MỘT SỐ CHÚ Ý KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

" Phương pháp là thầy của các thầy"

I. Các công thức lượng giác cần nhớ

1. Các công thức cơ bản

$\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$ với $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$	$\cot a = \dfrac{\cos a}{\sin a}$ với $a \neq k\pi$
$\tan a.\cot a = 1$	$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 a = 1 - \cos^2 a = (1-\cos a)(1+\cos a) \\ \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = (1-\sin a)(1+\sin a) \end{cases}$
$1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$	$1 + \cot^2 a = \dfrac{1}{\sin^2 a}$

2. Công thức cộng và trừ

a. Với sin và cos

$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$	$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$
$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$	$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

Cách nhớ: (Thần chú lượng giác ☺+☺)
C1. Sin thì sin cos cos sin
Cos thì cos cos sin sin cẩn thận dấu trừ "-"
C2. Cos thì cos cos sin sin
Sin thì sin cos cos sin rõ ràng
Cos thì đổi dấu hỡi nàng
Sin thì giữ dấu xin chàng nhớ cho!
C3: Sin cùng dấu khác loài
Cos cùng loài khác dấu
Cách chứng minh:

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a.\cos(-b) + \sin a.\sin(-b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$

$$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\sin b$$

$$= \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin a.\cos(-b) - \cos a.\sin(-b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$$

b. Với tan

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$	$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$

Cách nhớ: (Thần chú lượng giác ☺+☺)
C1: Tan một tổng hai tầng cao rộng
Trên thượng tầng tan cộng cùng tan

Hạ tầng số 1 ngang tàng
Dám trừ đi cả tan tan oai hùng
C2: Tang tổng thì lấy tổng tang
Chia một trừ với tích tang, dễ òm.

Cách chứng minh:

$$\tan\left(a-b\right)=\frac{\sin\left(a-b\right)}{\cos\left(a-b\right)}=\frac{\sin a.\cos b-\cos a.\sin b}{\cos a.\cos b+\sin a.\sin b}$$

Chia cả tử và mẫu cho $\cos a.\cos b\neq 0$ ta được

$$\tan\left(a-b\right)=\frac{\dfrac{\sin a.\cos b-\cos a.\sin b}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\cos a.\cos b+\sin a.\sin b}{\cos a.\cos b}}=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$$

$$\tan\left(a+b\right)=\tan\left(a-\left(-b\right)\right)=\frac{\tan a-\tan\left(-b\right)}{1+\tan a.\tan\left(-b\right)}=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$$

3. Công thức tính tích thành tổng

$\cos a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$	$\sin a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$
$\sin a.\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$	$\cos a.\sin b=\frac{1}{2}\left[\sin(b-a)+\sin(a+b)\right]$

Cách nhớ: (Thần chú lượng giác ☺+☺)
Cos cos bằng nửa cos-trừ, cộng cos-cộng
Sin sin bằng nửa cos-trừ **trừ** cos-cộng, cận thận dấu trừ "-"
Sin cos bằng nửa sin-cộng cộng sin-cộng.

Cách chứng minh:

Ta có $\begin{cases}\cos\left(a-b\right)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b\\ \cos\left(a+b\right)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\left(a-b\right)+\cos\left(a+b\right)=2\cos a.\cos b\\ \cos\left(a-b\right)-\cos\left(a+b\right)=2\sin a.\sin b\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos a.\cos b=\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(a-b\right)+\cos\left(a+b\right)\right)\\ \sin a.\sin b=\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(a-b\right)-\cos\left(a+b\right)\right)\end{cases}$$

Ta có $\begin{cases}\sin\left(a-b\right)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b\\ \sin\left(a+b\right)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\left(a-b\right)+\sin\left(a+b\right)=2\sin a.\cos b\\ \sin\left(a-b\right)-\sin\left(a+b\right)=-2\cos a.\sin b\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin a.\cos b=\dfrac{1}{2}\left(\sin\left(a-b\right)+\sin\left(a+b\right)\right)\\ \cos a.\sin b=\dfrac{1}{2}\left(\sin\left(b-a\right)+\sin\left(a+b\right)\right)\end{cases}$$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

a. Công thức sin và cos

$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$	$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$
$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$	$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

Cách nhớ: (Thần chú ☺☺)

Cos cộng cos bằng 2 cos cos

Cos trừ cos bằng trừ 2 sin sin

Sin cộng sin bằng 2 sin sin

Sin trừ sin bằng 2 cos sin.

Chứng minh:

Ta có $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a.\cos b$

Đặt: $A=a+b,\ B=a-b\Rightarrow a=\frac{A+B}{2},\ b=\frac{A-B}{2}\Rightarrow \cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$

$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\sin a.\sin b\Rightarrow \cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a.\cos b\Rightarrow \sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\cos a.\sin b\Rightarrow \sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A-B}{2}$$

c.Công thức tan và cot

$\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$	$\tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$
$\cot a+\cot b=\frac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$	$\cot a-\cot b=\frac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$

Cách nhớ:

Tan ta cộng với tan mình bằng sin hai đứa trên cos mình cos ta.

Cách chứng minh:

Với $A,B\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. Ta có $\tan a+\tan b=\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a.\cos b+\cos a.\sin b}{\cos a.\cos b}=\frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$

Tương tự: $\tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$

5. Công thức nhân đôi và nhân ba, nhân bốn

$\sin 2a=2\sin a.\cos a$ $=(\sin a+\cos a)^2-1=1-(\sin a-\cos a)^2$	$\cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $=\cos^4 a-\sin^4 a$
$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$; $\tan 3a=\frac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$	$\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a=\sin a(3-4\sin^2 a)$ $=\sin a(4\cos^2 a-1)\sin a(2\cos a-1)(2\cos a+1)$ $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a=\cos a(4\cos^2 a-3)$ $=\cos a(1-4\sin^2 a)=\cos a(1-2\sin a)(1+2\sin a)$
$\sin 4a=-4\sin^4 a+2\sin^2 a$	$\cos 4a=8\cos^4 a-8\cos^2 a+1$

Cách nhớ: Thần chú

Sin gấp đôi = 2 sin cos
Cos gấp đôi = bình cos trừ bình sin = trừ 1 cộng hai bình cos = cộng 1 trừ hai bình sin
(Chúng mình chỉ việc nhớ công thức nhân đôi của cos bằng thần chú trên rồi từ đó có thể suy ra công thức hạ bậc.)
Tang gấp đôi = Tang đôi ta lấy đôi tang (2 tang)
Chia 1 trừ lại bình tang, ra liền.
Sin thì ba bốn, cos thì bốn ba

Cách chứng minh:

$$\sin 2a = \sin(a+a) = \sin a.\cos a + \cos a.\sin a = 2\sin a.\cos a$$

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 = 2(1-\sin^2 a) - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \tan(a+a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\sin 3a = \sin(2a+a) = \sin 2a.\cos a + \cos 2a.\sin a = 2\sin a.\cos^2 a + (1-2\sin^2 a).\sin a$$

$$= 2\sin a(1-\sin^2 a) + (1-2\sin^2 a).\sin a = 3\sin a - 4\sin^3 a \Rightarrow \sin^3 a = \frac{3\sin a - \sin 3a}{4}$$

$$\cos 3a = \cos(2a+a) = \cos 2a.\cos a - \sin 2a.\sin a = (2\cos^2 a - 1).\cos a - 2\sin^2 a.\cos a$$

$$= 2\cos^3 a - \cos a - 2(1-\cos^2 a).\cos a = 4\cos^3 a - 3\cos a \Rightarrow \cos^3 a = \frac{\cos 3a + 3\cos a}{4}$$

$$\sin 4a = \sin(2a+2a) = \sin 2a.\cos 2a + \cos 2a.\sin 2a = 2\sin 2a.\cos 2a = 4\sin a.\cos a(1-2\sin^2 a)$$

$$= 1 - 2\sin^2 a - (4\sin^4 a - 4\sin^2 a + 1) = -4\sin^4 a + 2\sin^2 a$$

$$\cos 4a = \cos(2a+2a) = \cos 2a.\cos 2a - \sin 2a.\sin 2a = (2\cos^2 a - 1)^2 - 4\sin^2 a.\cos^2 a$$

$$= 4\cos^4 a - 4\cos^2 a + 1 - 4(1-\cos^2 a)\cos^2 a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$$

6. Công thức hạ bậc

$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$	$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$
$\tan^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$	$\cot^2 a = \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1+\cos 2a}{1-\cos 2a}$
$\cos^3 a = \frac{\cos 3a + 3\cos a}{4}$	$\sin^3 a = \frac{3\sin a - \sin 3a}{4}$

Chú ý:
- Trong công thức nhân đôi thì góc giảm một nửa.
- Chỉ hạ bậc đối với lũy thừa bậc chẵn và khi hạ bậc góc tăng gấp đôi nhưng bậc giảm đi một nửa

II. Giá tri lượng giác của các góc liên quan đặc biệt

1. Bỏ chẵn lần pi thì không thay đổi

$\sin(x+k2\pi) = \sin x$ $\cos(x+k2\pi) = \cos x$	$\tan(x+k2\pi) = \tan x$ $\cot(x+k2\pi) = \cot x$

2. Bỏ pi hay lẻ lần pi thì thành cộng biến thành trừ

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\cot(\pi - x) = -\cot x$ **TQ:** $\sin(\pi + k2\pi - x) = \sin x$ $\cos(\pi + k2\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\tan(\pi + x) = \tan x$ $\cot(\pi + x) = \cot x$ **TQ:** $\sin(\pi + k2\pi + x) = -\sin x$ $\cos(\pi + k2\pi + x) = -\cos x$

3. Bỏ pi trên hai

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$

Cách nhớ: (Thần chú ☺☺)
Sin cộng cos trừ, cos biến thành sin
Sin trừ cos cộng, cos biến thành trừ sin
Tan cộng cot trừ, trừ cot biến thành tan
Tan trừ cot cộng , cot biến thành trừ cot
Hoặc: Lấy anh sin cộng chia em cos cộng được con tan cộng, tương tự cho cot cộng, tan trừ, cot trừ
d. Đổi dấu

$\sin(-x) = -\sin x$ $\cos(-x) = \cos x$	$\tan(-x) = -\tan x$ $\cot(-x) = -\cot x$

Chứng minh:

$\cos(-x) = \cos x = \cos(x + k2\pi)$, $\sin(\pi - x) = \sin x = \sin(x + k2\pi)$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\tan(x + k\pi) = \tan x$, $\cot(x + k\pi) = \cot x$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.\cos\frac{\pi}{2} - \sin x.\sin\frac{\pi}{2} = -\sin x$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x.\cos\frac{\pi}{2} + \cos x.\sin\frac{\pi}{2} = \cos x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin(\pi + x) = \sin(-2\pi + \pi + x) = \sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = \cos(-2\pi + \pi + x) = \cos(x - \pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x = \frac{1}{\tan x},\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

III. Công thức tính sina, cosa theo $t=\tan\frac{a}{2}$

Ta có $\begin{cases}\sin a=\dfrac{2t}{1+t^2}\\ \cos a=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ \tan a=\dfrac{2t}{1-t^2}\end{cases}$

Chứng minh:

$$\sin a=2\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{a}{2}}}=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos a=\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{a}{2}}}=\frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{2t}{1-t^2}$$

Một số công thức khác

$$\cos a+\sin a=\cos a+\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=2\cos\frac{\pi}{4}.\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=2.\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}.\sin\left(\frac{3\pi}{4}-a\right)=\sqrt{2}.\sin\left(\pi-\left(\frac{3\pi}{4}-a\right)\right)=\sqrt{2}.\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$$

Vậy $\cos a+\sin a=\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}.\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$

Tương tự: $\cos a-\sin a=\sqrt{2}\cos\left(-a-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}.\sin\left(-a+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}.\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\sin^3x+\cos^3x=(\sin x+\cos x)(\sin^2x-\sin x.\cos x+\cos^2x)=(\sin x+\cos x)(1-\sin x.\cos x)$$

$$\sin^3x-\cos^3x=(\sin x-\cos x)(\sin^2x+\sin x.\cos x+\cos^2x)=(\sin x-\cos x)(1+\sin x.\cos x)$$

$$\sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x.\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

$$\cos^4x-\sin^4x=(\cos^2+\sin^2x)(\cos^2-\sin^2x)=\cos 2x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{5}{8}$$

$$\cos^6 x - \sin^6 x = \cos 2x(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x)$$

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

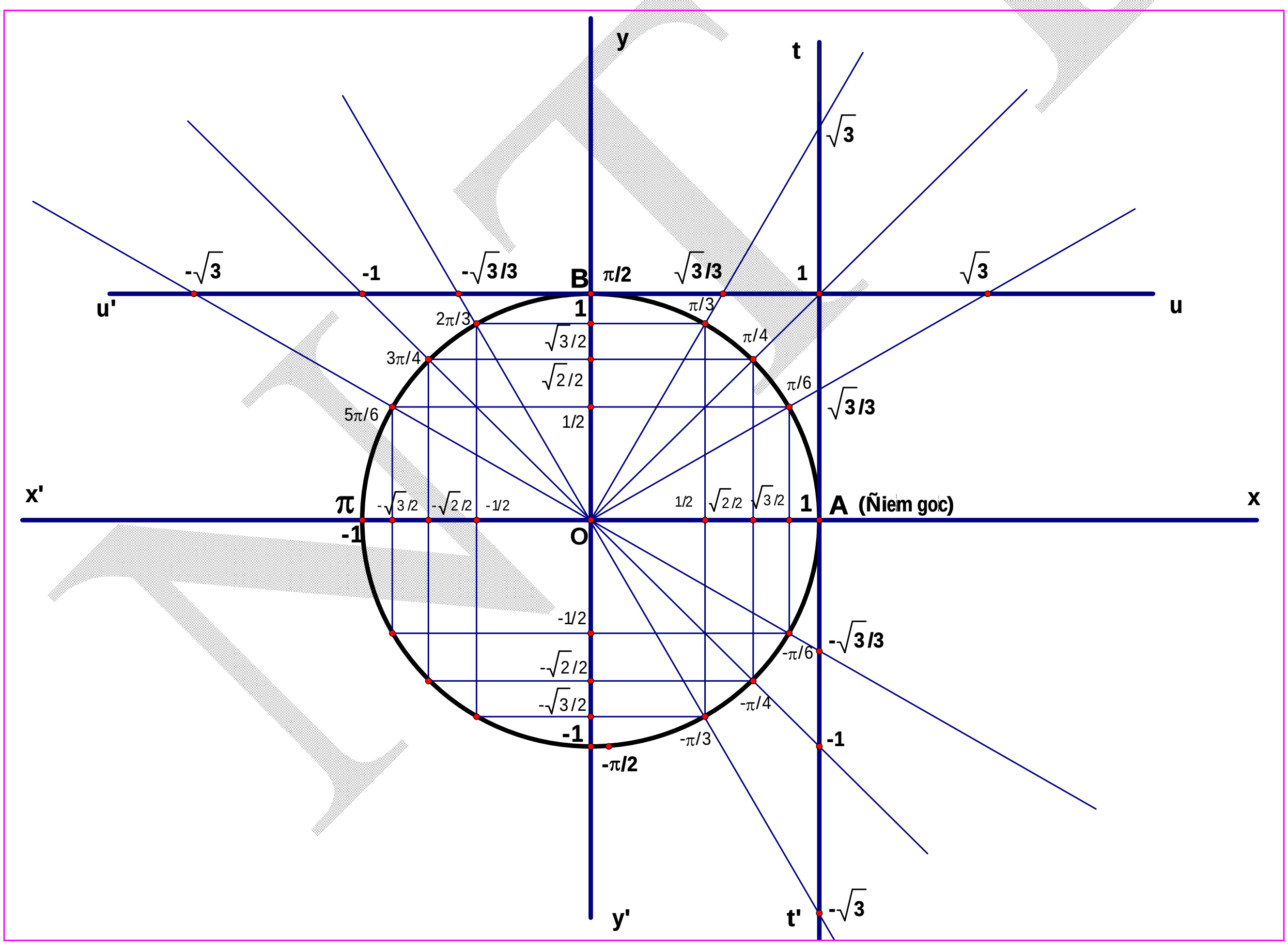
$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = \left(\sin x + \cos x\right)^2$$

$$1 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = (\sin x - \cos x)^2$$

$$\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}, 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x, 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC

Giá trị các hàm số lượng giác của các cung (góc) đặc biệt (ta nên sử dụng đường tròn lượng giác để ghi nhớ các giá trị đặc biệt)

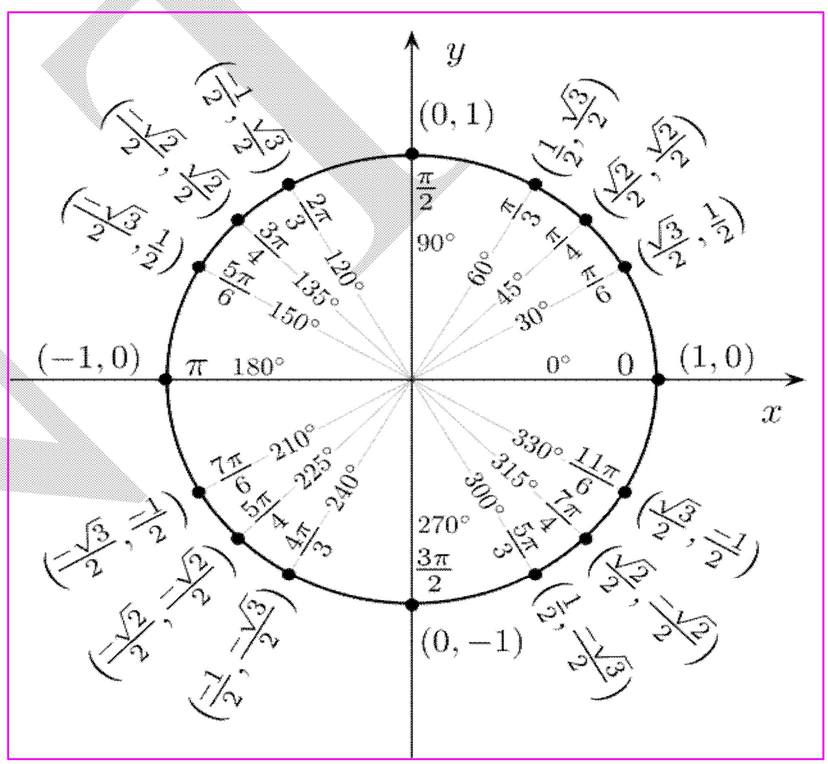


Bảng lượng giác của một số góc đặc biệt

Góc	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	360^0
Hslg	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
$cotg\alpha$	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ	kxđ

Hoặc: Đường tròn lượng giác

Một điểm M thuộc đường tròn lượng giác sẽ có tọa độ $M\left(\cos\alpha;\sin\alpha\right)$ ứng với mỗi góc α ta sẽ được một điểm M cụ thể trên đường tròn



LỜI KẾT: Lượng giác ứng dụng rất nhiều trong học tập cũng như trong thực tế. Để nắm vững các công thức lượng giác, ngoài việc phải học hết… Các bạn nên chứng minh lại sẽ nhớ được lâu hơn… Đó là cách học và dạy của mình, đừng máy móc công thức quá… Cám ơn