BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2012
Môn: TOÁN; Khối A – A_1
Thời gian làm bài 180 phút không kể thời gian phát đề

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (1), với m là tham số thực.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0.

b. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

Câu 2 (1,0 điểm) Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$

Câu 3 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Câu 4 (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{1+\ln(x+1)}{x^2}dx$

Câu 5 (1,0 điểm) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Câu 6 (1,0 điểm) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$.

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): ***Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)***

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho CN = 2ND. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

Câu 8.a (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $I(0;0;3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I.

Câu 9.a (1,0 điểm) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n$, $x \neq 0$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

Câu 8.b (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(1;-1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Câu 9.b (1,0 điểm) Cho số phức z thỏa $\frac{5(\bar{z}+i)}{z+1} = 2 - i$. Tính môđun của số phức $w = 1 + z + z^2$.

------ HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh:……………………………………………..; Số báo danh:……………………………

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN CHUNG:

Câu 1:

a. Khảo sát và vẽ (C) :

Với $m = 0 \Rightarrow y = x^4 - 2x^2$

* TXĐ: $D = \mathbb{R}$

* Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

$y' = 4x^3 - 4x,\ y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên $(-1;0)\cup(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-1)\cup(0;1)$

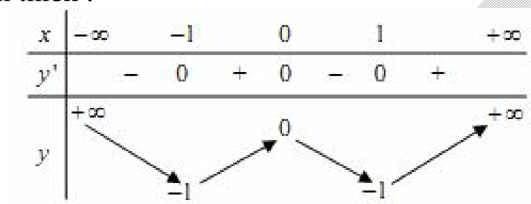
- Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow y_{CĐ} = 0$, đạt cực tiểu tại $x = \pm 1 \Rightarrow y_{CT} = -1$

- Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty \Rightarrow$ Hàm số không có tiệm cận

- Bảng biến thiên :



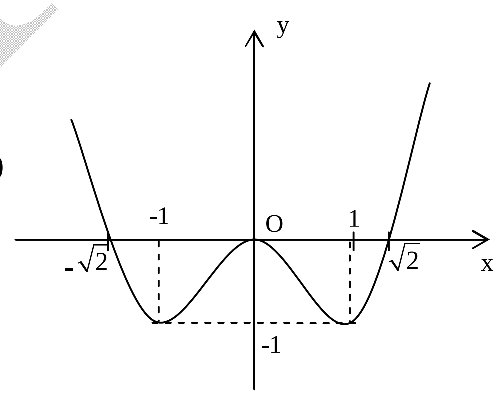
* Đồ thị:

- Giao với trục Ox: Cho $y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

- Giao với trục Oy: Cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Đồ thị tiếp xúc với Ox tại (0; 0) và cắt Ox tại hai điểm ($\pm\sqrt{2}$; 0)

- Đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng



b. Đạo hàm $y' = 4x^3 - 4(m+1)x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4(m+1)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = (m+1) \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Khi đó đồ thị hàm số có 3 cực trị $A(0;\ m^2); B\left(-\sqrt{m+1}; -2m-1\right); C\left(\sqrt{m+1}; -2m-1\right)$

Nhận xét: $A \in Oy$, B và C đối xứng qua Oy nên tam ABC cân tại A tức là AB = AC nên tam giác chỉ có thể vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC $\Rightarrow M(0;-2m-1)$

Do đó để tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow$ BC = 2AM (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

$\Leftrightarrow 2\sqrt{m+1} = 2\left(m^2 + 2m + 1\right) = 2(m+1)^2 \Leftrightarrow 1 = (m+1)\sqrt{m+1} = (m+1)^{\frac{3}{2}}$ (do $m > -1$)

$\Leftrightarrow 1 = (m+1) \Leftrightarrow m = 0$ (do $m > -1$)

Cách 2: ABC vuông cân tại A. Theo định lý pitago ta có

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow (m+1)\left[(m+1)^3 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow (m+1)^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (do $m > -1$)

Cách 3: ABC vuông cân tại A

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -(m+1) + (-2m - 1 - m^2)^2 = 0 \Leftrightarrow m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$

hoặc $m = -1$ (loại)

Với $\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{m+1}; -2m-1-m^2\right); \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{m+1}; -2m-1-m^2\right)$

Cách 4: Sử dụng góc ABC vuông cân tại A $\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}\right) = 45^0$… Giải tiếp được $m = 0$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm

Câu 2:

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 2\cos x - 1 \Leftrightarrow 2\cos x(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sqrt{3}\sin x + \cos x = 1\end{array}\right.$$

TH 1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

TH 2: $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\\ x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\\ x = k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Chú ý: TH 2 ta có thể làm như sau

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có các nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi; x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi; x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý: Nếu giải phương trình $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$**, vẫn đúng**

Câu 3:

Nhận xét: Đây là hệ nửa đối xứng chỉ cần đặt $t = -x$ **sẽ trở thành hệ đối xứng**

Cách 1:

$$\begin{cases}x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y\\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Đặt $t = -x$

Hệ trở thành $\begin{cases}t^3 + y^3 + 3t^2 + 3y^2 - 9(t + y) = 22\\ t^2 + y^2 + t + y = \dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Đặt $S = y + t;\ P = y.t$

Hệ trở thành $\begin{cases}S^3 - 3PS + 3(S^2 - 2P) - 9S = 22\\ S^2 - 2P + S = \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}S^3 - 3PS + 3(S^2 - 2P) - 9S = 22\\ P = \dfrac{1}{2}\left(S^2 + S - \dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2S^3 + 6S^2 + 45S + 82 = 0\\ P = \dfrac{1}{2}(S^2 + S - \dfrac{1}{2})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}P = \dfrac{3}{4}\\ S = -2\end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = \left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right); \left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$

Cách 2:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left[(x-y)^2+3xy\right]-3\left[(x-y)^2+2xy\right]-9(x-y)+22=0 \\ (x-y)^2+2xy-(x-y)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=x-y \\ b=xy \end{cases}$

Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} u\left(u+v+\dfrac{1}{2}\right)-3\left(u+\dfrac{1}{2}\right)-9u+22=0 & (1) \\ u^2-u+2v=\dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$

Rút v từ $(2) \Rightarrow v=\dfrac{1+2u-2u^2}{4}$ thay vào (1) ta được

$$u^3+3u\left(\frac{1+2u-2u^2}{4}\right)-3u^2-6\left(\frac{1+2u-2u^2}{4}\right)-9u+22=0 \Leftrightarrow 6u^2-2u^3-45u+82=0 \Leftrightarrow u=2$$

Với $u=2 \Rightarrow v=-\dfrac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

Cách 3:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=x-\dfrac{1}{2} \\ v=y+\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=u+\dfrac{1}{2} \\ y=v-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ thay vào hệ biến đổi ta được

$$\begin{cases} u^3-\dfrac{3}{2}u^2-\dfrac{45}{4}u=(v+1)^3-\dfrac{3}{2}(v+1)^2-\dfrac{45}{4}(v+1) \\ u^2+v^2=1 \end{cases}$$

Xét hàm $f(t)=t^3-\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{45}{4}t$ có $f'(t)=3t^2-3t-\dfrac{45}{4}<0$ với mọi t thỏa $|t|\le 1$

$\Rightarrow f(u)=f(v+1) \Rightarrow u=v+1 \Rightarrow (v+1)^2+v^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=0 \\ v=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} v=0 \\ u=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} v=-1 \\ u=0 \end{cases}$

Với $\begin{cases} v=0 \\ u=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} v=-1 \\ u=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

Cách 4:

Biến đổi hệ ta được $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2+xy)-3(x^2+y^2)-9(x-y)+22=0 \\ 2(x^2+y^2)-2(x-y)=1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = x^2 + y^2, a \ge 0 \\ b = x - y \end{cases} \Rightarrow (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \Rightarrow xy = \dfrac{x^2 + y^2 - (x-y)^2}{2} = \dfrac{a - b^2}{2}$

Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} b\left(a + \dfrac{a - b^2}{2}\right) - 3a - 9b + 22 = 0 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-2)(2b^2 - 2b + 41) = 0 \\ a = \dfrac{2b+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2} \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right); \left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$

Cách 5:

Ta có

$x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \Leftrightarrow (x-1)^3 - 12x + 23 = (y+1)^3 - 12y$

$\Leftrightarrow (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) \quad (1)$

$x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad (2)$

Từ (2) nhận thấy $\begin{cases} \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \le 1 \\ \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x - \dfrac{1}{2} \le 1 \\ -1 \le y + \dfrac{1}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3}{2} \le x - 1 \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-1}{2} \le y + 1 \le \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Nên $x - 1$ và $y + 1$ đều thuộc $(-2;2)$

Từ (1), xét $f(t) = t^3 - 12t$ với $t \in (-2;2) \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 12 < 0, \forall t \in (-2;2)$

(vì $x - 1; y + 1 \in (-2;2)$) nên (1) $\Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow x = y + 2$

Thay vào phương trình (2) ta được $(y+2)^2 + y^2 - (y+2) + y = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4y^2 + 8y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{-3}{2}; x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{-1}{2}; x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm: $(x;y) = \left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right); \left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$

Cách 6:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2 + y^2 + xy - 9) + 22 = 3(x^2 + y^2) \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai của hệ

$\Rightarrow \exists a: \begin{cases} x - \dfrac{1}{2} = \cos a \\ y + \dfrac{1}{2} = \sin a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \cos a \\ y = -\dfrac{1}{2} + \sin a \end{cases}$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$(1 + \cos a - \sin a)\left(\dfrac{3}{2} + \cos a - \sin a + \cos a \sin a - \dfrac{\cos a - \sin a}{2} - \dfrac{37}{4}\right) + 22 = 3\left(\dfrac{3}{2} + \cos a - \sin a\right)$$

Đặt $t = \cos a - \sin a \Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{1 - t^2}{2}$ với $|t| \le \sqrt{2}$ thì PT trên trở thành:

$(1+t)\left(\frac{3}{2}+t+\frac{1-t^2}{2}-\frac{t}{2}-\frac{37}{4}\right)+22=3\left(\frac{3}{2}+t\right)$

$\Leftrightarrow 2t^3+39t-41=0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+2t+41) \Leftrightarrow t=1$ vì $2t^2+2t+41=0$ vô nghiệm

Khi $t=1 \Leftrightarrow \cos a-\sin a=1 \Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow \cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2k\pi \\ a=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z} \Rightarrow (x;y)=\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Câu 4:

Cách 1:

Ta có $I=\int_1^3 \frac{1+\ln(x+1)}{x^2}dx = \int_1^3 \frac{1}{x^2}dx+\int_1^3\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^3+J = \frac{2}{3}+J$.

Tính $J=\int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ dv=\frac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x+1}dx \\ v=-\frac{1}{x}-1=-\frac{x+1}{x} \end{cases}$

$J=\left(-\frac{1}{x}-1\right)\ln(x+1)\Big|_1^3+\int_1^3\frac{dx}{x}=\left(-\frac{1}{x}-1\right)\ln(x+1)\Big|_1^3+\ln x\Big|_1^3=-\frac{4}{3}\ln 4+2\ln 2+\ln 3=-\frac{2}{3}\ln 2+\ln 3$.

Vậy $I=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\ln 2+\ln 3$

Chú ý:

- Rất nhiều em không hiểu chỗ lấy nguyên hàm tại sao lại là $v=-\frac{1}{x}-1$ mà không phải là $v=-\frac{1}{x}$

Thông thường trong phương pháp TPTP khi lấy nguyên hàm thường chọn hằng số C = 0 việc đó hoàn toàn đúng nhưng không phải lúc cũng chọn C = 0 mà còn phụ thuộc vào tích phân $\int vdu$, các bạn có thể chọn C bất kì nhưng chọn làm sao cho tích phân $\int vdu$ dễ tính và đơn giản nhất như trong bài này chọn C = -1

- Các em có thể chọn $v=-\frac{1}{x}$ thì khi đó

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ dv=\frac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x+1}dx \\ v=-\frac{1}{x}dx \end{cases}$

$\Rightarrow J=-\frac{1}{x}\ln(x+1)\Big|_1^3+\int_1^3\frac{1}{x(x+1)}dx=-\frac{1}{3}\ln 4+\ln 2+\left[\int_1^3\frac{1}{x}dx-\int_1^3\frac{1}{x+1}dx\right]$

$=-\frac{1}{3}\ln 4+\ln 2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^3=\frac{1}{3}\ln 2+\ln\frac{3}{2}$

Vậy $I=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\ln 2+\ln\frac{3}{2}$

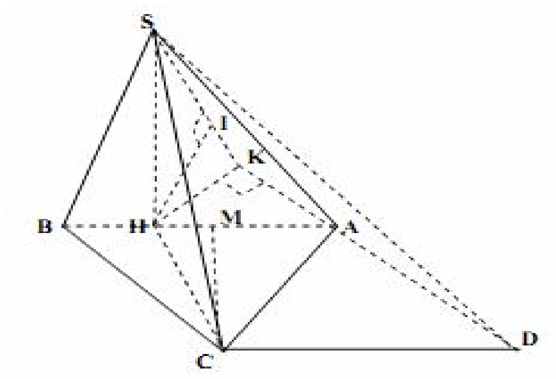
Cách 2:

Đặt $\begin{cases} u = 1 + \ln(x+1) \\ dv = \dfrac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

Khi đó $I = -\dfrac{1}{x}[1+\ln(x+1)]\Big|_1^3 + \int_1^3 \dfrac{dx}{x(x+1)} = -\dfrac{1}{x}[1+\ln(x+1)]\Big|_1^3 + \ln\dfrac{x}{x+1}\Big|_1^3 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}\ln 2 + \ln 3$

Câu 5:

Tính thể tích



Gọi M là trung điểm AB, ta có

$MH = MB - HB = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{3} = \dfrac{a}{6}$

- Theo giả thiết $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp HC \Rightarrow \Delta SHC$ vuông tại H và $(\widehat{SC,(ABC)}) = \widehat{SCH} = 60^0$

- Theo định lý pitago trong tam giác vuông HCM ta có

$$CH^2 = CM^2 + MH^2 = \left[\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \left[\dfrac{a}{6}\right]^2 = \dfrac{28a^2}{36}$$

$\Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$. Với $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ đường cao của tam giác đều ABC

Trong tam giác vuông SHC ta có

$SC = 2HC = \dfrac{2a\sqrt{7}}{3}$ (Cạnh đối diện với góc 30^0) và SH = CH.tan60^0 = $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{21}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{12}$$

Hoặc dựa vào định lý hàm số cosin trong tam giác CHB

$$CH^2 = CB^2 + BH^2 - 2BC.BH.\cos 60^0 = a^2 + \left(\dfrac{a}{3}\right)^2 - 2a.\dfrac{a}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{7a^2}{9} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$$

Tính khoảng cách

Cách 1:

Xét trong mặt phẳng (ABC) kẻ d qua A và song song với BC. Nên BC//(SA;d)

$d(BC,SA) = d\left[B,(SA,d)\right]$

Dựng hình thoi ABCD. Dựng HK sao cho: $\begin{cases} HK \perp AD (K \in AD) \\ HI \perp SK\,(I \in SK) \end{cases}$, ta có: $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AD$

Mà $HK \perp AD$ nên $AD \perp (SHK) \Rightarrow (SAD) \perp (SHK)$ và $HI \perp SK$ nên $HI \perp (SAD)$

$\Rightarrow$HI là khoảng cách từ H đến (SAD) $\Rightarrow KH = AH\sin\widehat{KAH} = \dfrac{2a}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SHK

$$\Rightarrow \dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{3}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} \Rightarrow HI = \dfrac{a\sqrt{42}}{12}$$

Vì BC//(SAD) và $HA = \dfrac{2}{3}AB$ nên khoảng cách cần tìm là:

$d\left(BC,SA\right)=\frac{3}{2}HI=\frac{3}{2}\frac{a\sqrt{42}}{12}=\frac{a\sqrt{42}}{8}$

Cách 2:

Dựng hình thoi ACBD trong mặt phẳng (ABC)

Vì BC//AD $\Rightarrow BC//(SAD)$

Do đó $d\left(SA,BC\right)=d\left[BC,\left(SAD\right)\right]=d\left[B,\left(SAD\right)\right]=\frac{3V_{SABD}}{S_{ABD}}$

Ta có $V_{SABD}=V_{SABC}=\frac{a^3\sqrt{7}}{12}$

Trong tam giác SAD có AD = a, $DH=CH=\frac{a\sqrt{7}}{3}$

$SA=\sqrt{SH^2+HA^2}=\sqrt{\frac{21a^2}{9}+\frac{4a^2}{9}}=\frac{5a}{3}$

$SD=\sqrt{SH^2+HD^2}=\sqrt{\frac{21a^2}{9}+\frac{7a^2}{9}}=\frac{2a\sqrt{7}}{3}$

Định lý hàm số cosin trong tam giác SAD

$\cos\widehat{SAD}=\frac{SA^2+AD^2-SD^2}{2SA.AD}=\frac{1}{5}\Rightarrow\sin\widehat{SAD}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{SAD}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

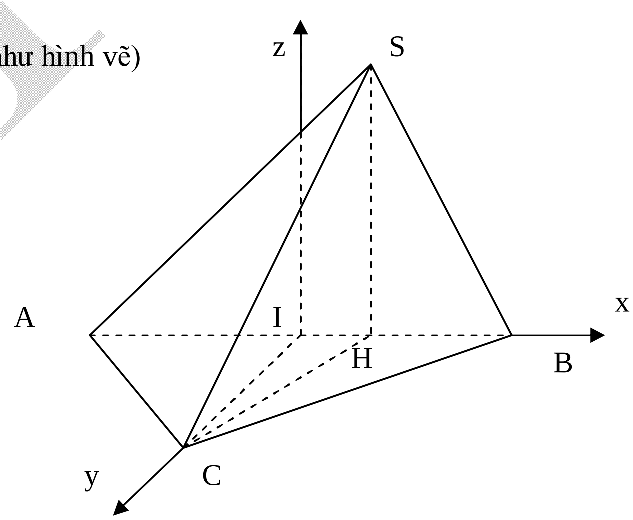
$\Rightarrow S_{\Delta SAD}=\frac{1}{2}SA.AD.\sin\widehat{SAD}=\frac{a^2\sqrt{6}}{3}\Rightarrow d\left(SA,BC\right)=\frac{3\frac{a^3\sqrt{7}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{42}a}{8}$

Cách 3: Tính thể tích và khoảng cách

Dựng Iz // HS . Chọn hệ trục Ixyz với $M\equiv I\equiv O\left(0;0;0\right)$ (như hình vẽ)

Tính IH và SH như trên khi đó tọa độ các điểm như sau

$A\left(\frac{-a}{2};0;0\right);B\left(\frac{a}{2};0;0\right);C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right);S\left(\frac{a}{6};0;\frac{a\sqrt{21}}{3}\right)$



Tính thể tích

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{SB}=\left(\frac{a}{3};0;-\frac{a\sqrt{21}}{3}\right);\overrightarrow{SA}=\left(-\frac{2a}{3};0;-\frac{a\sqrt{21}}{3}\right)\\ \overrightarrow{SC}=\left(-\frac{a}{6};\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a\sqrt{21}}{3}\right);\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=\left(0;\frac{a^2\sqrt{21}}{3};0\right)\\ \left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]\right|=\frac{a^2\sqrt{21}}{3}\\ \left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}=\frac{a^3\sqrt{63}}{6}\end{cases}\Rightarrow V_{SABC}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\frac{1}{6}.\frac{a^3\sqrt{63}}{6}=\frac{a^3\sqrt{7}}{12}$

Tính khoảng cách

$$\Rightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]=\left(\dfrac{a^2\sqrt{21}}{6};\dfrac{a^2\sqrt{7}}{2};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}\right)\\ \left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]\right|=\sqrt{\dfrac{21a^4}{36}+\dfrac{63a^4}{36}+\dfrac{12a^4}{36}}=\dfrac{4\sqrt{6}a^2}{6}\Rightarrow d\left(SA,BC\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]\right|}=\dfrac{a^3\sqrt{7}}{2}\cdot\dfrac{6}{4\sqrt{6}a^2}=\dfrac{a\sqrt{42}}{8}\\ \left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}=\dfrac{a^3\sqrt{7}}{2}\end{cases}$$

Câu 6:

Cách 1:

$x+y+z=0\Rightarrow z=-\left(x+y\right)$ và có 2 số không âm hoặc không dương.

Do tính chất đối xứng ta có thể giả sử $xy\ge 0$

Ta có $P=3^{|x-y|}+3^{|2y+x|}+3^{|2x+y|}-\sqrt{12(x^2+y^2+xy)}=3^{|x-y|}+3^{|2y+x|}+3^{|2x+y|}-\sqrt{12[(x+y)^2-xy]}$

$\ge 3^{|x-y|}+2.3^{\frac{|2y+x|+|2x+y|}{2}}-\sqrt{12[(x+y)^2-xy]}\ge 3^{|x-y|}+2.3^{\frac{3|x+y|}{2}}-2\sqrt{3}\left|x+y\right|$.

Với $\left|2x+y\right|+\left|2y+x\right|\ge 3\left|x+y\right|$ và $xy\le\dfrac{\left(x+y\right)^2}{4}$

Đặt $t=\left|x+y\right|\ge 0$, xét $f\left(t\right)=2.(\sqrt{3})^{3t}-2\sqrt{3}t$

$f'\left(t\right)=2.3(\sqrt{3})^{3t}.\ln\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}(\sqrt{3}.(\sqrt{3})^{3t}\ln\sqrt{3}-1)>0$

$\Rightarrow$ f đồng biến trên $[0;+\infty)\Rightarrow f\left(t\right)\ge f\left(0\right)=2$ mà $3^{|x-y|}\ge 3^0=1$.

Vậy $P\ge 3^0+2=3$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=0$. Vậy min P = 3.

Cách 2:

Không mất tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z$.

Từ $x+y+z=0\Rightarrow z=-\left(x+y\right)$ do đó,

$P=3^{x-y}+3^{y-z}+3^{x-z}-\sqrt{12\left(x^2+y^2+\left(x+y\right)^2\right)}=3^{x-y}+3^{2y+x}+3^{2x+y}-\sqrt{12\left(x^2+y^2+\left(x+y\right)^2\right)}$

Đặt $\begin{cases}a=2x+y\\ b=2y+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2a-b}{3}\\ y=\dfrac{2b-a}{3}\end{cases}$ với $a\ge b\ge 0$

Thay vào P ta được: $P=3^{a-b}+3^a+3^b-2\sqrt{a^2-ab+b^2}=3^{a-b}+3^a+3^b-2\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2}$

Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{a+b}{2}\\ v=\dfrac{a-b}{2}\end{cases}$ thì $u\ge v\ge 0$ và ta có : $P=9^v+3^{u+v}+3^{u-v}-2\sqrt{u^2+3v^2}$

Xét hàm:

$P=f(u)=9^v+3^{u+v}+3^{u-v}-2\sqrt{u^2+3v^2}, u\ge v\ge 0$

$f'(u)=3^{u+v}\ln 3+3^{u-v}\ln 3-\dfrac{2u}{\sqrt{u^2+3v^2}}\ge 2\ln 3-2>0$

$\Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $\left[v;+\infty\right)$ kéo theo

$f(u)\ge f(v)=9^v+3^{2v}+1-2\sqrt{4v^2}=2.9^v-4v+1\quad(1)$

Xét $g(v)=2.9^v-4v+1, v\ge 0$; $g'(v)=2.9^v\ln 9-4=4.9^v\ln 3-4\ge 4\ln 3-4>0\;\; do\, v\ge 0$

Suy ra $g(v)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$ $\Rightarrow g(v)\ge g(0)=3\qquad(2)$

Từ (1) và (2), suy ra $f(u)\ge 3$ hay $P\ge 3$

Đẳng thức xảy ra khi $u=v=0 \Leftrightarrow x=y=z=0$

Vậy min P = 3

Cách 3:

Đặt $a=|x-y|, b=|y-z|, c=|z-x|$

Từ giả thiết suy ra $x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)$

Do đó $6(x^2+y^2+z^2)=2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)$

Vì vậy nếu đặt $a=|x-y|, b=|y-z|, c=|z-x|$ thì $a,b,c\ge 0$ và $a+b\ge c, b+c\ge a, c+a\ge b$

Ta có $P=3^a+3^b+3^c-\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$

Vì $a+b\ge c$ nên $(a+b)c\ge c^2$

Tương tự $(b+c)a\ge a^2; (c+a)b\ge b^2$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được $2(ab+bc+ca)\ge a^2+b^2+c^2 \Rightarrow (a+b+c)^2\ge 2(a^2+b^2+c^2)$

Do vậy $P\ge 3^a+3^b+3^c-(a+b+c)=(3^a-a)+(3^b-b)+(3^c-c)$

Xét hàm $f(x)=3^x-x, x\ge 0; f'(x)=3^x\ln 3-1>0 \Rightarrow f(x)\ge f(0)=1$

Vậy $P\ge 3$, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=0$

Cách 4:

Dễ dàng ta cm được $3^t\ge 1+t, \forall t\ge 0$, từ đó áp dụng vào bài toán ta có:

$P\ge 3+|x-y|+|y-z|+|z-x|-\sqrt{6(x^2+y^2+z^2)}$

Mặc khác : $(|x-y|+|y-z|+|z-x|)^2=(x-y)^2+(y-z)^2+$

$+(z-x)^2+|x-y|(|y-z|+|z-x|)+|y-z|(|x-y|+|z-x|)+|z-x|(|x-y|+|y-z|)$

Hơn nữa áp dụng BĐT $|a|+|b|\ge|a+b|$ ta có

$(|x-y|+|y-z|+|z-x|)^2\ge 2[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x^2)]=6(x^2+y^2+z^2)$

Suy ra $P\ge 3 \Rightarrow \min P=3 \Leftrightarrow x=y=z=0$.

PHẦN RIÊNG:

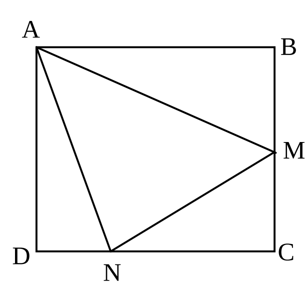
A. Theo chương trình chuẩn

Câu 7a.

Cách 1:

Gọi cạnh hình vuông là a tức là $AB=BC=CD=DA=a$

Trong tam giác vuông ADN



Ta có : $\begin{cases} AN=\sqrt{AD^2+DN^2} \\ DN=\frac{1}{2}CN=\frac{1}{3}DC=\frac{1}{3}AD=\frac{1}{3}a \end{cases} \Rightarrow AN=\frac{a\sqrt{10}}{3}$

Trong tam giác vuông ABM

Ta có : $\begin{cases} AM=\sqrt{AB^2+BM^2} \\ BM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a \end{cases} \Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Tương tự trong tam giác vuông CMN ta tính được $MN=\frac{5a}{6}$

Theo định lý hàm số cosin trong tam giác MAN ta có

$\cos A = \dfrac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM.AN} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{MAN} = 45^o$

Phương trình đường thẳng AM : $ax + by - \dfrac{11}{2}a - \dfrac{1}{2}b = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_{AM}} = (a;b)$

$\cos \widehat{MAN} = \dfrac{|2a-b|}{\sqrt{5(a^2+b^2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3t^2 - 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$ (với $t = \dfrac{a}{b}$)

+ Với $t = 3 \Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4;5)$

+ Với $t = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;-1)$

Vậy có hai điểm A thỏa mãn là $A(4;5)$ hoặc $A(1;-1)$

Chú ý: Để tính góc $\widehat{MAN} = 45^o$ ta còn có thể làm như sau

Nhận xét:

$\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{NAM} \Rightarrow \tan \widehat{NAM} = \cot(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = \dfrac{1}{\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})}$

$= \dfrac{1 - \tan \widehat{BAM}.\tan \widehat{DAN}}{\tan \widehat{BAM} + \tan \widehat{DAN}} = \dfrac{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \widehat{NAM} = 45^0$

Với $\tan \widehat{BAM} = \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{1}{2}; \tan \widehat{DAN} = \dfrac{DN}{DA} = \dfrac{1}{3}$

Hoặc: $\tan \widehat{MAN} = \tan(\widehat{DAM} - \widehat{DAN}) = \dfrac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2.\frac{1}{3}} = 1$

Cách 2:

Sau khi tính được $\widehat{MAN} = 45^o$

Giả sử điểm $A(a;2a-3) \in AN$

$d(M, AN) = \dfrac{\left|11 - \frac{1}{2} - 3\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{15}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

Trong tam giác vuông AHM ta có $MA = \dfrac{MH}{\sin 45^0} = MH.\sqrt{2} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

$\Leftrightarrow \left(a - \dfrac{11}{2}\right)^2 + \left(2a - \dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{45}{2} \Leftrightarrow 5a^2 - 25a + 20 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(1;-1) \\ A(4;5). \end{array}\right.$

Hoặc: Sau khi tính được $MA = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ ta có thể làm như sau

Tọa độ điểm A là giao của đường thẳng AN và đường tròn (C) có tâm M và bán kính MA

Cách 3:

Để tính $MA = \dfrac{3\sqrt{10}}{2} = \sqrt{\dfrac{45}{2}}$ ta có không cần tính $\widehat{MAN} = 45^o$ mà dựa vào công thức tính diện tích

$$h = d\left(M, AN\right) = \frac{\left|11 - \frac{1}{2} - 3\right|}{\sqrt{2^2 + \left(-1\right)^2}} = \frac{15}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Đặt $AB = 6x, x > 0$

Ta có

$S_{ADN} = \frac{1}{2}AD.DN = \frac{1}{2}6x.2x = 6x^2$; $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.BM = \frac{1}{2}6x.3x = 9x^2$

T

$S_{CMN} = \frac{1}{2}CM.CN = \frac{1}{2}3x.4x = 6x^2 \Rightarrow S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ADN} - S_{ABM} - S_{CMN} = 36x^2 - 6x^2 - 9x^2 - 6x^2 = 15x^2$

heo định lý pitago

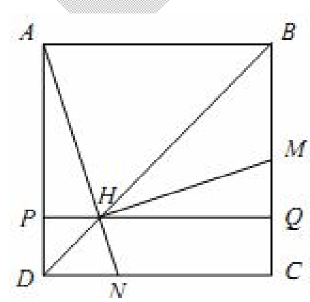
$AN = \sqrt{AD^2 + DN^2} = \sqrt{36x^2 + 4x^2} = 2\sqrt{10}x$

$\Rightarrow h = \frac{2S_{AMN}}{AN} = \frac{30x^2}{2\sqrt{10}x} = \frac{15x}{\sqrt{10}} \Rightarrow \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Định lý pitago $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{36x^2 + 9x^2} = \sqrt{145}x = \sqrt{\frac{45}{2}}$

Chú ý: Có thể đặt AB = x, x > 0

Cách 4: (Đáp án của BGD)



Gọi H là giao điểm của AN và BD. Qua H kẻ đường thẳng song song AB cắt AD, BC lần lượt taih P và Q

Đặt $HP = x \Rightarrow PD = x, AP = 3x$ và $HQ = 3x$

Ta cũng có $QC = x \Rightarrow MQ = x$. Do đó $\Delta AHP = \Delta HMQ$

$\Rightarrow AH \perp HM$

Mặt khác $AH = HM \Rightarrow AM = \sqrt{2}MH = \sqrt{2}d(M, AN) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

… Giải tương tự các cách trên

Câu 8a.

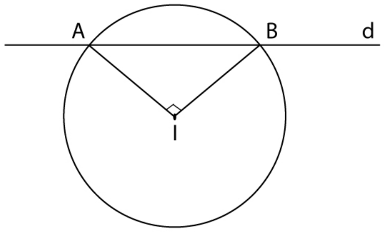
Cách 1:

Chọn $M\left(-1;0;2\right) \in d$, gọi $\overrightarrow{u_d} = (1; 2; 1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

Ta có ΔIAB vuông cân tai I và ΔIHB vuông cân tại H (với H là trung điểm của AB)

$$\Rightarrow \begin{cases} IH = HB = \frac{AB}{2} \\ HB = R\cos 45^0 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \\ IH = d(I,d) = \frac{\left|[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{u_d}]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ với } [\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{u_d}] = (-2;0;2)$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R là : $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}$.



Chú ý: Để tính IH ta có thể tìm tọa độ điểm H như sau

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua I góc với đường thẳng d, tọa độ $H=(P)\cap d\Rightarrow IH$

- Giả sử $H(-1-t;2t;2+t)\Rightarrow \overrightarrow{IH}$ **. Áp dụng** $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_d}=0\Rightarrow t\Rightarrow IH$

Cách 2:

Chuyển d về dạng tham số $d:\begin{cases}x=-1+t\\y=2t\\z=2+t\end{cases}$

Gọi $\begin{cases}A(a-1;2a;a+2)\\B\left(b-1;2b;b+2\right)\\I\left(0;0;3\right)\end{cases}$ với $a\neq b$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}=\left(a-1;2;a-1\right);\overrightarrow{IB}=\left(b-1;2b;b-1\right)$

$\Rightarrow IA^2=2\left(a-1\right)^2+4a^2=6a^2-4a+2;IB^2=2\left(b-1\right)^2+4b^2=6b^2-4b+2$

Vì ΔIAB vuông cân tại I nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0\\IA^2=IB^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\left(a-1\right)\left(b-1\right)+4ab=0\\6a^2-4a+2=6b^2-4b+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3ab-\left(a+b\right)+1=0 & (1)\\\left(a-b\right)\left[6\left(a+b\right)-4\right]=0 & (2)\end{cases}$$

Từ (2) vì $a\neq b\Leftrightarrow a+b=\dfrac{2}{3}$ thế vào (1)

Ta được $ab=-\dfrac{1}{9}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}\\b=\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}\end{cases}\Rightarrow IA^2=\dfrac{8}{3}$

Vậy $\left(S\right):x^2+y^2+\left(z-3\right)^2=\dfrac{8}{3}$

Cách 3:

Gọi $\begin{cases}A(a-1;2a;a+2)\\B\left(b-1;2b;b+2\right)\\I\left(0;0;3\right)\end{cases}$ với a ≠ b

Giả sử phương trình mặt cầu (S) tâm I có dạng $\left(S\right):x^2+y^2+\left(z-3\right)^2=R^2$ với $R^2=\dfrac{AB^2}{2}=3(a-b)^2$

$$\begin{cases}A\in(S)\Leftrightarrow\left(S\right):(a-1)^2+(2a)^2+\left(a-1\right)^2=3(a-b)^2\\B\in(S)\Leftrightarrow\left(S\right):(b-1)^2+(2b)^2+\left(b-1\right)^2=3(a-b)^2\end{cases}\ldots \text{ Giải hệ này ta được }\begin{cases}a=\\b=\end{cases}\Rightarrow R\Rightarrow(S)$$

Câu 9.a.

Điều kiện: $\begin{cases}n>3\\n\in N\end{cases}$

Theo giả thiết $5C_n^{n-1}=C_n^3\Leftrightarrow 5.n=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\Leftrightarrow 30=\left(n-1\right)\left(n-2\right)\Leftrightarrow n^2-3n-28=0\Leftrightarrow n=7$ hoặc $n=-4$ (loại)

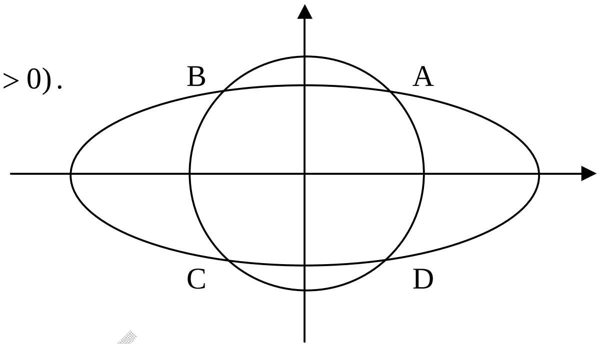
Gọi a là hệ số của x^5 theo công thức khai triển nhị thức niuton hệ số tổng quát của khai triển $\left(\dfrac{nx^2}{14}-\dfrac{1}{x}\right)^n$ là $C_7^{7-i}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{7-i}.\left(-\dfrac{1}{x}\right)^i=ax^5\Leftrightarrow(-1)^iC_7^{7-i}.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{7-i}.x^{14-3i}=ax^5$ (với $i\in N,i\le 7$)

Hệ số x^5 ứng với $14-3i=5\Rightarrow i=3$ và $-C_7^{7-i}.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{7-i}=a\Rightarrow a=\dfrac{-35}{16}$

Vậy số hạng chứa x^5 là $\frac{-35}{16}x^5$

B. Theo chương trình Nâng cao :

Câu 7b



Phương trình chính tắc của (E) có dạng : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$.

Theo giả thiết độ dài trục lớn bằng 8 $\Leftrightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4$

Do tính đối xứng của (E) nên giao điểm của (C) và (E) là đỉnh hình vuông thỏa mãn $M(m;m), m>0$

Suy ra $M\in(C) \Leftrightarrow m^2+m^2=8 \Rightarrow m=2 \Rightarrow M(2;2)$

Mặt khác $M(2;2)\in(E) \Leftrightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2=\frac{16}{3}$.

Vậy phương trình của (E) có dạng: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$

Chú ý: Đường tròn và Elip nhận gốc O làm tâm đối xứng nên 4 đỉnh của hình vuông là $A(m;m);B(-m;m);C(-m;-m);D(m;-m)$

Câu 8b.

Cách 1:

Chuyển đường thẳng d về dạng tham số $d:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=t\\ z=2+t\end{cases}$

Đường thẳng Δ cắt d tại $M\in d \Rightarrow M(-1+2t;t;2+t)$

Theo giả thiết A là trung điểm MN theo công thức tính trung điểm

$$\begin{cases}x_A=\frac{x_M+x_N}{2}\\ y_A=\frac{y_M+y_N}{2}\\ z_A=\frac{z_M+z_N}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_N=3-2t\\ y_N=-2-2t\\ z_N=2-t\end{cases} \Rightarrow N(3-2t;-2-t;2-t)$$

Mặt khác $N\in(P) \Leftrightarrow 1.(3-2t)+1.(-2-t)-2.(2-t)+5=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow N(-1;-4;0)$;

Vậy đường thẳng Δ đi qua A và N nên phương trình có dạng : $\frac{x+1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{2}$

Chú ý: Nếu học sinh viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và có vtcp $\overrightarrow{MA}=(-2;-3;-2)$ thì phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\ y=-1-3t\\ z=2-2t\end{cases}$ vẫn đúng

Hoặc nếu chọn $\overrightarrow{MA}=(2;3;2)$ thì $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+3t\\ z=2+2t\end{cases}$ vẫn đúng

Cách 2:

Chuyển đường thẳng d về dạng tham số $d:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=t\\ z=2+t\end{cases}$

Đường thẳng Δ cắt d tại $M\in d \Rightarrow M(-1+2t;t;2+t)$

Đường thẳng Δ cắt (P) tại $N(a;b;c)\in(P)$

Theo giả thiết A là trung điểm MN theo công thức tính trung điểm

$$\begin{cases}-1+2t+a=2\\ t+b=-2\\ t+2+c=4\\ N\in(P)\Leftrightarrow a+b-2c+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2t+3\\ b=-2-t\\ c=2-t\\ a+b-2c+5=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -2t+3-2-t-2(2-t)+5=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M(3;2;4)$

Vậy đường thẳng Δ đi qua A và có vtcp $\overrightarrow{MA}=(-2;-3;-2)$ có phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\ y=-1-3t\\ z=2-2t\end{cases}$

Cách 3:

Gọi (P') là mặt phẳng đối xứng với mặt phẳng (P) qua điểm A nên (P') có dạng $x+y-2z+m=0$ vì $d(A,(P))=d(A,(P'))\Leftrightarrow |m-4|=1\Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn) hoặc $m=5$ (loại) vì $(P)\equiv(P')$

Khi đó mặt phẳng (P') có phương trình là $x+y-2z+3=0$

- Theo giả thiết $M=\Delta\cap d\Leftrightarrow M=(P')\cap d$ là nghiệm của phương trình

$-1+2t+t-2(2+t)+3=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M(3;2;4)$

Vậy đường thẳng Δ đi qua A và có vtcp $\overrightarrow{MA}=(-2;-3;-2)$ có phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\ y=-1-3t\\ z=2-2t\end{cases}$

Câu 9b.

Giả sử $z=x+yi\Rightarrow \overline{z}=x-iy,\ (x,y\in\mathbb{R}),z\neq-1$

Theo giả thiết

$$\frac{5(\overline{z}+i)}{z+1}=2-i\Leftrightarrow\frac{5(x-yi+i)}{x+yi+1}=2-i\Leftrightarrow\frac{5[(x-(y-1)i]}{(x+1)+yi}=2-i$$

$\Leftrightarrow 5x-5(y-1)i=2(x+1)-(x+1)i+2yi+y\Leftrightarrow 5x-5(y-1)i=(2x+2+y)-(x+1-2y)i$

$$\begin{cases}2x+2+y=5x\\ x+1-2y=5(y-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=2\\ x-7y=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\Rightarrow z=1+i$$

Ta có $w=1+z+z^2=1+(1+i)+(1+i)^2=1+1+i+1+2i+(-1)=2+3i$

$\Rightarrow |w|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

Chú ý: Ở chỗ $\frac{5[(x-(y-1)i]}{(x+1)+yi}=2-i$ các bạn sử dụng phép chia hai số phức tức là $\frac{5[(x-(y-1)i][(x+1)-yi]}{(x+1)^2+y^2}=2-i$ có thể vẫn ra nhưng phức tạp, chính vì thế trong bài này chúng ta nên qui đồng và sử dụng định nghĩa hai số phức bằng nhau thì đơn giản và hiệu quả hơn

Lưu ý:

- Trong khi làm đề đại học các bạn bắt buộc phải vẽ hình gồm Đồ thị của bài khảo sát, Hình vẽ của bài hình học không gian (nếu dùng phương pháp tọa độ cũng phải vẽ hình) còn những bài khác vẽ hình hay không cũng không tính điểm, vẽ ra để nhìn và làm chứ không bắt buộc

- Nếu làm theo cách khác ngoài các cách trên nếu đúng kiến thức nằm trong chương trình phổ thông và đúng, chính xác vẫn cho điểm tối đa

LỜI KẾT: Lời giải chỉ mang tính chất tham khảo cho các bạn học sinh… Trong quá trình biên soạn (có tham khảo một số tài liệu trên mạng) với thời gian ngắn và kiến thức còn hạn chế nên không tránh khỏi những sai sót, rất mong các bạn có nhận xét và đánh giá… Chân thành cảm ơn

Còn rất nhiều cách khác hay hơn mà có thể tôi không tìm được hoặc không viết hết ra được nên rất mong được trao đổi cùng các bạn

" Chúc các bạn có một mùa thi may mắn và thành công … hihi ☺ ☺ "