}{36} \cdot \sqrt{\frac{10 \times 4 \times 10^4 \times 6}{80}} = \frac{1,79^2}{36} 10^2 \sqrt{3} = 15,42 \text{ (s}^{-1}\text{)}$$

So sánh tần số này với tần số thứ nhất của dạng dao động đối xứng ta thấy tần số ứng với dạng dao động phản đối xứng là tần số cơ bản.

## 2- Vẽ biểu đồ moment uốn động

Phân tích tải trọng theo phương đứng và phương ngang ta có thể chia bài toán đã cho thành hai bài toán : khung chịu tải trọng đối xứng  $P \cdot \sin \tau t$  và khung chịu tải trọng phản đối xứng  $P \cdot \cos \tau t$

a- Trường hợp khung chịu tải trọng đối xứng : Sơ đồ tính với nửa hệ có dạng như hình 3-9a. Hệ cơ bản vẽ trên hình 3-9b .  
Các đặc trưng cơ bản :



Hình 3-9

$$k = 4 \sqrt{\frac{m \cdot r^2}{EJ}} = 4 \sqrt{\frac{\frac{80}{10 \cdot 6} \cdot 10^2}{4 \cdot 10^4}} = 0,24 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda_{1a} = k \cdot \ell = 0,24 \cdot 6 = 1,44$$

$$\lambda_{1c} = k \cdot \frac{\ell}{2} = 0,24 \cdot 3 = 0,72$$

Phương trình chính tắc

$$r_{11} \cdot z_1 + R_{1P} = 0$$

Trong đó :

$$r_{11} = \frac{4EJ}{6} \cdot \mu_1(1,44) + \frac{EJ}{3} \cdot \mu_8(0,72) = 5,588652 \cdot EJ$$

$$R_{1P} = -M_1 \text{ (Theo sơ đồ 5 trong bảng 3 - 1)}$$

$$\begin{aligned} R_{1P} &= -\frac{P}{2k} \cdot \frac{C_\lambda \cdot A_{ko} - A_\lambda \cdot C_{ko}}{A_\lambda \cdot B_\lambda - C_\lambda \cdot D_\lambda} \\ &= \frac{-P}{2 \cdot 0,24} \cdot \frac{0,26020 \cdot 1}{(1,01141 \times 0,72198 - 0,26020 \times 0,06282)} = -0,75730 \cdot P \end{aligned}$$

Suy ra :

$$z_1 = 0,12865 \cdot \frac{P}{i}$$

Vẽ biểu đồ moment uốn trong từng thanh :

- **Thanh 1-c** : Các thông số ban đầu

$$y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = z_1 = 0,12865 \cdot \frac{P}{i}$$

$$M(0) = \bar{M}_1 \cdot Z_1 + M_P^0 = \frac{EJ}{3} \cdot \mu_8(0,72) \cdot z_1 - 0,75730 \cdot P = -0,50929 \cdot P$$

$$Q(0) = \bar{Q}_1 \cdot Z_1 + Q_P^0 = \frac{EJ}{\ell^2} \cdot \varepsilon_9(\lambda) \cdot z_1 + P \cdot \frac{B_\lambda \cdot A_{ko} - D_\lambda \cdot C_{ko}}{A_\lambda \cdot B_\lambda - C_\lambda \cdot D_\lambda} = 0,51335 \cdot P$$

Ta có phương trình moment uốn động :

$$\begin{aligned} M(z) &= -kEJ \cdot \frac{0,12865 \cdot P}{i} \cdot D_{kz} - 0,50929 \cdot P \cdot A_{kz} + \frac{0,51335 \cdot P}{k} \cdot B_{kz} \\ &= (-0,18526 \cdot D_{kz} - 0,50929 \cdot A_{kz} + 2,1389 \cdot B_{kz}) \cdot P \end{aligned}$$

Từ phương trình này, ta dễ dàng vẽ biểu đồ moment uốn động trong đoạn thanh 1-c.

Đối với đoạn thanh c-2 ta suy ra theo tính chất đối xứng . Hình 3-10

- **Thanh a-1** : Chọn gốc tọa độ tại điểm a. Các thông số ban đầu

$$y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 0$$

$$M(0) = 2 \cdot i \cdot \mu_2(1,44) \cdot z_1$$

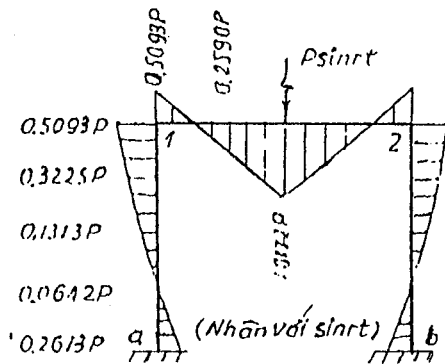
$$= 2 \times i \times 1,01550 \times 0,12865 \cdot \frac{P}{i}$$

$$= 0,26129 \cdot P$$

$$Q(0) = -\frac{6 \cdot i}{\ell} \cdot \varepsilon_2(1,44) \cdot z_1$$

$$= -i \times 1,02241 \times 0,12865 \cdot \frac{P}{i}$$

$$= -0,13153 \cdot P$$



Hình 3-10

Ta có

$$M(z) = (0,26129 \cdot A_{kz} - 0,54805 \cdot B_{kz}) \cdot P$$

Biểu đồ biên độ moment uốn trong toàn hệ vẽ trên hình 3-10.

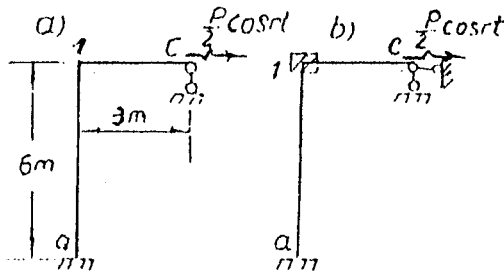


### b- Trường hợp khung chịu tải trọng phản đối xứng

Sơ đồ tính nửa hệ có dạng như hình 3-11a. Hệ cơ bản vẽ trên hình 3-11b. Phương trình chính tắc có dạng :

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1P} = 0$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2P} = 0$$



Hình 3-11

Để xác định các phản lực đơn vị ta có thể dùng các công thức (a) ; (b) ; (c) ; (d) đã lập ở trên, trong đó cần cho  $\lambda = 1,44$ .

Kết quả :

$$r_{11} = 9,94852.i ;$$

$$r_{12} = r_{21} = -0,96222.i ;$$

$$r_{22} = 0,22878.i$$

Các số hạng tự do

$$R_{1P} = 0 ; \quad R_{2P} = -\frac{P}{2}$$

Do đó hệ phương trình chính tắc có dạng :

$$\left. \begin{aligned} 0,94852.i.Z_1 - 0,96222.i.Z_2 + 0 &= 0 \\ -0,96222.i.Z_1 + 0,22878.i.Z_2 - \frac{P}{2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Nghiệm của phương trình :

$$Z_1 = 0,356337 \cdot \frac{P}{i} ; \quad Z_2 = 3,684218 \cdot \frac{P}{i}$$

Vẽ biểu đồ moment uốn trong các thanh. Cũng thực hiện tương tự như trên ta được kết quả như sau :

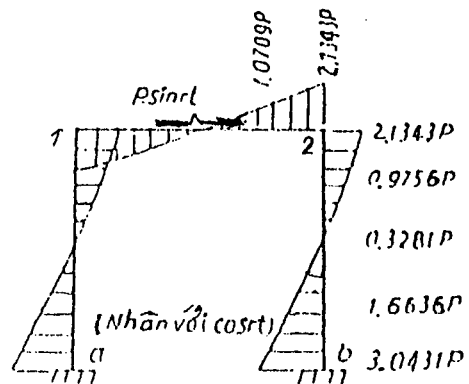
Phương trình moment uốn trong thanh 1-c .

$$M(z) = (-0,513125 \cdot D_{kz} + 2,134373 \cdot A_{kz} - 2,946654 \cdot B_{kz}) \cdot P$$

Phương trình moment trong thanh đứng :

$$M(z) = (-3,043061 \cdot A_{kz} + 3,837304 \cdot B_{kz}) \cdot P$$

Biểu đồ biên độ moment uốn động trong trường hợp tải trọng phản đối xứng vẽ trên hình 3-12.

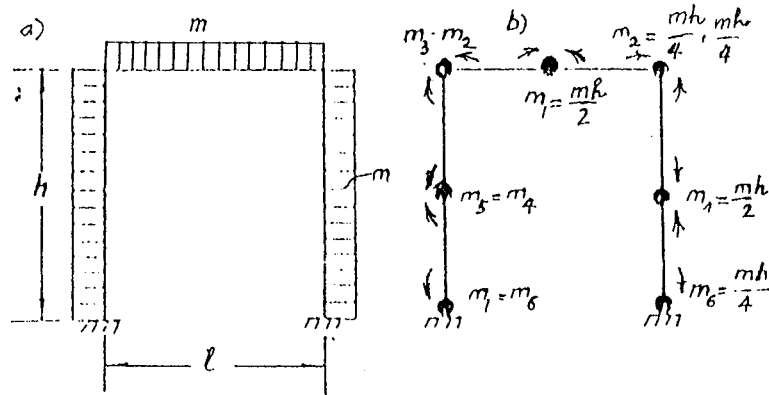


Hình 3-12

### 3-3 Tính dao động của khung theo phương pháp gần đúng

Các phương pháp gần đúng trong một chừng mực nào đó có thể vẫn dùng để tính dao động của khung. Trong mục này giới thiệu phương pháp thay thế khối lượng để biến đổi sơ đồ khối lượng phân bố theo chiều dài thanh về một số khối lượng tập trung.

Làm như vậy, ta đã đưa bài toán có vô cùng bậc tự do về bài toán có một số bậc tự do. Với sơ đồ mới ta có thể áp dụng lý thuyết đã nghiên cứu ở phần trước để tính dao động riêng, dao động cưỡng bức.



Hình 3-13

Khi thay thế khối lượng người ta thường dùng nguyên tắc cạnh. Nghĩa là tập trung các khối lượng phân bố trong mỗi đoạn đã chia về trung tâm của mỗi đoạn (Hình 3-13). Áp dụng phương pháp này để tính tần số dao động riêng thứ nhất, thường cho sai số không quá 1÷2% : sai số này tăng nhanh khi tính các tần số cao hơn.

Khi tính dao động cưỡng bức, lực kích thích có tần số  $r$  nhỏ hơn tần số dao động riêng  $\omega_1$  thì kết quả khá chính xác. Điều này có thể thoả mãn được đối với nhiều công trình xây dựng.

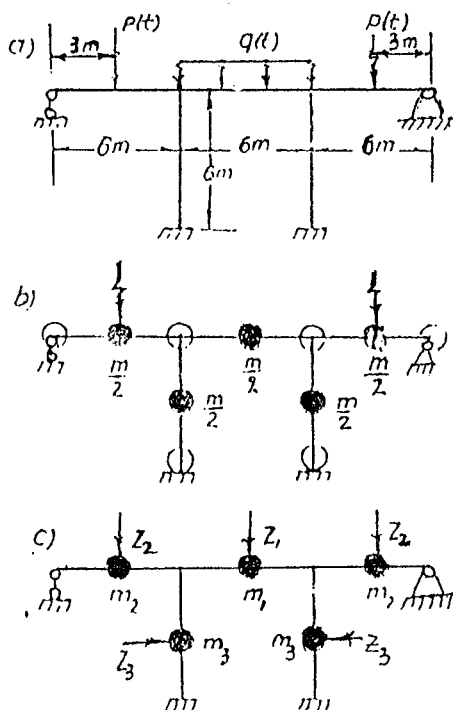
#### Thí dụ 3-3 :

Vẽ biểu đồ moment động của khung chịu tác dụng của một nhóm lực kích thích có cùng tần số (Hình 3-14). Trọng lượng của từng thanh là  $Q$ , khối lượng phân bố của từng thanh là  $m=Q/g$ .

Cho biết  $P(t) = 60.\sin rt$  kN

$q(t) = 30.\sin rt$  kN/m

$$r = 0,319 \frac{EJ}{m/2} ; EJ = hs$$



Hình 3-14

Để tính theo phương pháp gần đúng ta thay thế khối lượng phân bố bằng các khối lượng tập trung ở giữa và ở đầu thanh (hình 3-14b). Vì các nút và các gối của khung không có chuyển vị nên không cần xét đến các khối lượng tập trung tại đó.

Trong tính toán sau này, ta sử dụng tính chất đối xứng của kết cấu và tải trọng (hình 3-14c).

### 1- Tính các hệ số và số hạng tự do

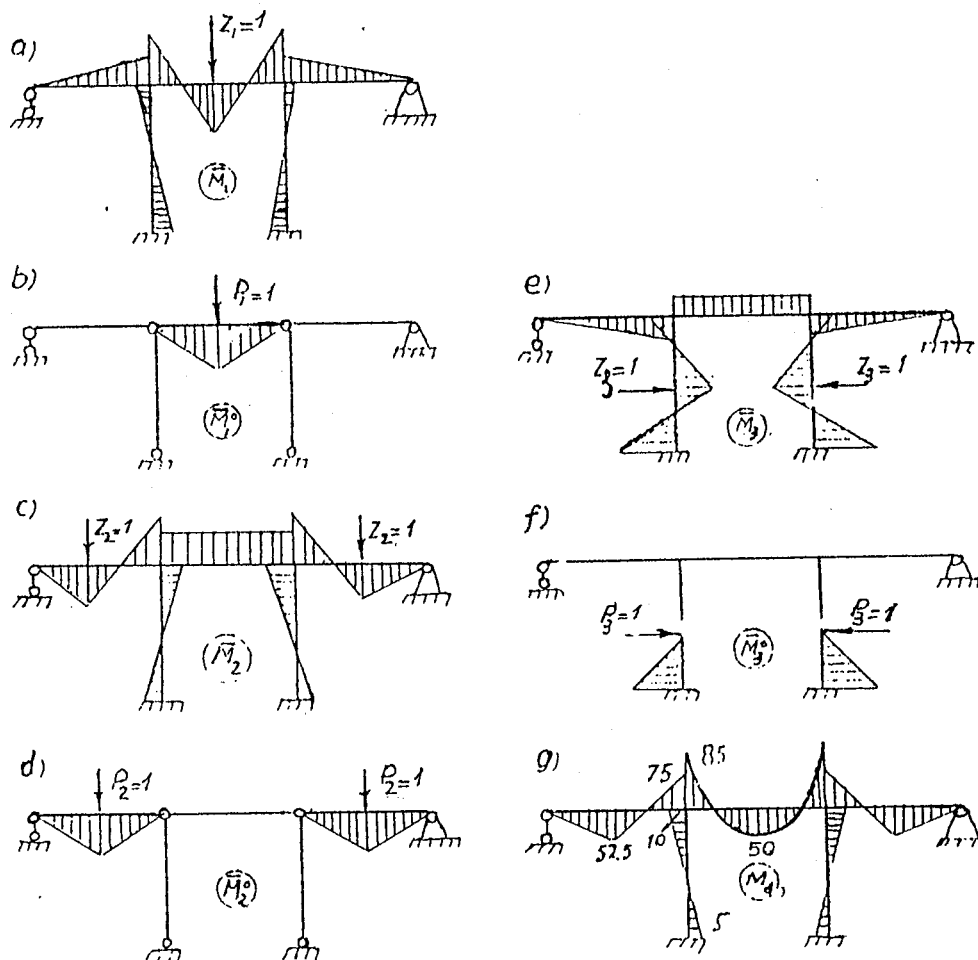
Để tính chuyển vị trong khung siêu tĩnh, ta dùng công thức :

$$\delta_{ik} = \overline{M}_i^0 \cdot \overline{M}_k = \overline{M}_i \cdot \overline{M}_k^0$$

$$\Delta_{iP} = \overline{M}_i^0 \cdot \overline{M}_P$$

Trong đó các biểu đồ mang chỉ số <sup>0</sup> ở phía trên là biểu đồ moment uốn trong hệ cơ bản tĩnh định suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho.

Áp dụng phương pháp đã quen biết ta dễ dàng vẽ được các biểu đồ cần thiết như hình 3-15



Hình 3-15

Sau khi nhân biểu đồ ta được :

$$\begin{array}{llll} EJ.\delta_{11} & = & 1,88 & ; & EJ.\delta_{33} & = & 3,00 \\ EJ.\delta_{22} & = & 5,63 & ; & EJ.\delta_{12} & = & -1,13 \\ EJ.\delta_{13} & = & -0,75 & ; & EJ.\delta_{23} & = & 1,13 \\ EJ.\Delta_{1P} & = & 123,70 & ; & EJ.\Delta_{2P} & = & 202,50 \\ EJ.\Delta_{3P} & = & -22,50 & & & & \end{array}$$

## 2- Xác định các tần số dao động riêng

Vì kết cấu đối xứng và tải trọng cũng đối xứng nên ta chỉ cần tính các tần số ứng với dao động đối xứng để kiểm tra khả năng cộng hưởng. Như vậy chỉ cần tính với hệ như hình 3-14 là đủ.

Phương trình tần số có dạng :

$$\begin{vmatrix} \left( \delta_{11}.m_1.\omega^2 - 1 \right) & \delta_{12}.\frac{m_2}{2}.\omega^2 & \delta_{13}.\frac{m_3}{2}.\omega^2 \\ \delta_{21}.m_1.\omega^2 & \left( \delta_{22}.\frac{m_2}{2}.\omega^2 - 1 \right) & \delta_{23}.\frac{m_3}{2}.\omega^2 \\ \delta_{31}.m_1.\omega^2 & \delta_{32}.\frac{m_2}{2}.\omega^2 & \left( \delta_{33}.\frac{m_3}{2}.\omega^2 - 1 \right) \end{vmatrix} = 0$$

Trong đó :  $m_1 = m_2 = m_3 = m/2 = m^*$

Thay các giá trị vừa tìm được ở trên vào phương trình tần số ta được :

$$\begin{vmatrix} (1,880 - \lambda) & -0,565 & -0,375 \\ -1,130 & (2,815 - \lambda) & 0,565 \\ -0,750 & 0,565 & (1,50 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Trong đó:

$$\lambda = \frac{EJ}{m^*.\omega^2}$$

Giải phương trình tần số trên ta được kết quả :

$$\lambda_1 = 3,55 \quad ; \quad \lambda_2 = 1,5 \quad ; \quad \lambda_3 = 1,14$$

từ (c) ta có :

$$\omega_i^2 = \frac{EJ}{m^*.\lambda_i}$$

Suy ra :

$$\omega_1 = 0,531 \sqrt{\frac{EJ}{m^*}} \quad ; \quad \omega_2 = 0,816 \sqrt{\frac{EJ}{m^*}} \quad ; \quad \omega_3 = 0,937 \sqrt{\frac{EJ}{m^*}}$$

So sánh với tần số lực kích thích đã cho ta thấy :

$$r = 0,319 \sqrt{\frac{EJ}{m/2}} = 0,319 \sqrt{\frac{EJ}{m^*}} \approx 0,6 \cdot \omega_1 < \omega_1$$

### Vẽ biểu đồ moment động

Từ hệ phương trình dùng để xác định biên độ của các lực quán tính, ta có :

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^* \cdot Z_1 + \delta_{12} \cdot Z_2 + \delta_{13} \cdot Z_3 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot Z_1 + \delta_{22}^* \cdot Z_2 + \delta_{23} \cdot Z_3 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{31} \cdot Z_1 + \delta_{32} \cdot Z_2 + \delta_{33}^* \cdot Z_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Trong đó :

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m^* \cdot r^2} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( 1,88 - \frac{1}{0,319^2} \right) = -\frac{7,94}{EJ}$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{\frac{m^*}{2} \cdot r^2} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( 2,63 - \frac{2}{0,319^2} \right) = -\frac{14,01}{EJ}$$

$$\delta_{33}^* = \delta_{33} - \frac{1}{\frac{m^*}{2} \cdot r^2} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( 3,00 - \frac{2}{0,319^2} \right) = \frac{16,64}{EJ}$$

Thay các số liệu vừa tìm được ở trên vào hệ phương trình chính tắc ta được :

$$\left\{ \begin{aligned} -7,94 \cdot Z_1 - 1,13 \cdot Z_2 - 0,75 Z_3 + 123,7 &= 0 \\ -1,13 \cdot Z_1 - 14,01 \cdot Z_2 + 1,13 \cdot Z_3 + 202,5 &= 0 \\ -0,75 \cdot Z_1 + 1,13 \cdot Z_2 - 16,64 \cdot Z_3 - 22,5 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Giải phương trình ta được :

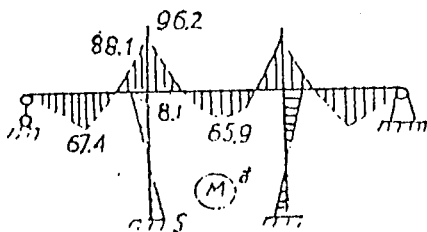
$$Z_1 = 13,9 \text{ kN} ; Z_2 = 13,27 \text{ kN} ; Z_3 = -1,03 \text{ kN}$$

Biểu đồ biên độ moment động vẽ được theo biểu thức sau :

$$M^d = 13,9 \overline{M}_1 + 13,27 \overline{M}_2 - 1,08 \overline{M}_3 + \overline{M}_p$$

Trên hình 3-16 biểu diễn kết quả cuối cùng của biểu đồ moment động.

Đối chiếu các tung độ của biểu đồ moment tĩnh  $M_p$  trên hình 3-15 với các tung độ của biểu đồ moment động trên hình 3-16 ta có thể tính được hệ số động như sau :



Hình 3-16

– Đối với tiết diện ở giữa nhịp 1 hay nhịp 3

$$K_d = \frac{M_d}{M_t} = \frac{67,4}{52,5} = 1,28$$

– Đối với tiết diện ở giữa nhịp 2

$$K_d = \frac{65,9}{50,0} = 1,39$$

– Đối với tiết diện ở hai đầu của nhịp 2

$$K_d = \frac{96,2}{85} = 1,13$$

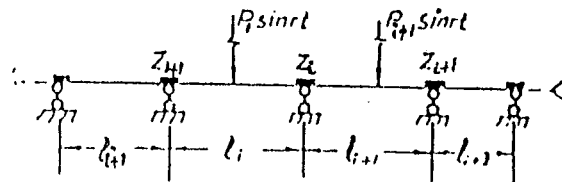
Sau khi khảo sát thêm các tiết diện khác ta thấy hệ số động lớn nhất của khung là  $K_{dmax} = 1,39$ .

Trong tính toán thực tế các công trình thông thường, để cho đơn giản, người ta tính theo trạng thái lực tĩnh rồi nhân lên với một hệ số động đã được quy định sẵn. Dựa trên cơ sở lý luận và thực nghiệm, người ta cũng tìm ra được nhiều công thức kinh nghiệm để tính hệ số động.

### 3-4 Tính dao động của dầm liên tục theo phương pháp chuyển vị

Hệ cơ bản khi tính dao động của dầm theo phương pháp chuyển vị có thể chọn như cách tính thông thường như khi tính với tải trọng tĩnh. Hình 3-17.

Trong trường hợp dao động cưỡng bức, phương trình chính tắc viết cho điều kiện phản lực tại liên kết  $i$  ở hệ cơ bản có dạng như sau :



Hình 3-17

$$r_{i(i-1)} \cdot Z_{i-1} + r_{ii} \cdot Z_i + r_{i(i+1)} \cdot Z_{i+1} + R_{iP} = 0 \quad (3-4)$$

Theo bảng 3-1 ta tìm được các hệ số là các phản lực do các chuyển vị đơn vị  $Z_i = 1$  gây ra :

$$r_{i(i-1)} = \frac{2EJ_i}{l_i} \cdot \mu_2(\lambda_i)$$

$$r_{ii} = \frac{4EJ_i}{l_i} \cdot \mu_1(\lambda_i) + \frac{4EJ_{i+1}}{l_{i+1}} \cdot \mu_1(\mu_{i+1})$$

$$r_{i(i+1)} = \frac{2EJ_{i+1}}{l_{i+1}} \cdot \mu_2(\lambda_{i+1})$$

Nếu ở hai đầu dầm liên tục có khớp tựa (tức gối chốt) thì :

$$r_{11} = \frac{3EJ_1}{\ell_1} \cdot \mu_5(\lambda_1) + \frac{4EJ_2}{\ell_2} \cdot \mu_1(\lambda_2)$$

$$r_{(n-1)(n-1)} = \frac{4EJ_{n-1}}{\ell_{n-1}} \cdot \mu_1(\lambda_{n-1}) + \frac{3EJ_n}{\ell_n} \cdot \mu_5(\lambda_n)$$

Số hạng tự do  $R_{ip}$  trong phương trình (3-4) phụ thuộc dạng tải trọng và có thể tính theo bảng 3-1.

Phương trình (3-4) còn gọi là phương trình ba góc xoay .

Khi nghiên cứu dao động riêng thì phương trình chính tắc của dầm liên tục có dạng :

$$r_{i(i-1)} \cdot Z_{i-1} + r_{ii} \cdot Z_i + r_{i(i+1)} \cdot Z_{i+1} = 0 \quad (3-5)$$

Cũng như trường hợp khung, sau khi lần lượt viết các phương trình (3-5) cho tất cả các liên kết phụ trên dầm, ta thiết lập điều kiện tồn tại các chuyển vị  $z_i$  và sẽ được phương trình tần số dưới dạng định thức của các hệ số phải bằng không.

Từ phương trình tần số ta xác định được các thông số trong đó có chứa các tần số dao động riêng.

Đối với các dầm liên tục đối xứng, khi tính dao động riêng ta có thể tách làm hai bài toán để tính : Bài toán xác định tần số ứng với dạng dao động đối xứng và bài toán xác định tần số ứng với dạng dao động phản đối xứng.

#### **Thí dụ 3-4 :**

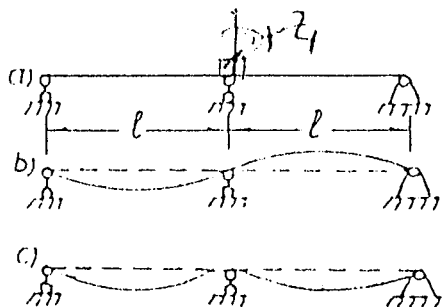
**Xác định các tần số dao động riêng của dầm liên tục hai nhịp có tiết diện không đổi, mang khối lượng phân bố đều. Hình 3-18**

Phương trình dao động riêng theo phương pháp chuyển vị :

$$r_{11} \cdot Z_1 = 0$$

$$\text{Hay } r_{11} \cdot Z_1 = \left( \frac{3EJ}{\ell} \cdot \mu_5(\lambda) + \frac{3EJ}{\ell} \cdot \mu_5(\lambda) \right) \cdot Z_1 = 0$$

Có thể xảy ra hai trường hợp :



Hình 3-18

**1- Nếu chuyển vị  $Z_1 \neq 0$ , ta có**

$$\mu_5(\lambda) = \frac{4\text{sh}\lambda \cdot \sin \lambda}{6\text{ch}\lambda \cdot \sin \lambda - \text{sh}\lambda \cdot \cos \lambda} = 0$$

Do đó  $\sin \lambda = 0$ , Vậy  $\lambda = i\pi$  ( $i=1, 2, \dots$ ). Ta có được :

$$\omega = \frac{i^2 \cdot \pi^2}{\ell^4} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Công thức trên xác định các tần số ứng với dạng dao động phản đối xứng (hình 3-18b) .

**2- Nếu chuyển vị  $z_1 = 0$**  (nghiệm tầm thường) ta được kết quả như trường hợp dầm có một đầu ngàm, một đầu khớp, tương ứng với dạng dao động đối xứng (hình 3-18c). Trong trường hợp này ta có thể dùng phương pháp lực để giải.

## CHƯƠNG 4

# DAO ĐỘNG CỦA KẾT CẤU DÀN VÀ KẾT CẤU VÒM

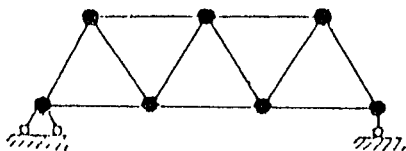
### 4-1 Dao động của kết cấu dàn

#### 1- Dao động riêng của dàn

Đặc điểm trong tính toán dao động của dàn là xét đến khối lượng phân bố của thanh (điều này được bỏ qua trong cách tính dàn của của cơ học kết cấu thông thường). Để giảm bớt phức tạp, khi tính dao động dàn ta coi khối lượng phân bố của các thanh được chia đều và tập trung tại các tiết điểm. Giả thiết các tiết điểm là khớp lý tưởng, không có ma sát vẫn được áp dụng.

Nếu dàn có  $C$  tiết điểm, như vậy sẽ có  $m$  khối lượng tập trung tại các tiết điểm đó. Gọi  $L_0$  là liên kết đơn nối với đất, ta sẽ có số bậc tự do của dàn khi tính dao động là :

$$W = 2C - L_0 \quad (4-1)$$



Hình 4-1

Kết cấu Dàn vẽ trên hình 4-1 có bậc tự do bằng :

$$W = 2 \times 7 - 3 = 11$$

Như vậy việc tính toán dao động riêng của dàn đã chuyển từ hệ có bậc tự do bằng vô cùng về sơ đồ bài toán hệ có bậc tự do hữu hạn ( hệ có một số bậc tự do ) có thể áp dụng các biểu thức tính tần số dao động riêng của hệ có một số bậc tự do cho kết cấu dàn.

Chúng ta nhắc lại phương trình tần số cần phải xác định các chuyển vị đơn vị  $\delta_{ik}$ , đối với kết cấu dầm, công việc này khá thuận lợi, nhưng với kết cấu dàn là công việc đòi hỏi nhiều công sức .

Để đỡ phức tạp, chúng ta tiến hành nghiên cứu tính dao động dàn hồi theo một hướng khác .

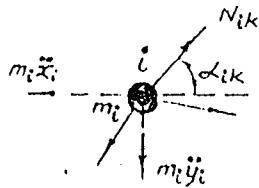
Xét một tiết điểm thứ  $i$ , có khối lượng tập trung  $m_i$ , giả sử có  $u$  thanh  $ik$  quy tụ tại  $i$ . Xét sự cân bằng động của tiết điểm  $i$ . Các lực tác dụng tại  $i$  gồm :

- Các lực quán tính theo phương thẳng đứng (  $-m_i \cdot \ddot{y}_i$  )
- Các lực quán tính theo phương ngang (  $-m_i \cdot \ddot{x}_i$  )
- Các nội lực động của các thanh quy tụ tại  $i$  (  $N_{ik}$  )

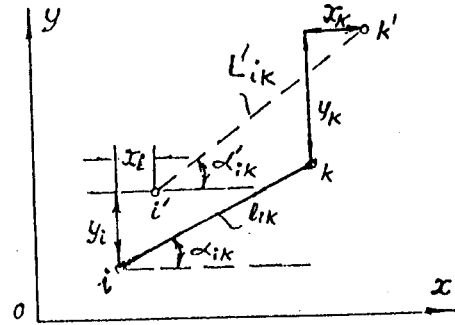
Viết phương trình cân bằng động của tiết điểm  $i$  (hình 4-2)

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= -m_i \cdot \ddot{x}_i + \sum_u N_{ik} \cdot \cos \alpha_{ik} = 0 \\ \sum Y &= -m_i \cdot \ddot{y}_i + \sum_u N_{ik} \cdot \sin \alpha_{ik} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$





Hình 4-2



Hình 4-3

Bây giờ xét mối quan hệ giữa các nội lực  $N_{ik}$  với chuyển vị tương ứng của chúng (Hình 4-3)

Ta đã có

$$N_{ik} = \frac{EF_{ik}}{l_{ik}} \cdot \Delta l_{ik} \quad (4-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_{ik} &= l'_{ik} - l_{ik} \\ l'_{ik} \cdot \cos \alpha'_{ik} &= l_{ik} \cdot \cos \alpha_{ik} + x_k - x_i \\ l'_{ik} \cdot \sin \alpha'_{ik} &= l_{ik} \cdot \sin \alpha_{ik} + y_k - y_i \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

Từ (4-4) ta suy ra được

$$(l'_{ik})^2 = (l_{ik} \cdot \cos \alpha_{ik} + x_k - x_i)^2 + (l_{ik} \cdot \sin \alpha_{ik} + y_k - y_i)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Hay: } (l'_{ik})^2 &= l_{ik}^2 + 2l_{ik} \cdot [(x_k - x_i) \cdot \cos \alpha_{ik} + (y_k - y_i) \cdot \sin \alpha_{ik}] \\ &\quad + (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \end{aligned} \quad (4-5)$$

Thay (4-5) vào (4-4) và bỏ qua các đại lượng vô cùng nhỏ bậc cao

$$\Delta l_{ik}^2 \quad ; \quad (x_k - x_i)^2 \quad ; \quad (y_k - y_i)^2$$

Ta nhận được :

$$\Delta l_{ik} = (x_k - x_i) \cdot \cos \alpha_{ik} + (y_k - y_i) \cdot \sin \alpha_{ik} \quad (4-6)$$

Thay (4-6) vào (4-3) có :

$$N_{ik} = \frac{EF_{ik}}{l_{ik}} [(x_k - x_i) \cdot \cos \alpha_{ik} + (y_k - y_i) \cdot \sin \alpha_{ik}] \quad (4-7)$$



$$N_i = \bar{N}_{i1}.Z_1 + \bar{N}_{i2}.Z_2 + \dots + \bar{N}_{in}.Z_n + N_{iP} \quad (4-12)$$

Trong đó :

Lực dọc trong thanh bất kỳ thứ  $i$  của dàn do lực  $Z_j = 1$  gây ra .

$N_{iP}$  : Lực dọc trong thanh thứ  $i$  bất kỳ của dàn do biên độ của các lực kích thích tác dụng tổng gây ra .

Nếu dùng cách tách tiết điểm – xét cân bằng động như đã làm ở phần tính dao động riêng ta cũng có được :

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= -m_i.\ddot{x}_i + \sum_u N_{ik}.\cos\alpha_{ik} + P_{ix}.\sin rt = 0 \\ \sum Y &= -m_i.\ddot{y}_i + \sum_u N_{ik}.\sin\alpha_{ik} + P_{iy}.\sin rt = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$

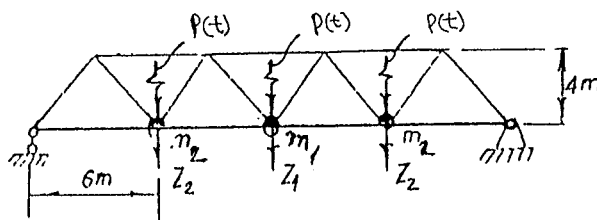
Thay (4-7) vào (4-13) có được :

$$\left. \begin{aligned} m_i.r^2.x_i + P_{ix}.\sin rt + \sum_u \frac{EF_{ik}}{\ell_{ik}} [(x_k - x_i).\cos\alpha_{ik} + (y_k - y_i).\sin\alpha_{ik}]\cos\alpha_{ik} &= 0 \\ m_i.r^2.y_i + P_{iy}.\sin rt + \sum_u \frac{EF_{ik}}{\ell_{ik}} [(x_k - x_i).\cos\alpha_{ik} + (y_k - y_i).\sin\alpha_{ik}]\sin\alpha_{ik} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

Trong một số trường hợp với các dàn đơn giản có thể tính gần đúng bằng cách bỏ qua chuyển vị ngang của các tiết điểm dàn .

#### Thí dụ 4-1 :

Xác định nội lực động các thanh của dàn chịu tải trọng như hình 4-4



Hình 4-4

Cho biết tần số của lực kích thích  $r = k.\sqrt{\frac{EF}{m}}$  ( $k$  : là hệ số thay đổi).

$$P(t) = 20\sin rt \text{ kN} ; m_1 = m_2 = m ; EF = hs$$

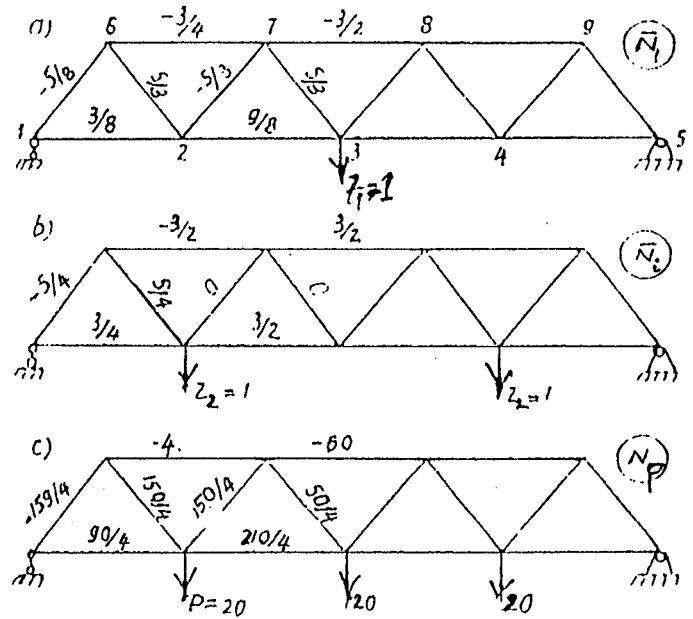
1- Xác định các chuyển vị đơn vị trong phương trình tần số và số hạng tự do trong hệ phương trình chính tắc để tìm lực quán tính (hình 4-5). Các công thức để xác định :

$$\delta_{ik} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_k}{EF} \cdot l$$

$$\delta_{ii} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_i}{EF} \cdot l$$

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_P}{EF} \cdot l$$

Để cho tiện lợi ta lập bảng tính (bảng 4-1)



Hình 4-5

Bảng 4-1

Thanh	$l$	$\bar{N}_1$	$\bar{N}_2$	$\bar{N}_P$	$\bar{N}_1^2 \cdot l$	$\bar{N}_2^2 \cdot l$	$\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2 \cdot l$	$\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_P \cdot l$	$\bar{N}_2 \cdot \bar{N}_P \cdot l$
1-2	6	0,375	0,750	22,50	0,841	3,375	1,688	50,63	101,25
2-3	6	1,125	1,500	52,50	7,594	13,500	10,125	354,39	472,50
6-7	6	-0,750	-1,500	-45,00	3,375	13,500	6,750	202,50	405,00
7-8	3	-1,500	-1,500	-60,00	6,750	6,750	6,750	270,00	270,00
1-6	5	-0,625	-1,250	-37,50	1,953	7,813	3,906	117,18	234,38
6-2	5	0,625	1,250	37,50	1,953	7,813	3,906	117,18	234,38
2-7	5	-0,625	0	-12,50	1,953	0	0	39,06	0
7-3	5	0,625	0	12,50	1,953	0	0	39,06	0
				$\Sigma =$	26,375	52,750	33,125	1190,0	1717,51

Kết quả tính được trong bảng 4-1 là mới tính cho nửa dầm. Do tính chất đối xứng của kết cấu và tải trọng, nên ta có

$$\delta_{11} = \frac{1}{EF} \times 2 \times 26,375 = \frac{52,75}{EF}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EF} \times 2 \times 52,750 = \frac{105,5}{EF}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EF} \times 2 \times 33,125 = \frac{66,25}{EF} = \delta_{21}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EF} \times 2 \times 1190 = \frac{2380}{EF}$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EF} \times 2 \times 1717,51 = \frac{3435}{EF}$$

## 2- Xác định các tần số dao động riêng :

Trong bài toán này lực động tác dụng đối xứng, nên ta chỉ cần tính tần số riêng ứng với các dạng dao động đối xứng.

Phương trình tần số có dạng :

$$\begin{vmatrix} (m_1 \cdot \delta_{11} - u) & \frac{m_2}{2} \cdot \delta_{12} \\ m_1 \cdot \delta_{21} & \left( \frac{m_2}{2} \cdot \delta_{22} - u \right) \end{vmatrix} = 0$$

Hay

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{52,75}{EF} \cdot m - u \right) & \frac{m}{2} \cdot \frac{66,25}{EF} \\ \frac{66,25}{EF} \cdot m & \left( \frac{m}{2} \cdot \frac{105,5}{EF} - u \right) \end{vmatrix} = 0$$

Giải ra ta có :

$$u_1 = 99,58 \cdot \frac{m}{EF}$$

$$u_2 = 5,92 \cdot \frac{m}{EF}$$

Do đó :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{u_1}} = \sqrt{\frac{EF}{99,58 \cdot m}} = 0,1002 \sqrt{\frac{EF}{m}} \text{ (s}^{-1}\text{)}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{u_2}} = \sqrt{\frac{EF}{5,92 \cdot m}} = 0,4105 \sqrt{\frac{EF}{m}} \text{ (s}^{-1}\text{)}$$

## 3- Xác định nội lực động

Hệ phương trình chính tắc có dạng

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^* \cdot Z_1 + \delta_{12} \cdot Z_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot Z_1 + \delta_{22}^* \cdot Z_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Trong đó

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m \cdot r^2} = \frac{1}{EF} \left( 52,75 - \frac{1}{k^2} \right)$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m \cdot r^2} = \frac{1}{EF} \left( 105,5 - \frac{1}{k^2} \right)$$

Thay các số liệu vừa tìm được vào hệ phương trình trên ta được :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( 52,75 - \frac{1}{k^2} \right) \cdot Z_1 + 66,25 \cdot Z_2 + 2380 = 0 \\ 66,25 \cdot Z_1 + \left( 105,5 - \frac{1}{k^2} \right) \cdot Z_2 + 3435 = 0 \end{array} \right.$$

Nghiệm của hệ phương trình :

$$Z_1 = \frac{7640 \cdot k^2 - 23520 \cdot k^4}{2 - 211 \cdot k^2 + 1176 \cdot k^4} \text{ kN}$$

$$Z_2 = \frac{3435 \cdot k^2 - 23520 \cdot k^4}{2 - 211 \cdot k^2 + 1176 \cdot k^4} \text{ kN}$$

Nếu cho k các giá trị khác nhau (Tức là cho tần số r các giá trị khác nhau) ta sẽ xác định được các trị số  $Z_1$ ,  $Z_2$  tương ứng (xem trong bảng 4-2)

Bảng 4-2

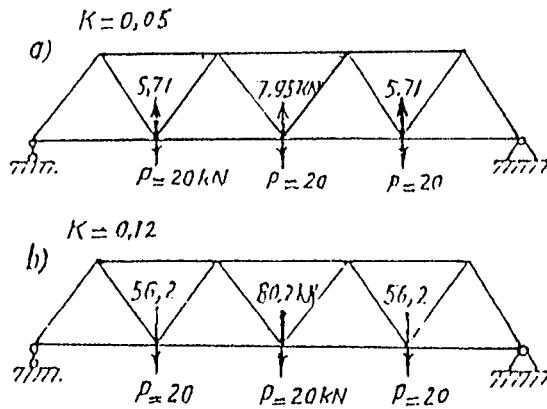
k	0,05	0,07	0,1002 C.H.1	0,12	0,37	0,4105 C.H.2	0,45	1,00	$\infty$
$Z_1(\text{kN})$	7,95	22,90	$\infty$	-80,20	-43,55	$\infty$	-0,03	-19,40	-20,00
$Z_2(\text{kN})$	5,71	16,40	$\infty$	-56,20	-6,01	$\infty$	-35,58	-20,75	-20,00

Ta có thể dùng biểu thức (4-12) hay dùng cách tính trực tiếp để xác định nội lực động trong các thanh của dàn ứng với các giá trị r khác nhau. Khi tính trực tiếp, cần chú ý đến chiều của các lực quán tính  $Z_i$ . Trên hình 4-6 biểu diễn các lực quán tính và các lực động tác dụng trên dàn tương ứng với hai trường hợp khi  $k = 0,05$  và  $k = 0,12$  (Theo kết quả bảng 4-2).

Bảng 4-3 ghi lại kết quả tính nội lực động các thanh trong dàn ứng với các giá trị k khác nhau.

Bảng 4-3

Thanh	Nội lực động ứng với các trị số k (kN)								
	k=0	k=0,05	k=0,07	k=0,1002	k=0,12	k=0,37	k=0,4105	k=0,45	k=1,00
1-2	22,5	29,76	43,29	Cộng	-49,72	1,67	Cộng	-4,41	-3,34
2-3	52,5	70,01	102,87	hưởng	-122,00	5,51	hưởng	-4,33	0,46
6-7	-4,5	-59,53	-80,78	lần 1	99,45	-3,34	lần 2	8,22	0,67
7-8	-60,0	-80,49	-118,96	-	114,60	4,31	-	-6,16	0,22
1-6	-37,5	-49,61	-72,31	-	82,87	-2,78	-	7,32	0,55
6-2	37,5	49,61	72,31	-	-82,87	2,78	-	-7,32	-0,55
2-7	-12,5	-17,47	-26,81	-	37,62	14,71	-	-12,48	-0,38
7-3	12,5	17,47	26,81	-	-37,62	-14,71	-	12,48	0,38



Hình 4-6

lực động các thanh trong dàn có trị số  $N_i = 0$ .

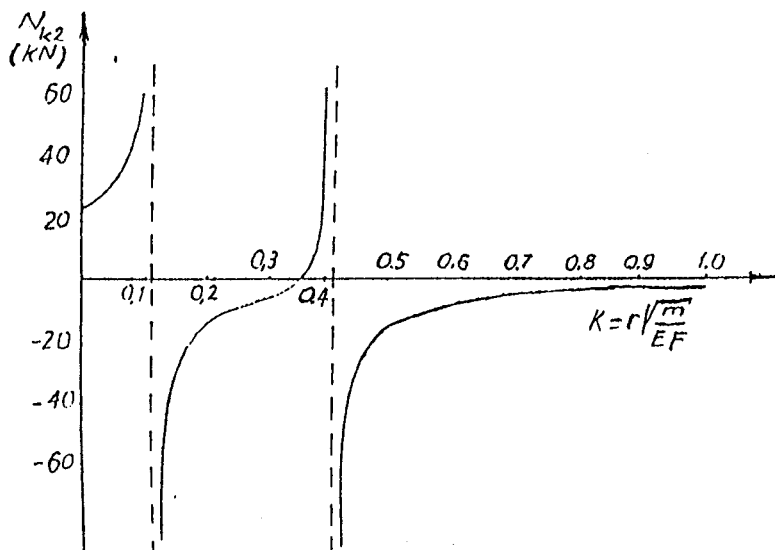
c- Từ bảng 4-2 ta thấy khi  $k > 0,1002$  thì các lực quán tính  $Z_1, Z_2$  đổi dấu, điều đó chứng tỏ pha của các lực quán tính cũng như pha của dao động lệch với pha của tải trọng kích thích lúc này các lực quán tính khi đạt tới giá trị biên độ sẽ ngược chiều với biên độ  $P$  của tải trọng động (xem hình 4-6b).

Trên hình (4-7) biểu diễn sự biến thiên của nội lực trong thanh 1-2 tương ứng với các giá trị  $k$  khác nhau theo các số liệu ghi trong bảng 4-3.

#### 4- Hệ số động

Hệ số động của nội lực trong các thanh được xác định theo công thức

$$K_d = \frac{N_d}{N_t}$$



Hình 4-7

Qua kết quả tìm được ở trên ta rút ra một vài nhận xét:

a- Khi  $k \rightarrow 0$  tức  $r \rightarrow 0$  Dao động cưỡng bức biến đổi chậm dần tới trạng thái tĩnh. Tới lúc đó  $Z_1 = Z_2 = 0$  nội lực lớn nhất trong các thanh tính theo tải trọng tĩnh  $P_{\max}^t = P = 20 \text{ kN}$ . Trong trường hợp này công thức (4-12) chỉ còn một số hạng là  $N_i = N_{ip}$

b- Khi  $k \rightarrow \infty$ , tức là khi  $r \rightarrow \infty$ :  $Z_1 = Z_2 = -20 \text{ kN}$ , lúc này biên độ các tải trọng động có trị số 20 kN, nên nội

Trong đó:

$N_d$ : Nội lực động trong các thanh được xác định theo công thức 4-12

$N_t$ : Nội lực do biên độ của tải trọng động tác dụng tĩnh gây ra, nội lực này chính là đại lượng  $N_{ip}$  trong công thức (4-12).

Ngoài ra người ta còn dùng ký hiệu  $1+\mu$  để biểu thị hệ số động.

Hệ số  $K_d$  của các thanh tương ứng với các giá trị  $k$  khác nhau ghi trong bảng 4-4

Bảng 4-4

Thanh	Hệ số của nội lực $K_d$							
	k=0	k=0,05	k=0,07	k=0,12	k=0,25	k=0,37	k=0,45	K=1,00
1-2	1	1,32	1,93	-2,21	-0,11	0,075	-0,200	-0,015
2-3	1	1,31	1,96	-2,32	-0,20	0,105	-0,025	-0,009
6-7	1	1,32	1,93	-2,21	-0,14	0,073	-0,200	-0,015
7-8	1	1,31	1,98	-2,41	-0,24	-0,210	0,100	-0,004
1-6	1	1,32	1,93	2,21	0,11	0,075	-0,195	-0,015
6-2	1	1,32	1,93	-2,21	-0,11	0,075	-0,195	-0,015
2-7	1	1,40	2,14	-3,00	0,55	-1,180	1,000	0,030
7-3	1	1,40	2,14	-3,00	0,55	-1,180	1,000	0,030

Chú thích : Trong thực tế thường hay gặp trường hợp  $r < \omega_1$  ( $k < 0,1002$ ) ; lúc này  $K_d = 1 + \mu > 1$  , nên nội lực động sẽ lớn hơn nội lực tĩnh. Phần lớn trong động lực học công trình, việc tính toán với các trường hợp  $r > \omega_1$  có tác dụng nghiên cứu lý thuyết nhiều hơn là tác dụng thực tiễn.

## 4-2 Tính dao động của kết cấu dàn bằng phương pháp gần đúng

Có nhiều phương pháp gần đúng để tính dao động của kết cấu dàn, ở đây chỉ giới thiệu hai phương pháp hay dùng : Phương pháp dầm tương đương và phương pháp thay thế khối lượng.

### 1- Phương pháp dầm tương đương

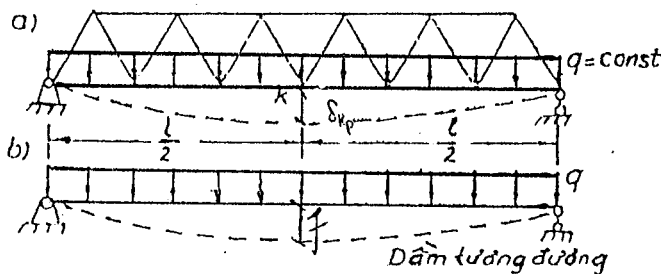
Nội dung của phương pháp là : Thay hệ dàn bằng một dầm đặc tiết diện không đổi, dầm này có độ võng lớn nhất giống như độ võng lớn nhất của dàn (do tĩnh tải). Hai hệ như vậy sẽ có tần số dao động tương đương. Như vậy trước khi tính tần số cơ bản của dàn, ta cần tìm độ cứng EJ của dầm tương đương.

– Độ võng tại điểm k của dàn được xác định theo :

$$\delta_{kP} = \sum \frac{\bar{N}_k \cdot N_P \cdot \ell}{EF} \quad (4-15)$$

– Độ võng tại điểm k của dầm tương đương

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot \ell^4}{EJ} \quad (4-16)$$



Hình 4-8 mô tả cách thay thế dàn bằng dầm tương đương

Hình 4-8



Cho  $\delta_{kP} = f$  từ đó rút ra được độ cứng của dầm

$$EJ = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot \ell^4}{\sum \frac{\bar{N}_k \cdot N_P}{EF}} \cdot \ell \quad (4-17)$$

Có độ cứng EJ dễ dàng tính được tần số dao động cơ bản  $\omega_1$  của dầm.

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{\ell^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (4-18)$$

Thay (4-17) vào (4-18) có được :

$$\omega_1 = \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot g}{384 \cdot \delta_{kP}}}$$

Hay

$$\omega_1 = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{g}{\sum \frac{\bar{N}_k \cdot N_P}{EF} \cdot \ell}} \quad (4-19)$$

$g$  : Gia tốc trọng trường

Phương pháp dầm tương đương cho kết quả khá chính xác đối với các dầm giản đơn có biên song song.

#### Thí dụ 4-2 :

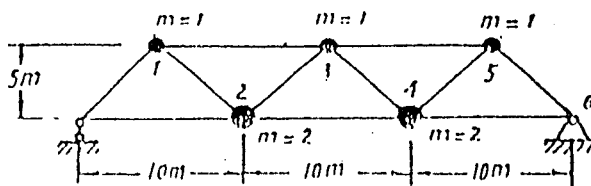
Xác định tần số dao động cơ bản của dầm vẽ trên hình 4-9. Cho biết  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ ; các thanh biên có  $\ell/F = 5 \text{ cm}^{-1}$ ; các thanh xiên có  $\ell/F = 10 \text{ cm}^{-1}$ .

Lấy điểm 3 (giữa dầm làm điểm đặc trưng ta có):

$$\delta_{3P} = \sum \frac{\bar{N}_3 \cdot N_P}{EF} \cdot \ell = 110,3 \cdot g \cdot 10^{-6}$$

Vậy có

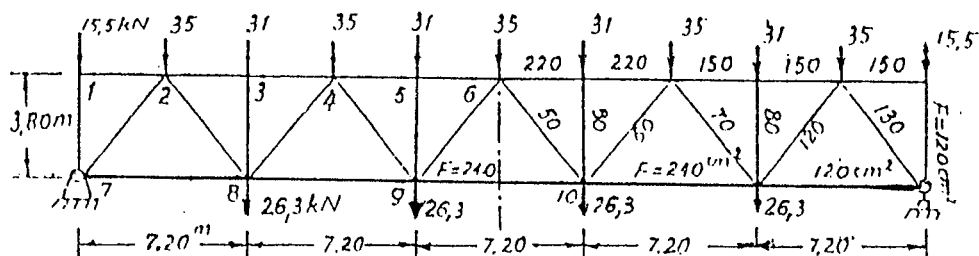
$$\omega_1 = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot 10^6}{110,3 \cdot g}} = 107,5 \quad (\text{s}^{-1})$$



Hình 4-9

**Thí dụ 4-3 :**

Xác định tần số cơ bản của dàn chịu trọng lượng bản thân như hình 4-10. Cho  $E = 2,15 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình 4-10

Vì dàn đối xứng, tải trọng tác dụng đối xứng nên tính trên nửa hệ sau nhân đôi (chiều dài thanh 9-10 lấy bằng một nửa) các thanh có giá trị nội lực  $N_p$  hay  $\bar{N}_k$  bằng 0 thì không ghi trong bảng 4-5. Ta tính được

$$\delta_{kp} = \frac{1}{E} \cdot \sum \frac{\bar{N}_k \cdot N_p}{F} \cdot \ell = \frac{2 \cdot 13279}{2,15 \times 10^4} = 1,232 \text{ (cm)}$$

Và có được :

$$\omega_1 = 1,13 \sqrt{\frac{g}{\delta_{kp}}} = 1,13 \sqrt{\frac{9,81}{1,232}} = 31,9 \text{ (s}^{-1}\text{)}$$

Bảng 4-5

Thanh	$\frac{\ell}{F}$	$N_p$	$N_k$	$\bar{N}_k \cdot N_p \cdot \frac{\ell}{F}$	$\bar{N}_k^2 \cdot \frac{\ell}{F}$
2-4	4,80	-350,0	-0,945	1590	4,29
4-6	3,27	-525,0	-1,890	3250	11,68
2-7	4,13	-313,0	-0,760	1055	2,56
2-8	4,80	241,0	0,760	889	2,77
4-8	7,20	-171,5	-0,760	956	4,16
4-9	9,60	105,0	0,760	769	5,54
6-9	11,55	-35,0	-0,76	311	6,66
7-8	6,00	196,5	0,173	558	1,34
8-9	3,00	459,0	1,120	1956	6,05
9-10	1,50	546,0	2,370	1945	8,43
				$\Sigma=13279$	53,48

## 2- Phương pháp thay thế khối lượng

Ở phương pháp được coi là chính xác ta đã đưa khối lượng phân bố của các thanh tập trung về các tiết điểm. Trong phương pháp gần đúng này ta sẽ đưa các khối lượng tập trung này về các tiết điểm lựa chọn mà có thể đặc trưng cho dao động của dàn.

### Thí dụ 4-4 :

Tính tần số cơ bản của dàn trên hình 4-10 khi thay khối lượng thay thế bằng một khối lượng ở giữa dàn.

Khối lượng toàn dàn được chia theo quy ước : Một nửa tập trung ở hai gối còn một nửa tập trung ở tiết điểm giữa dàn khối lượng này có giá trị :

$$m = \frac{1}{g} \cdot (15,5 + 2 \times 35 + 2 \times 31 + \frac{1}{2} \cdot 35 + 2 \times 26,3) = \frac{217,6}{981} = 0,2218 \quad \left( \frac{\text{kNs}^2}{\text{cm}} \right)$$

Áp dụng công thức xác định tần số trong bài toán có một bậc tự do, ta có :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta_{11}}}$$

Trong đó :

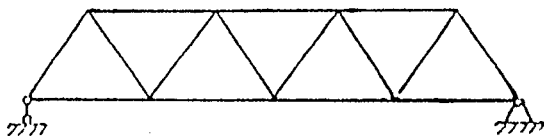
$\delta_{11}$  : là độ võng ở giữa dàn do  $P = 1$  gây ra. Các số liệu tính  $\delta_{11}$  ghi trong cột cuối của bảng 4-5. Kết quả :

$$\delta_{11} = \frac{107}{2 \times 15 \times 10^4} = 49,8 \cdot 10^{-4} \quad (\text{cm/kN})$$

Vậy

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{10^4}{0,2218 \times 49,8}} = 30,3 \quad (\text{s}^{-1})$$

Kết quả xấp xỉ với trị số tìm được theo phương pháp dầm tương đương của thí dụ 4-3.



Hình 4-11

### Thí dụ 4-5 :

Xác định tần số dao động cơ bản của dàn cho trên hình 4-11. Cho biết mỗi thanh trong dàn đều có khối lượng bằng  $m$ , ta nghiên cứu một số cách thay thế khối lượng khác nhau

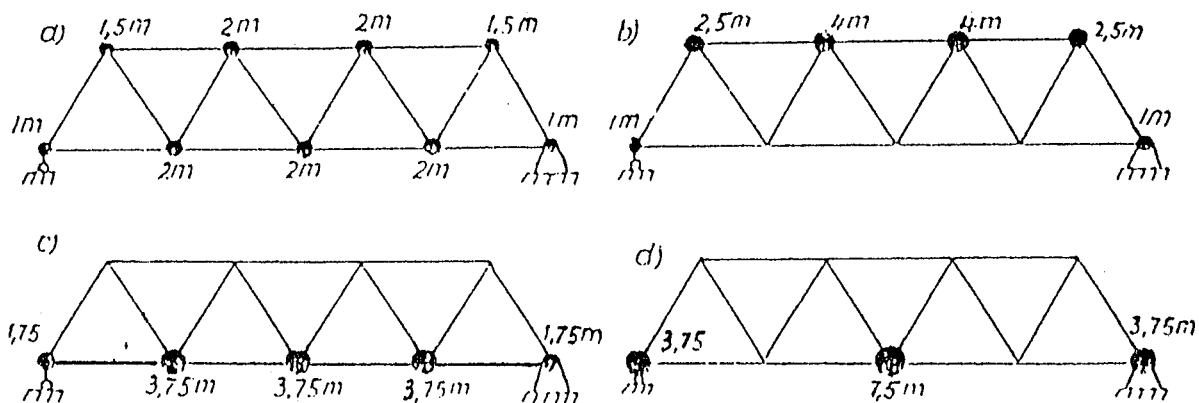
1- Chuyển tất cả các khối lượng vào tất cả các tiết

điểm (Hình 4-12a) như trong phương pháp chính xác

2- Tập trung các khối lượng về các tiết điểm thuộc biên trên như hình 4-12b

3- Tập trung các khối lượng về các tiết điểm thuộc biên dưới như hình 4-12c

4- Tập trung một nửa khối lượng của toàn dàn đặt tại giữa dàn như hình 4-12d



Hình 4-12

Lần lượt xác định các tần số cơ bản theo cách tính đã biết đối với các sơ đồ trên, ta được kết quả :

Sơ đồ 4-12a  $\omega_1 = 0,1040 \cdot \frac{EF}{m}$

Sơ đồ 4-12b  $\omega_1 = 0,1082 \cdot \frac{EF}{m}$

Sơ đồ 4-12c  $\omega_1 = 0,1002 \cdot \frac{EF}{m}$

Sơ đồ 4-12d  $\omega_1 = 0,0973 \cdot \frac{EF}{m}$

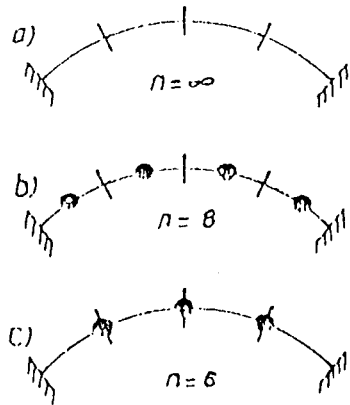
Qua những kết quả này ta thấy : Khi chỉ cần xác định tần số  $\omega_1$ , ta có thể thay thế các khối lượng bằng một khối lượng tập trung  $m$  ở giữa dầm là đủ. Còn trong trường hợp cần xác định các tần số cao hơn mới cần phải thay thế các khối lượng bằng số khối lượng nhiều hơn

### 4-3 Dao động của kết cấu vòm

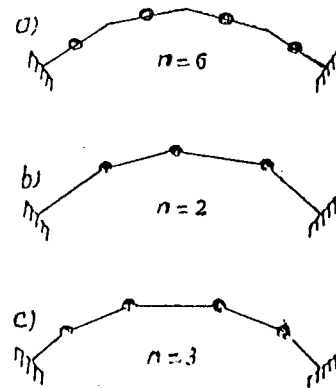
#### 1- Một số khái niệm

Vòm là một thanh cong có tiết diện thay đổi hoặc không đổi khối lượng bản thân của vòm phân bố trên chiều dài vòm. Như vậy vòm là hệ có vô số bậc tự do. Để việc tính

toán không quá phức tạp ta có thể quan niệm tính vòm theo các sơ đồ tính trên hình 4-13 và 4-14



Hình 4-13



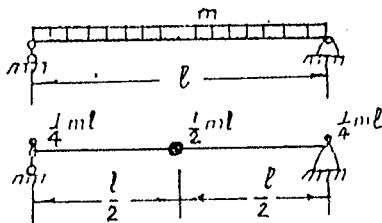
Hình 4-14

Như vậy số bậc tự do của kết cấu phụ thuộc sơ đồ khối lượng và dạng trục được chọn. Bài toán tính dao động của vòm sau khi chọn theo hình 4-13 hoặc 4-14 sẽ trở lại bài toán tính dao động của hệ có một số bậc tự do.

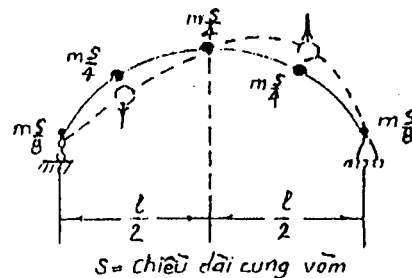
## 2- Tính dao động riêng của kết cấu vòm

Độ chính xác khi tính dao động của vòm phụ thuộc vào số khối lượng tập trung lựa chọn và vị trí của các khối lượng đó. Để đơn giản nhưng vẫn phải đảm bảo yêu cầu cần thiết. (ví dụ tìm tần số dao động cơ bản) Cần căn cứ vào dạng dao động tương ứng với tần số cơ bản để chọn vị trí các khối lượng tập trung thay thế.

Hình 4-15 và 4-16 cho thấy cách lựa chọn vị trí khối lượng ứng với tần số cơ bản  $\omega_1$  của dầm đơn và vòm không khớp và hai khớp.



Hình 4-15



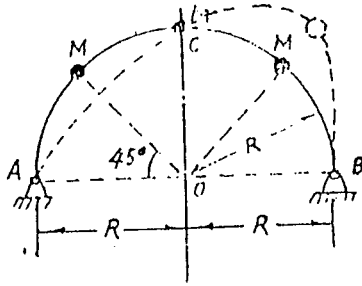
Hình 4-16

**Chú ý :** Các khối lượng tập trung ở gối dầm đơn hay chân vòm không có ảnh hưởng đến dao động của kết cấu :

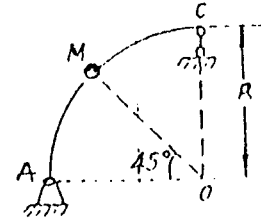
Sau đây là một số thí dụ áp dụng.

**Thí dụ 4-6:**

Tính tần số cơ bản của vòm tròn hai khớp trên hình 4-17



Hình 4-17



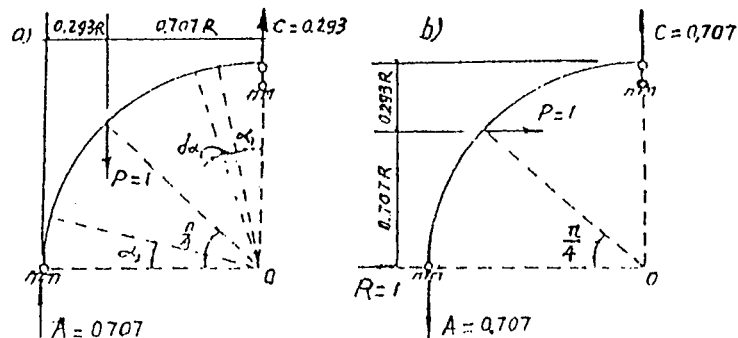
Hình 4-18

Với vòm hai khớp khi dao động với tần số cơ bản  $\omega_1$  vòm sẽ có biến dạng phản đối xứng. Do kết cấu ở dạng đối xứng vì vậy ta sẽ tính vòm theo sơ đồ nửa hệ như hình 4-18.

Kết cấu có hai bậc tự do. Nên phương trình tần số có dạng

$$\begin{vmatrix} (M.\delta_{11} - u) & M.\delta_{12} \\ M.\delta_{21} & (M.\delta_{22} - u) \end{vmatrix} = 0$$

Để tính các hệ số (các chuyển vị đơn vị) của định thức ta lập hai sơ đồ trên hình 4-19a, b



Hình 4-19

Thực hiện các phép tính ta nhận được :

$$\begin{aligned}
 \delta_{11} &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{EJ} \cdot (0,293 \cdot R \cdot \sin \alpha_1)^2 \cdot R d\alpha_1 + \int_0^{\pi/4} \frac{1}{EJ} \cdot [0,707(1 - \cos \alpha_2) \cdot R]^2 \cdot R d\alpha_2 \\
 &= 0,0858 \cdot \frac{R^3}{EJ} \cdot \int_0^{\pi/4} \sin^2 \alpha_1 d\alpha_1 + \frac{0,5R^3}{EJ} \cdot \int_0^{\pi/4} (1 - \cos \alpha_2)^2 d\alpha_2 = \frac{0,01925}{EJ} \cdot R^3 \\
 \delta_{22} &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{EJ} \cdot (0,707 \cdot R \cdot \sin \alpha_1)^2 \cdot R d\alpha_1 + \int_0^{\pi/4} \frac{1}{EJ} \cdot [R \cdot \sin \alpha_2 - 0,707 \cdot R(1 - \cos \alpha_2)]^2 \cdot R d\alpha_2 \\
 &= \frac{0,5R^3}{EJ} \cdot \int_0^{\pi/4} \sin^2 \alpha_1 d\alpha_1 + \frac{R^3}{EJ} \cdot \int_0^{\pi/4} \sin^2 \alpha_2 d\alpha_2 + \frac{0,5R^3}{EJ} \cdot \int_0^{\pi/4} (1 - \cos \alpha_2)^2 d\alpha_2 \\
 &\quad - 2 \cdot \frac{0,707 \cdot R^3}{EJ} \cdot \int_0^{\pi/4} (1 - \cos \alpha_2) \cdot \sin \alpha_2 d\alpha_2 = 0,1604 \cdot \frac{R^3}{EJ} \\
 \delta_{12} &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{EJ} \cdot 0,707 \times 0,293 \cdot \sin^2 \alpha_1 \cdot R^3 d\alpha_1 + \int_0^{\pi/4} \frac{1}{EJ} \cdot [R \cdot \sin \alpha_2 - 0,707 \cdot R(1 - \cos \alpha_2)] \\
 &\quad \times 0,707 \cdot R(1 - \cos \alpha_2) \cdot R d\alpha_2 \\
 &= \frac{1}{EJ} \cdot 0,2072 \cdot R^3 \cdot \int_0^{\pi/4} \sin^2 \alpha_1 d\alpha_1 + \frac{0,707}{EJ} \cdot R^3 \cdot \int_0^{\pi/4} \sin \alpha_2 (1 - \cos \alpha_2) d\alpha_2 \\
 &\quad - \frac{0,5}{EJ} \cdot R^3 \cdot \int_0^{\pi/4} (1 - \cos \alpha_2)^2 d\alpha_2 = 0,0530 \cdot \frac{R^3}{EJ}
 \end{aligned}$$

Thay các trị số vừa tìm được vào phương trình tần số ta có

$$\begin{vmatrix} (0,0193 - \lambda) & 0,0530 \\ 0,0530 & (0,1604 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Trong đó

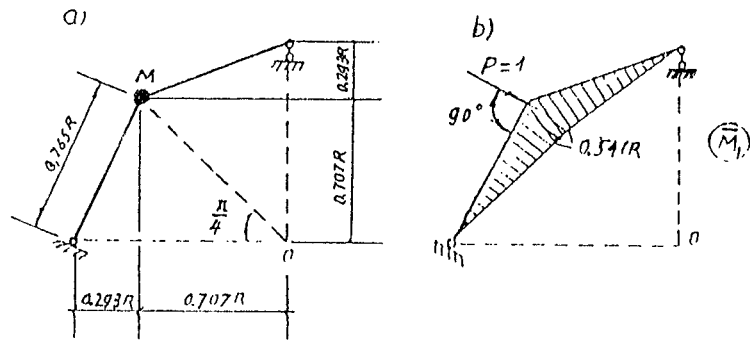
$$\lambda = \frac{EJ}{R^2 \cdot M} \cdot u = \frac{EJ}{R^2 \cdot M \cdot \omega^2}$$

Phương trình tần số cho hai nghiệm, trong đó nghiệm lớn có trị số  $\lambda_{\max} = 0,178$ .

Vậy

$$\omega_{\min} = \omega_1 = \sqrt{\frac{EJ}{\lambda_{\max} \cdot M \cdot R^3}} = 2,73 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{M \cdot R^3}} \quad (a)$$

Sau đây ta tìm gần đúng tần số  $\omega_1$  theo sơ đồ trục gãy khúc như trên hình 4-20a



Hình 4-20

Lúc này hệ chỉ có một bậc tự do và công thức xác định tần số có dạng .

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{M \cdot \delta_{11}}}$$

Để xác định chuyển vị đơn vị  $\delta_{11}$  ta vẽ biểu đồ  $\bar{M}_1$  như hình 4-20b và áp dụng cách nhân biểu đồ

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 = \frac{2 \times 0,765 \cdot R \times 0,541 \cdot R}{2EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,541 \cdot R = \frac{1}{EJ} \cdot 0,149R$$

Vậy

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{M \cdot \frac{1}{EJ} \cdot 0,149 \cdot R^3}} = 2,59 \sqrt{\frac{EJ}{M \cdot R^3}} \quad (b)$$

So sánh (b) với (a) ta thấy những kết quả này chênh lệch nhau 9%. Nếu tăng số cạnh của trục gấp khúc thì kết quả tính chính xác hơn. Song nếu chỉ cần tìm  $\omega_1$  thì vẫn có thể dùng kết quả trên .

#### Thí dụ 4-7 :

**Xác định tần số dao động riêng của thanh gẫy khúc cho trên hình 4-21**

Hệ có hai bậc tự do. Dựa vào phương chuyển vị của các khối lượng, ta có thể tính được chuyển vị đơn vị  $\delta_{ik}$  trong phương trình tần số. Từ hình 4-21 ta thấy khối lượng  $m_B$  chuyển vị theo phương 1-1 thẳng góc với thanh AB, còn khối lượng  $m_C$  chuyển vị theo phương chưa biết, nếu tính gần đúng, ta có thể coi khối lượng  $m_C$  chuyển vị thẳng góc với đoạn BC. Muốn tính chính xác hơn, ta phải kể đến thành phần chuyển vị của  $m_C$  theo phương dọc theo đoạn BC. Sau đây ta sẽ tính theo hai cách quan niệm này.

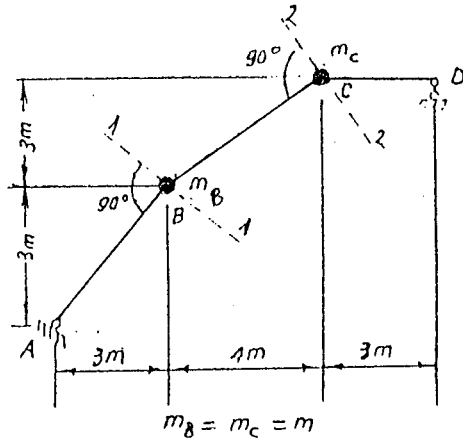
**1- Coi khối lượng  $m_C$  chuyển vị thẳng góc với đoạn BC (Phương 2-2) phương trình tần số có dạng**

$$\begin{vmatrix} (m \cdot \delta_{11} - u) & m \cdot \delta_{12} \\ m \cdot \delta_{21} & (m \cdot \delta_{22} - u) \end{vmatrix} = 0$$

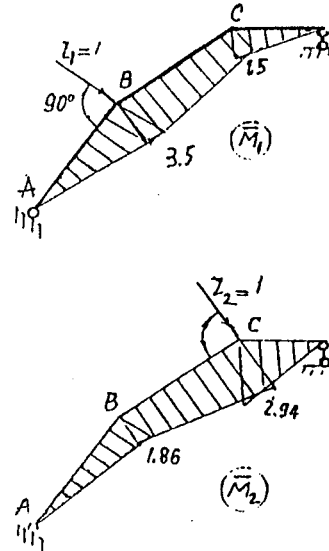


Các biểu đồ moment đơn vị để xác định các chuyển vị đơn vị có dạng như hình 4-22. Sau khi áp dụng cách nhân biểu đồ, ta dễ dàng xác định được

$$EJ.\delta_{11} = 55,58 \quad ; \quad EJ.\delta_{22} = 43,70 \quad ; \quad EJ.\delta_{12} = EJ.\delta_{21} = 44,36$$



Hình 4-21



Hình 4-22

Thay những kết quả vừa tìm được vào phương trình tần số, ta có

$$\begin{vmatrix} (55,58 - \lambda) & 44,36 \\ 44,36 & (43,70 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Trong đó :

$$\lambda = \frac{EJ}{m} \cdot u = \frac{EJ}{m \cdot \omega^2}$$

Kết quả

$$\lambda_1 = 94,40 \quad ; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{EJ}{\lambda_1 \cdot m}} = 0,104 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (s^{-1})$$

$$\lambda_2 = 4,88 \quad ; \quad \omega_2 = 0,453 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (s^{-1})$$

**2- Coi chuyển vị của  $m_C$  có phương chưa xác định.** Trong trường hợp này ta phân tích chuyển vị của  $m_C$  thành hai thành phần theo 2 phương bất kỳ tùy ý chọn sao cho việc tính toán được đơn giản. Ở đây ta phân tích chuyển vị của  $m_C$  theo phương vuông góc với đoạn BC và theo phương dọc theo đoạn BC.

Lúc này bài toán vẫn chỉ ở hai bậc tự do, nhưng vì có ba thành phần chuyển vị tương ứng với ba lực quán tính nên phương trình tần số có dạng :

$$\begin{vmatrix} (m.\delta_{11} - u) & m.\delta_{12} & m.\delta_{13} \\ m.\delta_{21} & (m.\delta_{22} - u) & m.\delta_{23} \\ m.\delta_{31} & m.\delta_{32} & (m.\delta_{33} - u) \end{vmatrix} = 0$$

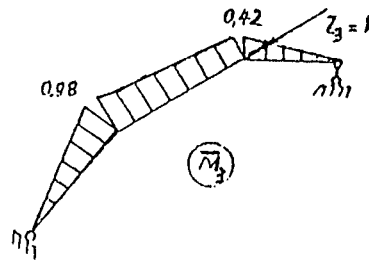
Các chuyển vị đơn vị tìm được ở trên vẫn dùng cho trường hợp này. Bây giờ ta chỉ cần tính thêm một số chuyển vị đơn vị. Từ hình 4-22 và 4-23 ta có

$$EJ.\delta_{33} = 4,36$$

$$EJ.\delta_{13} = -15,53$$

$$EJ.\delta_{23} = -12,38$$

Thay những số liệu trên vào phương trình tần số, ta có :



Hình 4-23

$$\begin{vmatrix} (55,58 - \lambda) & 44,36 & -15,53 \\ 44,36 & (43,70 - \lambda) & -12,38 \\ -15,53 & -12,38 & (4,36 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Trong đó :

$$\lambda = \frac{EJ}{m} \cdot u = \frac{EJ}{m \cdot \omega^2}$$

Kết quả

$$\lambda_1 = 97,55 \quad ; \quad \lambda_2 = 6,19 \quad ; \quad \lambda_3 = 0$$

Vậy

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{97,55}} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 0,101 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (s^{-1})$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{6,19}} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 0,402 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (s^{-1})$$

So sánh với kết quả tìm được trong trường hợp trên ta thấy các giá trị của  $\omega_1$  sai không đáng kể, còn các giá trị của  $\omega_2$  sai kém nhau 13%. Qua hai cách tính trên, ta rút ra nhận xét :

Trong trường hợp vòm thoải, khi tính tần số dao động riêng thứ nhất  $\omega_1$  ta có thể coi phương chuyển vị của các khối lượng trên vòm vuông góc với trục vòm.

#### 4-3 Tính dao động cưỡng bức của kết cấu vòm

Khi tính dao động cưỡng bức của vòm, ta cũng dùng sơ đồ khối lượng thay thế như khi tính dao động riêng. Nhiệm vụ cơ bản ở đây là xác định các lực quán tính do lực

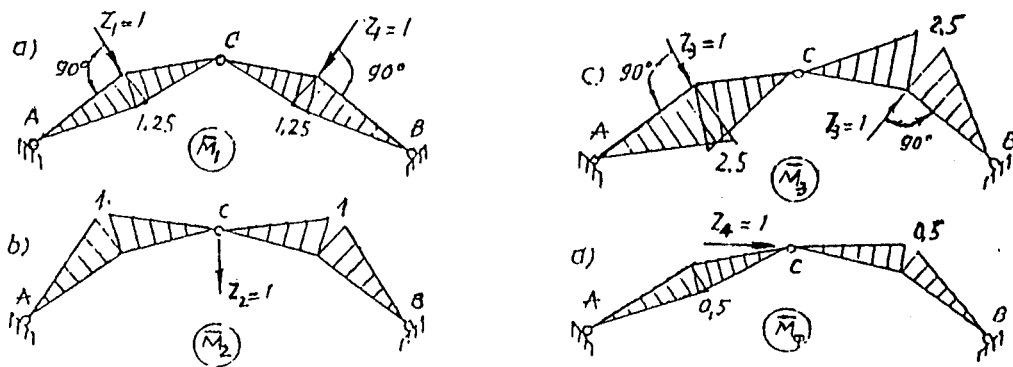


(Phương 1-1 và phương 2-2), còn khối lượng giữa có phương dao động chưa biết, nên ta phân tích thành hai thành phần theo phương đứng và phương ngang.

### a) Dao động đối xứng

Lúc này các cặp lực quán tính sẽ đối xứng và các biên độ đơn vị có dạng như hình 4-25a, b. Phương trình tần số có dạng :

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{m}{2} \cdot \delta_{11} - u \right) & m \cdot \delta_{12} \\ \frac{m}{2} \cdot \delta_{21} & (m \cdot \delta_{22} - u) \end{vmatrix} = 0$$



Hình 4-25

Trong đó các hệ số  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$  và  $\delta_{12}$  được xác định theo các biểu đồ  $\bar{M}_1$  và  $\bar{M}_2$ .

Kết quả

$$EJ \cdot \delta_{11} = 9,5 \quad ; \quad EJ \cdot \delta_{22} = 6,08 \quad ; \quad EJ \cdot \delta_{12} = 7,6 \quad ; \quad EJ \cdot \delta_{21} = 7,6$$

Đặt 
$$\lambda = \frac{m}{EJ} \cdot u = \frac{m}{EJ \cdot \omega^2}$$

Và thay các trị số vừa tìm được vào phương trình tần số ta có

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{1}{2} \cdot 9,5 - \lambda \right) & -7,6 \\ -\frac{1}{2} \cdot 7,6 & (6,08 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Phương trình này có nghiệm kép. Ta thấy khi  $\lambda = 0$  thì hàng dưới của định thức tỷ lệ với hàng trên, do sự tỷ lệ của tung độ  $\bar{M}_1$  và  $\bar{M}_2$ . Do đó phương trình thỏa mãn với một nghiệm  $\lambda = 0$ . Nghiệm còn lại có giá trị  $\lambda = 10,83$

Suy ra tần số ứng với dao động đối xứng.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{10,83}} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 0,304 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (s^{-1})$$

### b- Dao động phản đối xứng :

Các cặp lực quán tính phản đối xứng và các biểu đồ đơn vị  $\bar{M}_3, \bar{M}_4$  vẽ trên hình 4-25c, d. Từ các biểu đồ đơn vị ta xác định được :

$$EJ.\delta_{33} = 38 \quad ; \quad EJ.\delta_{44} = 1,52 \quad ; \quad EJ.\delta_{34} = EJ.\delta_{43} = 7,60$$

Phương trình tần số :

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{1}{2}.38 - \lambda \right) & 7,6 \\ \frac{1}{2}.7,6 & (1,52 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Trong trường hợp này các tung độ của biểu đồ  $\bar{M}_3$  cũng tỷ lệ với các tung độ của biểu đồ  $\bar{M}_4$  nên cũng lý luận tương tự như trên, ta thấy phương trình trên có 1 nghiệm  $\lambda = 0$  ; nghiệm còn lại có giá trị  $\lambda = 20,52$  .

$$\text{Suy ra} \quad \omega = \frac{1}{20,52} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 0,221 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (\text{s}^{-1})$$

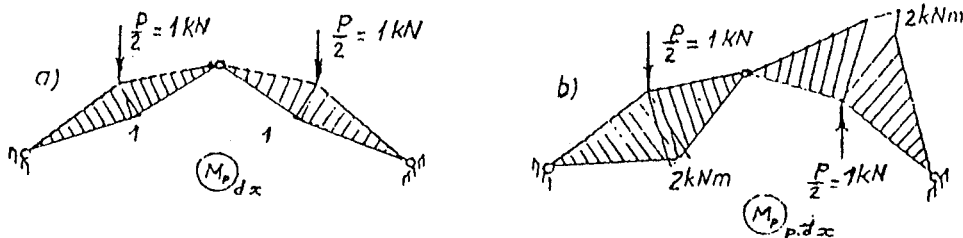
Đối chiếu kết quả vừa tìm được trong hai trường hợp trên ta thấy dao động có dạng phản đối xứng là dao động ứng với tần số cơ bản  $\omega_1$  . Do đó, lực kích thích tác dụng phản đối xứng sẽ nguy hiểm hơn, vì hiện tượng cộng hưởng thứ nhất không xảy ra đối với tải trọng đối xứng.

## 2- Dao động cưỡng bức

Phân tích tải trọng thành hai nhóm : Nhóm tải trọng đối xứng (hình 4-26a) phát sinh ra trong hệ các lực quán tính đối xứng, nhóm tải trọng phản đối xứng (hình 4-26b) phát sinh ra trong hệ các lực quán tính phản đối xứng (hình 4-25c, d).

### a- Dao động đối xứng

Biểu đồ moment do tải trọng đối xứng gây ra vẽ trên hình 4-26a .



Hình 4-26

Từ các biểu đồ này và các biểu đồ  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$  ta xác định được

$$EJ.\Delta_{1P} = 7,60 \quad ; \quad EJ.\Delta_{2P} = -6,08$$

Các hệ số của phương trình chính tắc

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{2}{m.r^2} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( 9,5 - \frac{2}{k^2} \right)$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m.r^2} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( 6,08 - \frac{1}{k^2} \right)$$

Trong đó :

$$k = r \sqrt{\frac{m}{EJ}}$$

Vậy phương trình chính tắc để xác định biên độ các lực quán tính đối xứng có dạng

$$\left( 9,5 - \frac{2}{k^2} \right) \cdot Z_1 - 7,60 \cdot Z_2 + 7,60 = 0$$

$$- 7,60 \cdot Z_1 + \left( 6,08 - \frac{1}{k^2} \right) \cdot Z_2 - 6,08 = 0$$

Giải hệ phương trình trên ta sẽ xác định được các biên độ  $Z_1, Z_2$  của lực quán tính. Các biên độ  $Z_1, Z_2$  phụ thuộc vào  $k$  tức là phụ thuộc tần số  $r$  của lực kích thích .

#### **b- Dao động phản đối xứng**

Biểu đồ moment do tải trọng phản đối xứng gây ra có dạng như trên hình 4-26b. Trong trường hợp này ta có :

$$EJ.\Delta_{3P} = 30,40 \quad ; \quad EJ.\Delta_{4P} = 6,08$$

$$\delta_{33}^* = \delta_{33} - \frac{2}{m.r^2} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( 38 - \frac{2}{k^2} \right)$$

$$\delta_{44}^* = \delta_{44} - \frac{1}{m.r^2} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( 1,52 - \frac{1}{k^2} \right)$$

Hệ phương trình chính tắc :

$$\left( 38 - \frac{2}{k^2} \right) \cdot Z_3 + 7,60 \cdot Z_4 + 30,4 = 0$$

$$7,60 \cdot Z_3 + \left( 1,52 - \frac{1}{k^2} \right) \cdot Z_4 + 6,08 = 0$$

Giải hệ phương trình trên ta sẽ xác định được các biên độ  $Z_3, Z_4$  của các lực quán tính phản đối xứng. Các biểu đồ này phụ thuộc vào  $k$ , tức là phụ thuộc tần số  $r$  của lực kích thích

Trong bảng 4-6 cho các giá trị biên độ  $Z_1$  của các lực quán tính tương ứng với các giá trị  $k$  khác nhau

Bảng 4-6

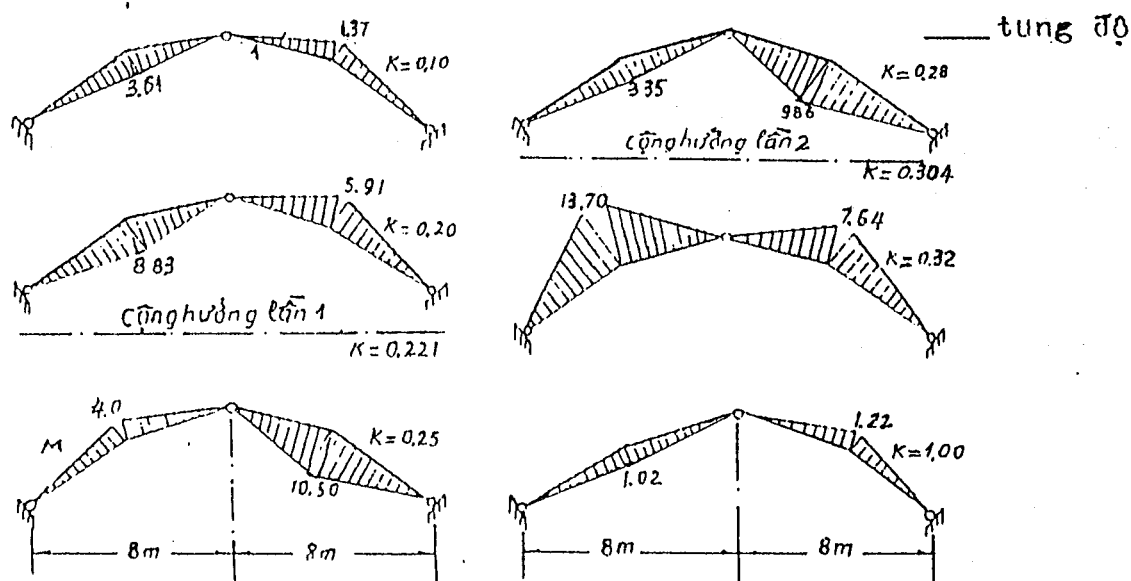
k	0,10	0,20	0,221 C.H.1	0,25	0,28	0,304 C.H.2	0,32	1,00
$Z_1$	0,04	0,22	$\infty$	0,73	1,97	$\infty$	1,10	4,35
$Z_2$	-0,07	-0,18	$\infty$	-1,17	-3,15	$\infty$	6,55	5,32
$Z_3$	0,19	1,97	$\infty$	-3,56	-1,95	$\infty$	-2,33	-0,81
$Z_4$	0,08	0,90	$\infty$	-1,34	-0,74	$\infty$	1,58	-0,16

### c- Biểu đồ moment động

Biểu đồ moment động được xác định theo công thức sau :

$$M_d = \bar{M}_1.Z_1 + \bar{M}_2.Z_2 + \bar{M}_3.Z_3 + \bar{M}_4.Z_4 + M_P^{dx} + M_P^{P.dx}$$

Trên hình 4-27 vẽ biểu đồ moment động ứng với các giá trị  $k$  khác nhau

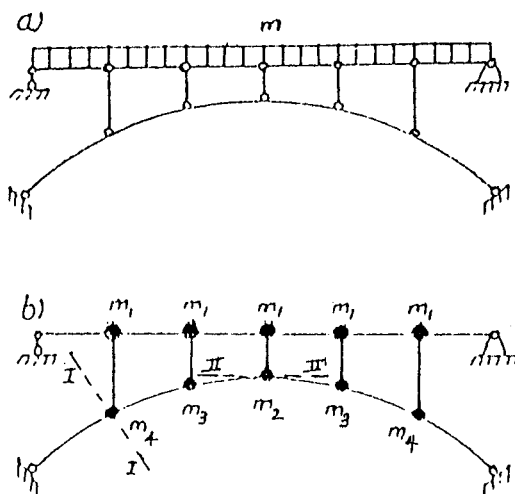


Hình 4-27

**Nhận xét :** Khi gần cộng hưởng ( gần bằng  $\omega_1$  ) các tung độ của biên độ  $M_d$  tăng lên rất nhanh.

Sau khi vượt quá 1 lần cộng hưởng, biểu đồ  $M_d$  đổi dấu. Điều đó chứng tỏ rằng có sự lệch pha giữa dao động cưỡng bức của vòm và lực kích thích.

#### 4-4 Dao động của cầu vòm khi có kể đến ảnh hưởng của trọng lượng mặt cầu



Hình 4-28

Trong cầu vòm, đặc biệt là cầu vòm BTCT, trọng lượng của hệ mặt cầu có khi lớn hơn trọng lượng bản thân của vòm. Đối với những trường hợp này khi tính dao động của vòm ta không thể bỏ qua ảnh hưởng của trọng lượng mặt cầu.

Giả sử xem xét vòm cho trên hình 4-28a. Sơ đồ tính vòm có dạng như trên hình 4-28b. Nếu kể đến các khối lượng  $m_1$  của bộ phận mặt cầu thì số bậc tự do của hệ không tăng lên mà vẫn bằng số bậc tự do của phần vòm bên dưới, bởi vì chuyển vị của các khối lượng  $m_1$  trên mặt cầu hoàn toàn phụ thuộc chuyển vị các khối lượng trên trục vòm.

Tuy vậy, Bài toán vẫn phức tạp hơn trường hợp không xét đến ảnh hưởng của trọng lượng mặt cầu, bởi vì các khối lượng thuộc vòm nói chung có thể chuyển vị theo phương bất kỳ, trong khi đó các khối lượng thuộc bộ phận mặt cầu chỉ có khả năng chuyển vị theo phương thẳng đứng. Chẳng hạn khối lượng  $m_4$  thuộc phần vòm có thể chuyển vị theo phương đứng và phương ngang, nhưng khối lượng  $m_1$  thuộc phần mặt cầu chỉ có thể chuyển vị theo phương thẳng đứng.

Ngoài ra khi kể đến các khối lượng của mặt cầu số phương trình cân bằng động sẽ tăng lên, nhưng trong đó có một phương trình không độc lập.

Trong trường hợp các khối lượng  $m_2, m_3, m_4$  của vòm so với khối lượng của kết cấu nhịp cầu, ta có thể chuyển chúng lên trên để nhập vào các khối lượng tập trung trên mặt cầu. Cách làm gần đúng như vậy phù hợp với giả thuyết là bỏ qua các thành phần ngang của lực quán tính đặt ở các khối lượng thuộc phần vòm. Trong thực tế, vòm thường là vòm thoải nên giả thiết trên có thể chấp nhận được với một sai số tương đối nhỏ.

##### Thí dụ 4-9 :

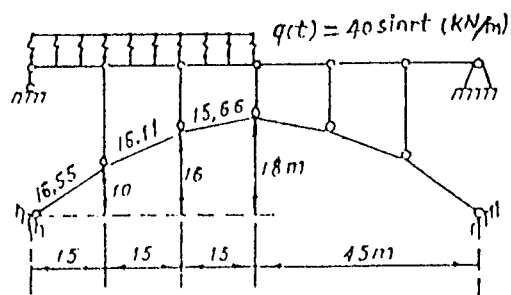
Vẽ biểu đồ moment động của vòm hai khớp có đường xe chạy vẽ trên hình 4-29, trục vòm có dạng đường Parabol bậc hai

$$i = \frac{4f}{\ell^2} \cdot z(\ell - z)$$

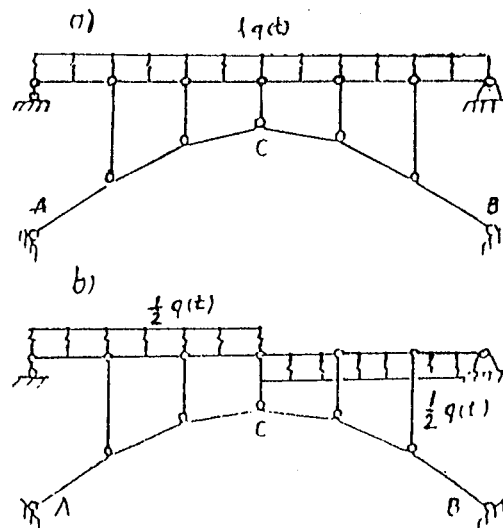
Với góc tọa độ đặt ở gối trái của vòm và  $f/\ell = 1/5$ . Cho  $EJ_{\text{vòm}} = h_s$ ;  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m/4$ . Sơ đồ khối lượng như trên hình 4-28b. Tần số của lực kích thích

$$r = 0,015 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$





Hình 4-29



Hình 4-30

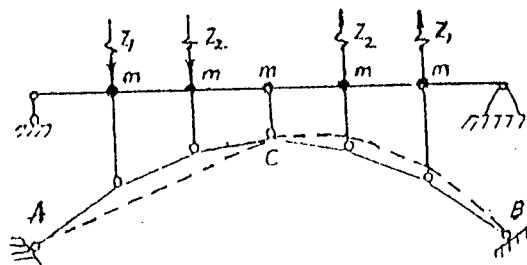
Hệ đã cho là hệ đối xứng chịu tải trọng bất kỳ. Để tính toán được đơn giản, ta phân tích tải trọng thành tải trọng đối xứng ( hình 4-30a) và tải trọng phản đối xứng (hình 4-30b) và lần lượt xác định nội lực cho từng trường hợp.

### 1- Trường hợp tải trọng đối xứng (hình 4-30a)

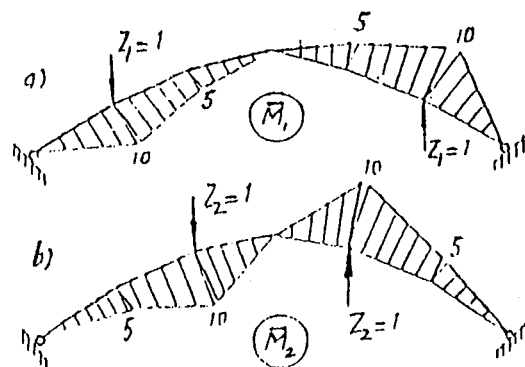
Trong cơ học kết cấu ta đã biết trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng phân bố đều trên toàn chiều dài nhịp có dạng đường cong bậc hai.

Do đó đối với trục vòm hai khớp có dạng đường cong Parabôn, nếu bỏ qua biến dạng nén do lực dọc trục gây ra thì khi chịu tải trọng phân bố đều trên toàn nhịp, moment tại tất cả các tiết diện trên vòm đều bằng không.

### 2- Trường hợp tải trọng phản đối xứng (hình 4-30b)



Hình 4-31



Hình 4-32

Khi tải trọng tác dụng phản đối xứng, moment uốn ở đỉnh vòm  $M_C = 0$ , do đó ta có thể xem hệ làm việc như một vòm ba khớp. Để cho đơn giản, ta áp dụng cách tính gần đúng bằng cách chuyển tất cả các khối lượng của vòm lên mặt cầu, có trị số như nhau là  $m/2$ . Sơ đồ khối lượng như hình 4-31. Hệ có hai bậc tự do và có hai cấp lực quán tính.

**a- Tính các tần số riêng :** Từ các biểu đồ moment đơn vị trên hình 4-32 ta xác định được

$$\frac{1}{1000} \cdot EJ \cdot \delta_{11} = 3,52 \times 2$$

$$\frac{1}{1000} \cdot EJ \cdot \delta_{22} = 3,20 \times 2$$

$$\frac{1}{1000} \cdot EJ \cdot \delta_{12} = 2,82 \times 2$$

Phương trình tần số của dao động riêng

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{m}{2 \times 2} \cdot \delta_{11} - u \right) & \frac{m}{2 \times 2} \cdot \delta_{12} \\ \frac{m}{2 \times 2} \cdot \delta_{21} & \left( \frac{m}{2 \times 2} \cdot \delta_{22} - u \right) \end{vmatrix} = 0$$

Đặt

$$\lambda = \frac{EJ}{m \times 1000} \cdot u = \frac{EJ}{m \times 1000 \times \omega^2}$$

Và thay các trị số vào phương trình trên ta có

$$\begin{vmatrix} (1,625 - \lambda) & 1,41 \\ 1,41 & (1,6 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Giải phương trình nhận được :

$$\lambda_1 = 3,022 \quad ; \quad \lambda_2 = 0,202$$

Suy ra :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot \lambda_1}} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 0,0182 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot \lambda_2}} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 0,704 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

b- **Vẽ biểu đồ moment động** : Hệ phương trình chính tắc để xác định biên độ các lực quán tính có dạng

$$\delta_{11}^*.Z_1 + \delta_{12}.Z_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}.Z_1 + \delta_{22}^*.Z_2 + \Delta_{2P} = 0$$

Đặt

$$r = k \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Ta có

$$EJ.\delta_{11}^* = EJ.\delta_{11} - \frac{2 \times 2EJ}{m.r^2} = \left( 3250 - \frac{2}{k^2} \right)^2$$

$$EJ.\delta_{22}^* = EJ.\delta_{22} - \frac{2 \times 2EJ}{m.r^2} = \left( 3000 - \frac{2}{k^2} \right)^2$$

Biểu đồ moment  $M_P$  do tải trọng tác dụng tĩnh gây ra có dạng như trên hình 4-33. Từ biểu đồ này và các biểu đồ  $M_1$ ,  $M_2$  ta dễ dàng xác định được

$$\frac{1}{1000}.EJ.\Delta_{1P} = 1000 \times 2 \quad ; \quad \frac{1}{1000}.EJ.\Delta_{2P} = 993 \times 2$$

Thay các số liệu vừa tìm được vào phương trình trên ta có

$$\left( 3250 - \frac{2}{k^2} \right).Z_1 + 2820.Z_2 + 1000.10^3 = 0$$

$$2820.Z_1 + \left( 3200 - \frac{2}{k^2} \right).Z_2 + 993.10^3 = 0$$

Khi

$$r = 0,015 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Tức là  $k = 0,015$  – ta có

$$-Z_1 + 0,50.Z_2 + 177 = 0$$

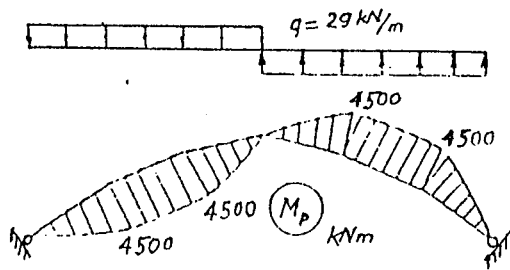
$$Z_1 - 2,02.Z_2 + 352 = 0$$

Giải phương trình có được

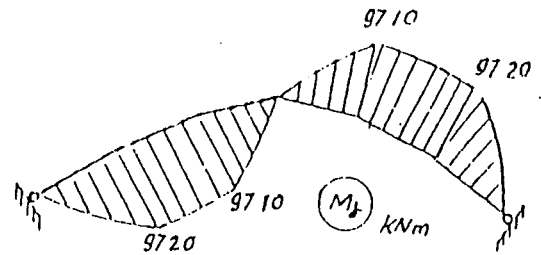
$$Z_1 = 349 \text{ kN} \quad ; \quad Z_2 = 347 \text{ kN}$$

Biểu đồ nội lực động  $M_d$  được vẽ theo biểu thức

$$M_d = 349.\bar{M}_1 + 347.\bar{M}_2 + M_P$$



Hình 4-33



Hình 4-34

Kết quả vẽ được trên hình 4-34 so sánh biểu đồ moment động  $M_d$  với biểu đồ moment tĩnh  $M_p$ , ta thấy các tung độ chênh lệch nhau hơn hai lần.

$$K_d = \frac{M_d}{M_t} = \frac{9720}{4500} = 2,16$$



# BẢNG CÁC HÀM SỐ ẢNH HƯỞNG ĐỂ TÍNH ĐỘNG LỰC HỌC CỦA KHUNG VÀ DẦM LIÊN TỤC ĐƠN GIẢN

Biểu thức của các hàm số ảnh hưởng

$$\begin{aligned} A_{kz} &= \frac{\operatorname{chkz} + \cos kz}{2} & ; & & B_{kz} &= \frac{\operatorname{shkz} + \sin kz}{2} \\ C_{kz} &= \frac{\operatorname{chkz} - \cos kz}{2} & ; & & D_{kz} &= \frac{\operatorname{shkz} - \sin kz}{2} \end{aligned}$$

Đạo hàm của các hàm số :

$$\begin{aligned} \frac{dA_{kz}}{dz} &= k \cdot D_{kz} & ; & & \frac{dC_{kz}}{dz} &= k B_{kz} \\ \frac{dB_{kz}}{dz} &= k \cdot A_{kz} & ; & & \frac{dD_{kz}}{dz} &= k \cdot C_{kz} \end{aligned}$$

Tích phân của các hàm số :

$$\begin{aligned} \int A_{kz} \cdot dz &= \frac{1}{k} \cdot B_{kz} & ; & & \int z \cdot A_{kz} \cdot dz &= \frac{z}{k} \cdot B_{kz} - \frac{C_{kz}}{k^2} \\ \int B_{kz} \cdot dz &= \frac{1}{k} \cdot C_{kz} & ; & & \int z \cdot B_{kz} \cdot dz &= \frac{z}{k} \cdot C_{kz} - \frac{D_{kz}}{k^2} \\ \int C_{kz} \cdot dz &= \frac{1}{k} \cdot D_{kz} & ; & & \int z \cdot C_{kz} \cdot dz &= \frac{z}{k} \cdot D_{kz} - \frac{A_{kz}}{k^2} \\ \int D_{kz} \cdot dz &= \frac{1}{k} \cdot A_{kz} & ; & & \int z \cdot D_{kz} \cdot dz &= \frac{z}{k} \cdot A_{kz} - \frac{B_{kz}}{k^2} \end{aligned}$$

Liên hệ giữa các hàm số :

$$\begin{aligned} C_{\lambda}^2 - B_{\lambda} \cdot D_{\lambda} &= \frac{1 - \operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda}{2} \\ A_{\lambda} \cdot D_{\lambda} - B_{\lambda} \cdot C_{\lambda} &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \lambda \cos) - \operatorname{ch} \lambda \cdot \sin \lambda \\ A_{\lambda}^2 - C_{\lambda}^2 &= \operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda \\ A_{\lambda} \cdot B_{\lambda} - C_{\lambda} \cdot D_{\lambda} &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \lambda \cdot \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cdot \cos \lambda) \\ 2 A_{\lambda} \cdot C_{\lambda} &= B_{\lambda}^2 + D_{\lambda}^2 \\ B_{\lambda} \cdot D_{\lambda} - A_{\lambda}^2 &= -\frac{1}{2} (D + \operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda) \end{aligned}$$

Bảng 4

kz	A <sub>kz</sub>	B <sub>kz</sub>	C <sub>kz</sub>	D <sub>kz</sub>
0,00	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,10	1,000004	0,100000	0,005000	0,000167
0,20	1,000067	0,200003	0,020000	0,001333
0,30	1,000338	0,300020	0,045001	0,004500
0,40	1,001067	0,400085	0,080006	0,010667
0,50	1,002604	0,500260	0,125022	0,020835
0,60	1,005400	0,600648	0,180065	0,036006
0,70	1,010006	0,701401	0,245163	0,057183
0,80	1,017071	0,802731	0,320364	0,085375
0,90	1,027348	0,904922	0,405738	0,121595
1,00	1,041691	1,008336	0,501389	0,166865
1,02	1,045130	1,029204	0,521764	0,177096
1,04	1,048778	1,050143	0,542558	0,187738
1,06	1,052643	1,071157	0,563771	0,198801
1,08	1,056733	1,092250	0,585405	0,210292
1,10	1,061057	1,113427	0,607461	0,222220
1,12	1,065625	1,134694	0,629942	0,234593
1,14	1,070444	1,156054	0,652850	0,247421
1,16	1,075525	1,177513	0,676185	0,260710
1,18	1,080876	1,199077	0,699951	0,274471
1,20	1,086507	1,220750	0,724149	0,288711
1,22	1,092427	1,242539	0,748782	0,303440
1,24	1,098648	1,264449	0,773851	0,318665
1,26	1,105177	1,286487	0,799360	0,334397
1,28	1,112027	1,308659	0,825312	0,350643
1,30	1,119207	1,330970	0,851708	0,367412
1,32	1,126727	1,353429	0,878551	0,384714
1,34	1,134599	1,376042	0,905846	0,402557
1,36	1,142833	1,398815	0,933594	0,420951
1,38	1,151440	1,421758	0,961800	0,439904
1,40	1,160433	1,444876	0,990466	0,459426
1,42	1,169821	1,468177	1,019596	0,479526
1,44	1,179618	1,491671	1,049194	0,500213
1,46	1,189834	1,515365	1,079264	0,521497
1,48	1,200482	1,539267	1,109810	0,543387

kz	A <sub>kz</sub>	B <sub>kz</sub>	C <sub>kz</sub>	D <sub>kz</sub>
1,50	1,211573	1,563387	1,140836	0,565892
1,52	1,223122	1,587733	1,172347	0,589023
1,54	1,235139	1,612315	1,204347	0,612789
1,56	1,247637	1,637142	1,236841	0,637200
1,58	1,260631	1,662224	1,269834	0,662266
1,60	1,274132	1,687571	1,303332	0,687997
1,62	1,288155	1,713193	1,337339	0,714403
1,64	1,302713	1,739101	1,371862	0,741494
1,66	1,317820	1,765305	1,406905	0,769281
1,68	1,333489	1,791817	1,442476	0,797774
1,70	1,349735	1,818648	1,478580	0,826984
1,72	1,366573	1,845810	1,515224	0,856921
1,74	1,384017	1,873315	1,552415	0,887596
1,76	1,402082	1,901175	1,590159	0,919021
1,78	1,420783	1,929403	1,628464	0,951206
1,80	1,440136	1,958011	1,667338	0,984163
1,82	1,460155	1,987013	1,706787	1,017904
1,84	1,480857	2,016422	1,746821	1,052439
1,86	1,502258	2,046252	1,787447	1,087780
1,88	1,524374	2,076517	1,828674	1,123941
1,90	1,547221	2,107231	1,870511	1,160931
1,92	1,570817	2,138411	1,912966	1,198765
1,94	1,595177	2,170069	1,956050	1,237454
1,96	1,620320	2,202223	1,999772	1,277011
1,98	1,646264	2,234887	2,044142	1,317449
2,00	1,673024	2,268079	2,089171	1,358781
2,02	1,700621	2,301814	2,134869	1,401021
2,04	1,729071	2,336109	2,181248	1,444181
2,06	1,758394	2,370983	2,228318	1,488275
2,08	1,788609	2,406451	2,276091	1,533318
2,10	1,819734	2,442533	2,324580	1,579324
2,12	1,851788	2,479247	2,373796	1,626306
2,14	1,884792	2,516611	2,423754	1,674280
2,16	1,918766	2,554645	2,474465	1,723261
2,18	1,953730	2,593368	2,525944	1,773264



kz	A <sub>kz</sub>	B <sub>kz</sub>	C <sub>kz</sub>	D <sub>kz</sub>
2,20	1,989704	2,632801	2,578205	1,824304
2,22	2,026709	2,672963	2,631261	1,876398
2,24	2,064767	2,713876	2,685128	1,929560
2,26	2,103899	2,755561	2,739821	1,983808
2,28	2,144126	2,798039	2,795356	2,039159
2,30	2,185472	2,841334	2,851748	2,095628
2,32	2,227959	2,885466	2,909015	2,153234
2,34	2,271609	2,930460	2,967173	2,211995
2,36	2,316447	2,976338	3,026239	2,271927
2,38	2,362494	3,023126	3,086232	2,333051
2,40	2,409777	3,070846	3,147170	2,395383
2,42	2,458318	3,119525	3,209073	2,458944
2,44	2,508143	3,169187	3,271958	2,523752
2,46	2,559276	3,219859	3,335847	2,589829
2,48	2,611745	3,271567	3,400759	2,657193
2,50	2,665573	3,324338	3,466717	2,725866
2,52	2,720788	3,378200	3,533740	2,795869
2,54	2,777417	3,433179	3,601852	2,867223
2,56	2,835486	3,489306	3,671075	2,939950
2,58	2,895024	3,546608	3,741432	3,014074
2,60	2,956059	3,605117	3,812947	3,089615
2,62	3,018618	3,664861	3,885645	3,166599
2,64	3,082732	3,725872	3,959550	3,245049
2,66	3,148430	3,788181	4,034689	3,324990
2,68	3,215742	3,851820	4,111086	3,406445
2,70	3,284698	3,916821	4,188770	3,489442
2,72	3,355330	3,983219	4,267768	3,574005
2,74	3,427669	4,051046	4,348109	3,660161
2,76	3,501747	4,120337	4,429820	3,747938
2,78	3,577598	4,191128	4,512932	3,837363
2,80	3,655253	4,263453	4,597475	3,928465
2,82	3,734748	4,337350	4,683481	4,021272
2,84	3,816115	4,412856	4,770980	4,115814
2,86	3,899392	4,490008	4,860006	4,212122
2,88	3,984612	4,568844	4,950592	4,310225

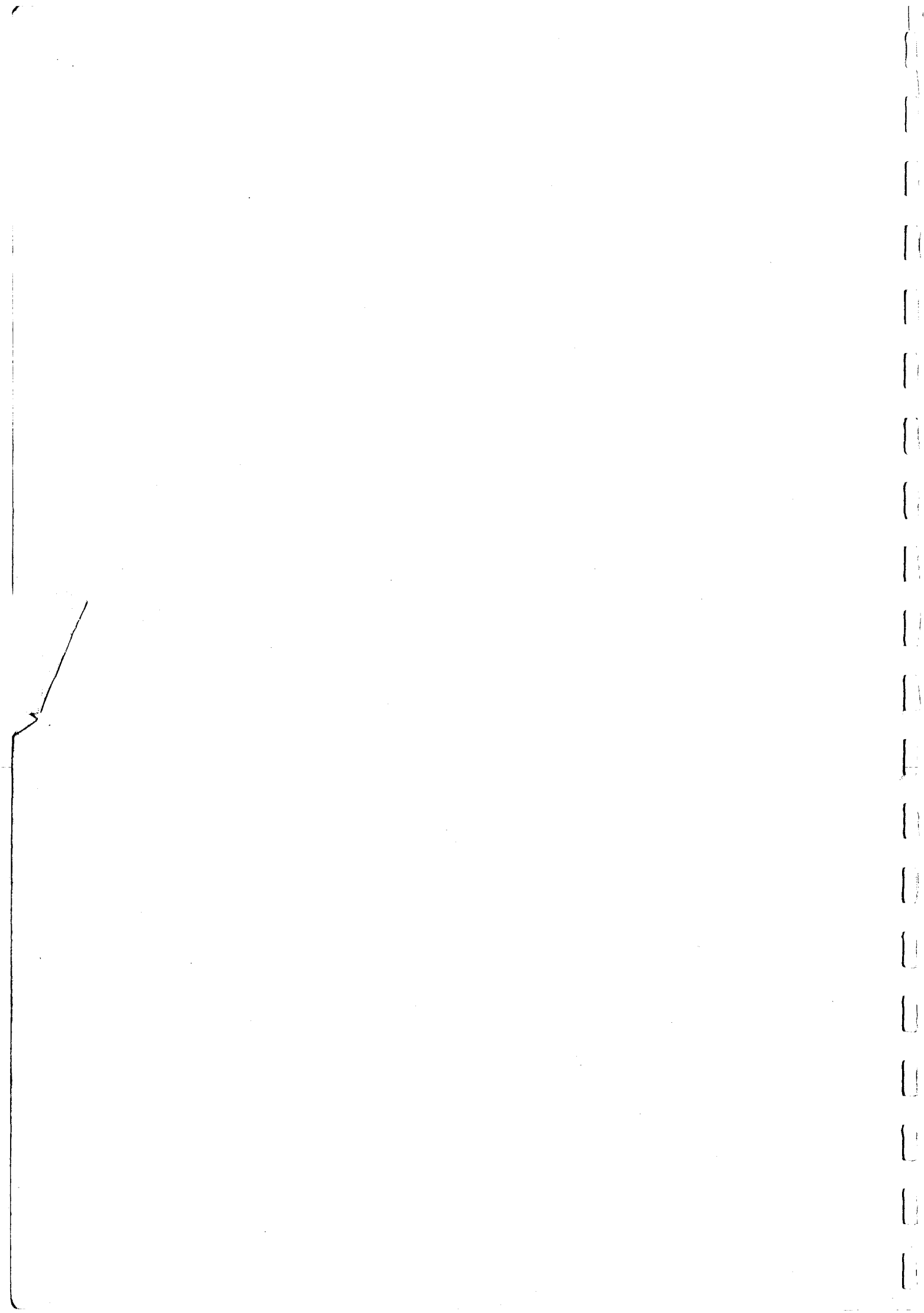
kz	A <sub>kz</sub>	B <sub>kz</sub>	C <sub>kz</sub>	D <sub>kz</sub>
2,90	4,071813	4,649405	5,042771	4,410156
2,92	4,161031	4,731730	5,136580	4,511947
2,94	4,252304	4,815860	5,232052	4,615630
2,96	4,345669	4,901836	5,329226	4,721240
2,98	4,441166	4,989701	5,428139	4,828811
3,00	4,538835	5,079497	5,528827	4,938377
3,02	4,638715	5,171269	5,631332	5,049976
3,04	4,740848	5,265061	5,735691	5,163643
3,06	4,845275	5,360918	5,841948	5,279416
3,08	4,952039	5,458888	5,950142	5,397334
3,10	5,061183	5,559016	6,060318	5,517435
3,12	5,172751	5,661351	6,172518	5,639760
3,14	5,286788	5,765942	6,286787	5,764350
3,16	5,403340	5,872839	6,403171	5,891246
3,18	5,522454	5,982093	6,521716	6,020491
3,20	5,644176	6,093755	6,642470	6,152129
3,22	5,768555	6,207878	6,765483	6,286205
3,24	5,895640	6,324515	6,890802	6,422764
3,26	6,025482	6,443722	7,018480	6,561853
3,28	6,158132	6,565553	7,148569	6,703519
3,30	6,293641	6,690066	7,281120	6,847812
3,32	6,432062	6,817318	7,416190	6,994781
3,34	6,573450	6,947368	7,553832	7,144477
3,36	6,717860	7,080276	7,694103	7,296951
3,38	6,865347	7,216103	7,837062	7,452259
3,40	7,015969	7,354911	7,982767	7,610452
3,42	7,169785	7,496763	8,131279	7,771588
3,44	7,326853	7,641724	8,282659	7,935723
3,46	7,487234	7,789860	8,436969	8,102914
3,48	7,650990	7,941236	8,594275	8,273221
3,50	7,818184	8,095922	8,754641	8,446705
3,52	7,988880	8,253987	8,918134	8,623428
3,54	8,163143	8,415501	9,084823	8,803452
3,56	8,341040	8,580537	9,254778	8,986842
3,58	8,522640	8,749167	9,428069	9,173665

kz	A <sub>kz</sub>	B <sub>kz</sub>	C <sub>kz</sub>	D <sub>kz</sub>
3,60	8,708010	8,921467	9,604769	9,363988
3,62	8,897223	9,097513	9,784952	9,557879
3,64	9,090350	9,277382	9,968695	9,755410
3,66	9,287464	9,461154	10,156074	9,956651
3,68	9,488641	9,648908	10,347167	10,161677
3,70	9,693957	9,840727	10,542057	10,370563
3,72	9,903490	10,036695	10,740824	10,583386
3,74	10,117319	10,236895	10,943553	10,800223
3,76	10,335526	10,441416	11,150329	11,021155
3,78	10,558193	10,650346	11,361239	11,246263
3,80	10,785405	10,863774	11,576373	11,475632
3,82	11,017247	11,081793	11,795821	11,709347
3,84	11,253808	11,304496	12,019676	11,947495
3,86	11,495177	11,531978	12,248032	12,190164
3,88	11,741446	11,764336	12,480987	12,437447
3,90	11,992707	12,001669	12,718639	12,689435
3,92	12,249055	12,244078	12,961088	12,946224
3,94	12,510588	12,491665	13,208437	13,207911
3,96	12,777405	12,744537	13,460790	13,474595
3,98	13,049606	13,002798	13,718254	13,746377
4,00	13,327295	13,266557	13,980938	14,023360
4,02	13,610576	13,535927	14,248954	14,305650
4,04	13,899557	13,811018	14,522413	14,593354
4,06	14,194347	14,091948	14,801433	14,886583
4,08	14,495058	14,378832	15,086131	15,185449
4,10	14,801803	14,671790	15,376627	15,490067
4,12	15,114699	14,970945	15,673044	15,800554
4,14	15,433865	15,276420	15,975507	16,117029
4,16	15,759421	15,588342	16,284144	16,439615
4,18	16,091491	15,906840	16,599084	16,768437
4,20	16,430201	16,232046	16,920462	17,103622
4,22	16,775680	16,564093	17,248412	17,445299
4,24	17,128057	16,903119	17,583072	17,793603
4,26	17,487469	17,249263	17,924584	18,148668
4,28	17,854050	17,602666	18,273091	18,510633

kz	A <sub>kz</sub>	B <sub>kz</sub>	C <sub>kz</sub>	D <sub>kz</sub>
4,30	18,227941	17,963473	18,628740	18,879639
4,32	18,609284	18,331833	18,991681	19,255831
4,34	18,998223	18,707895	19,362065	19,639356
4,36	19,394908	19,091814	19,740049	20,030364
4,38	19,799489	19,483744	20,125791	20,429010
4,40	20,212120	19,883847	20,519453	20,835449
4,42	20,632960	20,292284	20,921200	21,249842
4,44	21,062168	20,709221	21,331201	21,672352
4,46	21,499909	21,134827	21,749627	22,103146
4,48	21,946350	21,569275	22,176653	22,542394
4,50	22,401662	22,012741	22,612458	22,990271
4,52	22,866020	22,465402	23,057224	23,446952
4,54	23,339600	22,927443	23,511137	23,912621
4,56	23,822586	23,399049	23,974385	24,387460
4,58	24,315161	23,880410	24,447164	24,871660
4,60	24,817516	24,371720	24,929668	25,365411
4,62	25,329842	24,873177	25,422100	25,868912
4,64	25,852338	25,384982	25,924664	26,382363
4,66	26,385205	25,907340	26,437570	26,905968
4,68	26,928646	26,440461	26,961030	27,439936
4,70	27,482873	26,984558	27,495261	27,984481
4,72	28,048097	27,539849	28,040486	28,539820
4,74	28,624539	28,106556	28,596931	29,106175
4,76	29,212419	28,684907	29,164826	29,683773
4,78	29,811966	29,275131	29,744407	30,272846
4,80	30,423411	29,877465	30,335912	30,873629
4,82	31,046991	30,492148	30,939588	31,486364
4,84	31,682947	31,119427	31,555682	32,111296
4,86	32,331526	31,759550	32,184450	32,748676
4,88	32,992979	32,412774	32,826152	33,398760
4,90	33,667563	33,079357	33,481050	34,061810
4,92	34,355539	33,759565	34,149417	34,738092
4,94	35,057176	34,453670	34,831526	35,427878
4,96	35,772746	35,161945	35,527658	36,131446
4,98	36,502528	35,884674	36,238100	36,849080

kz	A <sub>kz</sub>	B <sub>kz</sub>	C <sub>kz</sub>	D <sub>kz</sub>
5,00	37,246805	36,622143	36,963143	37,581067
5,02	38,005868	37,374645	37,703086	38,327705
5,04	38,780013	38,142478	38,458231	39,089292
5,06	39,569542	38,925948	39,228889	39,866137
5,08	40,374763	39,725365	40,015375	40,658553
5,10	41,195990	40,541045	40,818012	41,466860
5,12	42,033545	41,373313	41,637128	42,291384
5,14	42,887756	42,222498	42,473057	43,132457
5,16	43,758956	43,088937	43,326143	43,990420
5,18	44,647487	43,972972	44,196732	44,865620
5,20	45,553698	44,874954	45,085181	45,758409
5,22	46,477943	45,795240	45,991852	46,669148
5,24	47,420586	46,734194	46,917115	47,598207
5,26	48,381996	47,692189	47,861347	48,545959
5,28	49,362552	48,669602	48,824932	49,512790
5,30	50,362638	49,666821	49,808263	50,499088
5,32	51,382648	50,684240	50,811740	51,505254
5,34	52,422983	51,722262	51,835770	52,531695
5,36	53,484053	52,781298	52,880770	53,578825
5,38	54,566277	53,861765	53,947165	54,647068
5,40	55,670080	54,964093	55,035387	55,736857
5,42	56,795898	56,088715	56,145877	56,848632
5,44	57,944174	57,236078	57,279087	57,982844
5,46	59,115364	58,406635	58,435475	59,139950
5,48	60,309928	59,600849	59,615510	60,320420
5,50	61,528340	60,819191	60,819670	61,524732
5,52	62,771080	62,062144	62,048442	62,753371
5,54	64,038640	63,330200	63,302323	64,006837
5,56	65,331522	64,623859	64,581820	65,285635
5,58	66,650238	65,943633	65,887451	66,590284
5,60	67,995309	67,290044	67,219743	67,921311
5,62	69,367270	68,663625	68,579234	69,279255
5,64	70,766663	70,064918	69,966473	70,664665
5,66	72,194043	71,494478	71,382019	72,078102
5,68	73,649977	72,952870	72,826444	73,520138

kz	A <sub>kz</sub>	B <sub>kz</sub>	C <sub>kz</sub>	D <sub>kz</sub>
5,70	75,135043	74,440671	74,300330	74,991357
5,72	76,649830	75,958470	75,804271	76,492352
5,74	78,194940	77,506866	77,338873	78,023732
5,76	79,770986	79,086474	78,904754	79,586115
5,78	81,378595	80,697916	80,502544	81,180135
5,80	83,018407	82,341832	82,132887	82,806434
5,82	84,691072	84,018871	83,796438	84,465672
5,84	86,397258	85,729698	85,493867	86,158518
5,86	88,137642	87,474990	87,225856	87,885657
5,88	89,912917	89,255437	88,993101	89,647787
5,90	91,723791	91,071744	90,796313	91,445620
5,92	93,570985	92,924630	92,636215	93,279884
5,94	95,455234	94,814830	94,513547	95,151319
5,96	97,377290	96,743092	96,429062	97,060680
5,98	99,337919	98,710179	98,383529	99,008741
6,00	101,337903	100,716871	100,377733	100,996286
6,02	103,378039	102,763963	102,412473	103,024120
6,04	105,459142	104,852266	104,488566	105,093061
6,06	107,582042	106,982607	106,606844	107,203944
6,08	109,747585	109,155832	108,768156	109,357622
6,10	111,956637	111,372801	110,973369	111,554963
6,12	114,210081	113,634393	113,223366	113,796855
6,14	116,508815	115,941506	115,519048	116,084202
6,16	118,853758	118,295054	117,861336	118,417928
6,18	121,245847	120,695970	120,251166	120,798973
6,20	123,686039	123,145208	122,689497	123,228298
6,22	126,175308	125,643739	125,177303	125,706882
6,24	128,714649	128,192554	127,715581	128,235726
6,26	131,305078	130,792666	130,305347	130,815849
6,28	133,947632	133,445105	132,947637	133,448290



**BẢNG CÁC HÀM SỐ  
ĐỂ TÍNH ĐỘNG LỰC HỌC CỦA KHUNG VÀ  
DẦM LIÊN TỤC ĐƠN GIẢN**

Bảng 5

$\lambda$	$\mu_1(\lambda)$	$\mu_2(\lambda)$	$\mu_3(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda)$	$\mu_4(\lambda) = \varepsilon_2(\lambda)$	$\mu_5(\lambda)$	$\mu_6(\lambda) = \varepsilon_5(\lambda)$
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,10	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,20	1,00000	1,00001	0,99999	1,00001	0,99999	0,99995
0,30	0,99998	1,00003	0,99993	1,00004	0,99995	0,99977
0,40	0,99994	1,00009	0,99978	1,00013	0,99984	0,99927
0,50	0,99985	1,00022	0,99945	1,00032	0,99960	0,99821
0,60	0,99969	1,00046	0,99887	1,00067	0,99918	0,99630
0,70	0,99943	1,00086	0,99790	1,00124	0,99847	0,99313
0,80	0,99902	1,00146	0,99642	1,00212	0,99740	0,98828
0,90	0,99844	1,00235	0,99427	1,00339	0,99582	0,98121
1,00	0,99761	1,00358	0,99126	1,00517	0,99363	0,97133
1,10	0,99651	1,00525	0,98719	1,00758	0,99065	0,95797
1,20	0,99505	1,00744	0,98184	1,01075	0,98673	0,94035
1,30	0,99317	1,01026	0,97496	1,01483	0,98167	0,91762
1,40	0,99079	1,01384	0,96627	1,02000	0,97525	0,88882
1,50	0,98784	1,01828	0,95547	1,02643	0,96723	0,85289
1,60	0,98422	1,02375	0,94223	1,03433	0,95734	0,80859
1,70	0,97983	1,03039	0,92618	1,04394	0,94525	0,75455
1,80	0,97455	1,03838	0,90692	1,05551	0,93060	0,68920
1,90	0,96826	1,04791	0,88400	1,06933	0,91298	0,61071
2,00	0,96083	1,05922	0,85694	1,08572	0,89188	0,51698
2,10	0,95210	1,07255	0,82520	1,10507	0,86671	0,40552
2,20	0,94189	1,08819	0,78815	1,12778	0,83678	0,27334
2,30	0,93000	1,10646	0,74512	1,15436	0,80120	0,11685
2,40	0,91622	1,12776	0,69533	1,18536	0,75891	-0,06838
2,50	0,90027	1,15252	0,63789	1,22146	0,70855	-0,28792
2,60	0,88187	1,18127	0,57178	1,26345	0,64838	-0,54885
2,70	0,86064	1,21465	0,49582	1,31227	0,57610	-0,86042
2,80	0,83618	1,25340	0,40859	1,36906	0,48864	-1,23499
2,90	0,80797	1,29844	0,30844	1,43520	0,38175	-1,68954
3,00	0,77540	1,35089	0,19336	1,51241	0,24937	-2,24817
3,10	0,73772	1,41217	0,06090	1,60282	0,08256	-2,94636
3,20	0,69399	1,48404	-0,09197	1,70914	-0,13252	-3,83881
3,30	0,64300	1,56877	-0,26908	1,83484	-0,41847	-5,01472
3,40	0,58322	1,66931	-0,47534	1,98444	-0,81502	-6,63059



$\lambda$	$\mu_1(\lambda)$	$\mu_2(\lambda)$	$\mu_3(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda)$	$\mu_4(\lambda) = \varepsilon_2(\lambda)$	$\mu_5(\lambda)$	$\mu_6(\lambda) = \varepsilon_5(\lambda)$
3,50	0,51261	1,78959	-0,71717	2,16396	-1,39906	-8,98897
3,60	0,42845	1,93491	-1,00321	2,38160	-2,34150	-12,76199
3,70	0,32694	2,11269	-1,34530	2,64874	-4,11481	-19,80676
3,80	0,20271	2,33351	-1,76031	2,98173	-8,68384	-37,84496
3,90	0,04780	2,61310	-2,27304	3,40484	-47,55538	-190,68801
4,00	-0,15008	2,97580	-2,92177	3,95573	19,46756	72,58918
4,10	-0,41099	3,46151	-3,76880	4,69608	9,17015	32,01492
4,20	-0,77004	4,14023	-4,92322	5,73425	6,39342	20,98443
4,30	-1,29502	5,14721	-6,59517	7,27962	5,09273	15,74347
4,40	-2,13568	6,78169	-9,24895	9,79563	4,33068	12,60740
4,50	-3,70212	9,86351	-14,15534	14,55212	3,82358	10,46034
4,60	-7,66551	17,73462	-26,49224	26,72594	3,45603	8,84763
4,70	-37,94775	78,23843	-120,37444	120,43073	3,17211	7,54805
4,80	18,30477	-34,33281	53,83898	-53,97575	2,94125	6,43993
4,90	8,34376	-14,48301	22,90532	-23,25225	2,74520	5,44965
5,00	5,74862	-9,37158	14,78663	-15,36248	2,57221	4,52887
5,10	4,54448	-7,04949	10,97123	-11,79661	2,41419	3,64329
5,20	3,84172	-5,73831	8,70237	-9,80006	2,26523	2,76656
5,30	3,37489	-4,90802	7,15699	-8,55222	2,12066	1,87670
5,40	3,03685	-4,34539	6,00243	-7,72326	1,97654	0,95373
5,50	2,77590	-3,94830	5,07780	-7,15559	1,82925	-0,02214
5,60	2,56393	-3,66194	4,29505	-6,76502	1,67518	-1,07206
5,70	2,38420	-3,45455	3,60123	-6,50316	1,51046	-2,22019
5,80	2,22596	-3,30668	2,96183	-6,34091	1,33058	-3,49580
5,90	2,08186	-3,20607	2,35258	-6,26051	1,13003	-4,93603
6,00	1,94654	-3,14497	1,75508	-6,25142	0,90164	-6,59010
6,10	1,81579	-3,11863	1,15419	-6,30816	0,63564	-8,52590
6,20	1,68609	-3,12451	0,53635	-6,42908	0,31810	-10,84107
6,30	1,55421	-3,16184	-0,11165	-6,61594	-0,07184	-13,68257
6,40	1,41697	-3,23150	-0,80379	-6,87382	-0,56726	-17,28379

Tiếp bảng 5

$\lambda$	$\mu_7(\lambda)$	$\varepsilon_3(\lambda)$	$\varepsilon_4(\lambda)$	$\varepsilon_6(\lambda)$	$\varepsilon_7(\lambda)$	$\varepsilon_8(\lambda)$
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,10	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998	1,00000	0,99999
0,20	1,00002	0,99995	1,00002	0,99974	1,00007	0,99987
0,30	1,00011	0,99975	1,00009	0,99869	1,00038	0,99936
0,40	1,00034	0,99921	1,00027	0,99585	1,00119	0,99799
0,50	1,00082	0,99807	1,00067	0,98988	1,00290	0,99509
0,60	1,00170	0,99599	1,00139	0,97901	1,00602	0,98981
0,70	1,00315	0,99257	1,00257	0,96110	1,01116	0,98112
0,80	1,00537	0,98732	1,00439	0,93362	1,01906	0,96779
0,90	1,00862	0,97968	1,00704	0,89361	1,03057	0,94837
1,00	1,01316	0,96902	1,01074	0,83772	1,04667	0,92125
1,10	1,01931	0,95462	1,01575	0,76214	1,06850	0,88458
1,20	1,02743	0,93569	1,02234	0,66264	1,09733	0,83630
1,30	1,03792	0,91135	1,03083	0,53448	1,13462	0,77412
1,40	1,05125	0,88064	1,04157	0,37238	1,18201	0,69549
1,50	1,06794	0,84252	1,05495	0,17050	1,24142	0,59757
1,60	1,08859	0,79583	1,07141	-0,07768	1,31504	0,47721
1,70	1,11391	0,73933	1,09144	-0,37944	1,40540	0,33090
1,80	1,14470	0,67166	1,11557	-0,74297	1,51549	0,15468
1,90	1,18194	0,59133	1,14442	-1,17751	1,64887	-0,05591
2,00	1,22675	0,49673	1,17870	-1,69362	1,80980	-0,30593
2,10	1,28054	0,38609	1,21920	-2,30347	2,00346	-0,60126
2,20	1,34499	0,25746	1,26683	-3,02127	2,23621	-0,94869
2,30	1,42221	0,10867	1,32266	-3,86381	2,51603	-1,35628
2,40	1,51485	-0,06265	1,38794	-4,85132	2,85300	-1,83370
2,50	1,62631	-0,25921	1,46412	-6,00856	3,26008	-2,39277
2,60	1,76099	-0,48401	1,55296	-7,36650	3,75427	-3,04824
2,70	1,92479	-0,74051	1,65655	-8,96474	4,35821	-3,81896
2,80	2,12566	-1,03267	1,77743	-10,85528	5,10279	-4,72963
2,90	2,37473	-1,36510	1,91871	-13,10847	6,03118	-5,81363
3,00	2,68795	-1,74324	2,08425	-15,82277	7,20554	-7,11762
3,10	3,08906	-2,17360	2,27887	-19,14159	8,71851	-8,70948
3,20	3,61495	-2,66408	2,50873	-23,28409	10,71440	-10,69289
3,30	4,32616	-3,22447	2,78172	-28,60530	13,43037	-13,23567
3,40	5,32940	-3,86709	3,10821	-35,72483	17,28492	-16,63059

Tiếp bảng 5

$\lambda$	$\mu_7(\lambda)$	$\varepsilon_3(\lambda)$	$\varepsilon_4(\lambda)$	$\varepsilon_6(\lambda)$	$\varepsilon_7(\lambda)$	$\varepsilon_8(\lambda)$
3,50	6,83166	-4,60787	3,50200	-45,83658	23,09053	-21,44157
3,60	9,29380	-5,46784	3,98191	-61,58705	32,65718	-28,91840
3,70	13,99082	-6,47565	4,57418	-90,27965	50,99398	-42,50963
3,80	26,22732	-7,67158	5,31656	-162,26386	98,94485	-76,54495
3,90	131,07642	-9,11447	6,26517	-764,08214	510,81629	-360,74411
4,00	-50,02016	-10,89446	7,50722	269,20394	-200,99664	127,06118
4,10	-22,35037	-13,15768	9,18569	108,34702	-92,44855	51,05063
4,20	-15,00173	-16,15895	11,55200	63,46715	-63,77643	29,79274
4,30	-11,65411	-20,38805	15,09226	41,20977	-50,85045	19,21004
4,40	-9,77808	-26,92539	20,88286	27,08607	-43,73384	12,46116
4,50	-8,60964	-38,72544	31,87389	16,70067	-39,42788	7,47031
4,60	-7,83952	-67,82154	60,09392	8,25541	-36,72143	3,38788
4,70	-7,31942	-286,43151	277,75548	0,86831	-35,03654	-0,20327
4,80	-6,96999	117,88148	-127,58412	-5,95313	-34,06730	-3,53645
4,90	-6,74570	45,47061	-56,28453	-12,51442	-33,64169	-6,75683
5,00	-6,61931	26,03475	-38,05188	-19,02403	-33,66108	-9,96388
5,10	-6,57441	16,55684	-29,87725	-25,63813	-34,07118	-13,23259
5,20	-6,60156	10,62835	-25,36136	-32,48520	-34,84733	-16,62508
5,30	-6,69622	6,33368	-22,59903	-39,68111	-35,98716	-20,19784
5,40	-6,85771	2,89633	-20,82580	-47,33980	-37,50728	-24,00677
5,50	-7,08877	-0,06147	-19,67771	-55,58199	-39,44286	-28,11152
5,60	-7,39562	-2,74869	-18,96187	-64,54397	-41,84956	-32,57972
5,70	-7,78837	-5,29338	-18,56902	-74,38778	-44,80780	-37,49207
5,80	-8,28201	-7,78152	-18,43542	-85,31456	-48,43033	-42,94897
5,90	-8,89804	-10,27615	-18,52452	-97,58373	-52,87433	-49,08009
6,00	-9,66722	-12,82790	-18,81763	-111,54197	-58,36095	-56,05894
6,10	-10,63399	-15,48127	-19,30912	-127,66960	-65,20737	-64,12602
6,20	-11,86424	-18,27902	-20,00417	-146,65849	-73,88132	-73,62791
6,30	-13,45902	-21,26563	-20,91818	-169,55035	-85,09851	-85,08656
6,40	-15,58074	-24,49068	-22,07750	-197,99870	-100,00765	-99,33059