

TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN - ĐHSP

ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC LẦN III NĂM 2013

Môn thi : TOÁN

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
- 2) Cho điểm $A(0; 5)$ và đường thẳng Δ đi qua điểm $I(1; 2)$ có hệ số góc k . Tìm các giá trị của k để đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho tam giác AMN vuông tại A .

Câu 2. (1,0 điểm)

Giải phương trình : $\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{\pi}{3} - x)}{\cos x} + \sin x \cdot \tan \frac{x}{2}$

Câu 3. (1,0 điểm)

Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x+24} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+24} - \sqrt{x}} < \frac{27(12+x-\sqrt{x^2+24x})}{8(12+x+\sqrt{x^2+24x})}$

Câu 4. (1,0 điểm)

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \cdot \sin x \cdot (1 - \sin x)}{\cos^3 x} dx$

Câu 5. (1,0 điểm) Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài cạnh bằng $3a$, đường cao SH bằng $a\sqrt{10}$, H là trọng tâm tam giác ABD . Gọi M là trung điểm của SD . Mặt phẳng (BCM) cắt SH và SA lần lượt tại K và N . Tính thể tích khối chóp $S.BCMN$ và chứng minh điểm K là trực tâm của tam giác SAC .

Câu 6. (1,0 điểm)

Tìm các giá trị của a để tồn duy nhất cặp số (x, y) thỏa mãn

$$a. \sqrt{x+y} = \sqrt{3x+2} \cdot \sqrt{y}$$

Câu 7. (1,0 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ và điểm $A(5; 2)$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC đều.

Câu 8. (1,0 điểm)

Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$ và $d_2 : \frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+7}{-1}$.

Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và tạo với d_2 một góc bằng 30° .

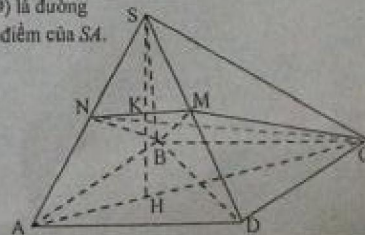
Câu 9. (1,0 điểm) Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}}$

..... Hết

Dự kiến kì thi thử Đại học lần thứ 4 sẽ được tổ chức vào ngày 13,14/4/2013

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM
THI THỬ ĐH LẦN III - NĂM 2013

| Câu | ĐÁP ÁN | ĐIỂM |
|-----------------|--|------|
| I (2 điểm) | 1. (1,0 điểm). Học sinh tự giải. | 1,00 |
| | 2. (1,0 điểm) Tìm k để ... Pt của $\Delta: y = k(x-1) + 2$. Để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi pt sau có hai nghiệm phân biệt $\frac{2x+1}{x-1} = k(x-1) + 2 \Leftrightarrow \text{pt } kx^2 - 2kx + k - 3 = 0$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1. • Nếu $k = 0$ thì (*) trở thành $-3 = 0 \Rightarrow$ vô lý. Trường hợp này không thỏa mãn (loại). • Nếu $k \neq 0$, Pt (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} k - 2k + k - 3 \neq 0 \\ \Delta' = k^2 - k(k-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > 0$. | 0,50 |
| | Giải sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ trong đó x_1, x_2 là nghiệm của pt(*). Theo hệ thức Viet ta có $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2x_I \Rightarrow I$ là trung điểm của MN . Do ΔAMN vuông tại A nên $2AI = MN \Leftrightarrow MN^2 = 40 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 40 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + k^2(x_2 - x_1)^2 = 40$ $\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2(k^2 + 1) = 40 \Leftrightarrow [(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2](k^2 + 1) = 40 \Leftrightarrow (4 - 4 \cdot \frac{k-3}{k})(k^2 + 1) = 40$ (vì $x_1x_2 = \frac{k-3}{k}$). Giải phương trình trên ta được hai giá trị $k = 3, k = \frac{1}{3}$ đều thỏa mãn bài toán. | 0,50 |
| II (1 điểm) | 1. (1,0 điểm). Giải phương trình ... Điều kiện: $\cos x \neq 0, \cos \frac{x}{2} \neq 0$. Pt $\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6}) + \sin(x + \frac{\pi}{6})}{\cos x} + \frac{\sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + \cos x = \frac{2 \sin x \cos \frac{\pi}{6}}{\cos x} + \frac{\sin x \sin \frac{x}{2} + \cos x \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$ | 0,50 |
| | $\Leftrightarrow 1 + \tan^2 x = \sqrt{3} \tan x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \text{ với } k \in \mathbb{Z}$ | 0,50 |
| | Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là: $x = 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). | |
| III (1 điểm) | 2. (1,0 điểm). Giải bất phương trình Điều kiện $x \geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt{x+24} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+24} - \sqrt{x}} < \frac{27}{8} \cdot \frac{24+x-2\sqrt{x(24+x)}+x}{24+x+2\sqrt{x(24+x)}+x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+24} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+24} - \sqrt{x}} < \frac{27(\sqrt{x+24} - \sqrt{x})^2}{8(\sqrt{x+24} + \sqrt{x})^2}$ | 0,50 |
| | $\Leftrightarrow 8(\sqrt{x+24} + \sqrt{x})^3 < 27(\sqrt{x+24} - \sqrt{x})^3 \Leftrightarrow 2(\sqrt{x+24} + \sqrt{x}) < 3(\sqrt{x+24} - \sqrt{x})$ $\Leftrightarrow 5\sqrt{x} < \sqrt{x+24} \Leftrightarrow 0 \leq 25x < x+24 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$. | 0,50 |
| | Đáp số: $0 \leq x < 1$. | |
| IV (1 điểm) | 1. (1,0 điểm). Tính tích phân... Ta có $\frac{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \sin x (1 - \sin x)}{\cos^2 x \cos x} = \frac{(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) \sin x (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})^2}{(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) \cos^2 x (\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ Suy ra $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} d(\cos x) = \frac{1}{\cos x} \Big _0^{\frac{\pi}{3}} = 1$. | 1,00 |
| V (1 điểm) | (1,0 điểm). Tính thể tích và chứng minh Vì $BC \parallel AD$ và $AD \in \text{mp}(SAD)$ nên giao tuyến của (BCM) với (SAD) là đường thẳng qua M song song với AD , suy ra $MN \parallel AD$ do đó N là trung điểm của SA . Ta có $V_{SBCD} = V_{SABD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{10} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{10}$. $\frac{V_{SBMN}}{V_{SABD}} = \frac{SN \cdot SM}{SA \cdot SD} = \frac{1}{4}$, $\frac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}} = \frac{SM}{SD} = \frac{1}{2}$ Suy ra $V_{SBMN} = V_{SBMN} + V_{SBMN} = \frac{1}{2} V_{SBCD} + \frac{1}{4} V_{SABD}$. Vậy, $V_{SBMN} = \frac{9\sqrt{10}a^3}{8}$. | 0,50 |



| | | |
|------------------|--|------|
| | <p>Trong $\triangle SAC$, nối CN cắt SH tại K thì K là giao điểm của (BCM) với SH.</p> <p>Ta có $CH = \frac{2}{3} AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = 3a\sqrt{2} = AC$.</p> <p>Vậy tam giác SAC cân tại C và N là trung điểm của SA, nên CN \perp SA, do đó K là trực tâm của tam giác SAC.</p> | 0,50 |
| VII (1 điểm) | <p>1. (1,0 điểm). Chứng minh rằng,....</p> <p>Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$.</p> <p>Nhận xét: Với mọi a phương trình $a\sqrt{x+y} = \sqrt{3x} + 2\sqrt{y}$ (*) luôn có ít nhất một nghiệm là (0; 0).</p> <p>Ta sẽ tìm a để pt(*) không có nghiệm (x; y) với $x+y > 0 \Leftrightarrow pt(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x}{x+y}} + 2\sqrt{\frac{y}{x+y}} = a$ vô nghiệm với $x+y > 0$.</p> <p>Đặt $t = \frac{x}{x+y}, 0 \leq t \leq 1$. Xét $f(t) = \sqrt{3t} + 2\sqrt{1-t}, t \in [0; 1]$. Ta có $f'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ với $t \in (0; 1)$</p> <p>$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{7}$ và $f(0) = 2, f(1) = \sqrt{3}, f(\frac{3}{7}) = \sqrt{7}$.</p> <p>Suy ra $\min_{t \in [0; 1]} f(t) = \sqrt{3}$ và $\max_{t \in [0; 1]} f(t) = \sqrt{7}$.</p> <p>Do đó phương trình $f(t) = a$ không có nghiệm trong đoạn $[0; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} a > \sqrt{7} \\ a < \sqrt{3} \end{cases}$</p> <p>Đáp số: $\begin{cases} a > \sqrt{7} \\ a < \sqrt{3} \end{cases}$.</p> | 0,50 |
| VIII (1 điểm) | <p>2. (1,0 điểm). Viết phương trình đường thẳng</p> <p>Nhận thấy A(5; 2) thuộc đường tròn (C), mà $\triangle ABC$ đều nên tâm I(2; 1) của (C) là trọng tâm của tam giác ABC.</p> <p>Gọi H(x; y) là trung điểm của BC thì AH \perp BC và $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AI} \Rightarrow H(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$.</p> <p>Suy ra đường thẳng d đi qua H và nhận $\overrightarrow{IA} = (3; 1)$ làm vector pháp tuyến.</p> <p>Vậy phương trình đường thẳng d là: $3x + y - 2 = 0$.</p> | 0,50 |
| VIII (1 điểm) | <p>(1,0 điểm). Lập phương trình mặt phẳng</p> <p>Gọi phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ trong đó $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.</p> <p>Vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n}(A; B; C)$, vector chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1(1; -1; 1)$ và $\vec{u}_2(2; 1; -1)$.</p> <p>Mặt phẳng (P) chứa d_1 tạo với d_2 góc 30° nên:</p> $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \cos(\vec{n}, \vec{u}_2) = \sin 30^\circ \end{cases}$ <p>Từ đó ta có hệ phương trình:</p> $\begin{cases} A - B + C = 0 \\ \frac{ 2A + B - C }{\sqrt{6} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{2} \end{cases}$ <p>Giải hệ trên ta được (P): $x + 2y + z + D_1 = 0; x - y - 2z + D_2 = 0$, mặt khác điểm M(1; 1; 2) $\in d_1 \subset (P)$</p> <p>Từ đó suy ra có hai mặt phẳng thỏa mãn bài toán là:</p> <p>(P₁): $x - y - 2z + 4 = 0$ và (P₂): $x + 2y + z - 5 = 0$.</p> | 0,50 |
| IX (1 điểm) | <p>(1,0 điểm). Tìm phần thực và phần ảo</p> <p>Ta có $(1+i)^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^4 = (2i)^2 = -4$ và $(1-i)^2 = -2i \Rightarrow (1-i)^4 = (-2i)^2 = -4$,</p> <p>Suy ra $z = \frac{[(1+i)^4]^{25}}{[(1-i)^4]^{24} - i(1+i)^2[(1+i)^4]^{24}}$</p> $= \frac{(-4)^{25}}{(-4)^{24} - 2i^2(-4)^{24}} = \frac{(-4)^{25}}{3 \cdot 4^{24}} = \frac{-4}{3}$ <p>Vậy số phức z có phần thực bằng $\frac{-4}{3}$ và phần ảo bằng 0.</p> | 0,50 |