TRẦN VĂN HẠO
(Chủ biên)

NGUYỄN CAM
NGUYỄN MỘNG HY
TRẦN ĐỨC HUYÊN
CAM DUY LỄ
NGUYỄN SINH NGUYÊN
NGUYỄN VŨ THANH

CHUYÊN ĐỀ
LUYỆN THI
VÀO ĐẠI HỌC

KHẢO SÁT HÀM SỐ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên)
NGUYỄN CAM - NGUYỄN MỘNG HY - TRẦN ĐỨC HUYÊN
CAM DUY LỄ - NGUYỄN SINH NGUYÊN - NGUYỄN VŨ THANH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC
KHẢO SÁT HÀM SỐ

BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH TOÁN THPT NÂNG CAO HIỆN HÀNH

(Tái bản lần thứ năm có chỉnh lí và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

32-2009/CXB/118-16/GD

Mã số : PTK38t9 - LKT

Lời nói đầu

Bộ sách **Chuyên đề luyện thi vào Đại học** được biên soạn nhằm mục đích giúp các em học sinh lớp 12 có thêm tài liệu tham khảo, nắm vững phương pháp giải các dạng bài toán cơ bản, thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng hàng năm.

Nội dung bộ sách bám sát theo chương trình bộ môn Toán THPT nâng cao hiện hành và Hướng dẫn ôn tập thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Bộ sách gồm 7 tập, tương ứng với 7 chuyên đề :

1. Đại số
2. Lượng giác
3. Hình học không gian
4. Hình học giải tích
5. Giải tích - Đại số tổ hợp
6. Khảo sát hàm số
7. Bất đẳng thức - Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Tập sách **"Chuyên đề luyện thi vào Đại học : Khảo sát hàm số"** này gồm 2 phần :

Phần I : Kiến thức cơ bản – Ví dụ áp dụng : có 4 chương thuộc phần Khảo sát hàm số. Mỗi chương gồm nhiều đơn vị kiến thức (§). Mỗi (§) được biên soạn thống nhất gồm các mục :

A. Kiến thức cơ bản : Tóm tắt, hệ thống kiến thức trọng tâm.

B. Phương pháp giải toán : Nêu phương pháp hoặc gợi ý cách giải.

C. Ví dụ áp dụng : gồm nhiều ví dụ, có hướng dẫn giải. Mỗi ví dụ là một dạng bài tập cơ bản, thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng.

D. Luyện tập : gồm nhiều bài tập, giúp học sinh tự rèn luyện kĩ năng giải toán.

Phần II : Ôn tập – Hướng dẫn giải – đáp số : Phần này gồm ôn tập tổng hợp (Bài tập tự luận và bài tập trắc nghiệm) và hướng dẫn giải bài tập hoặc cho đáp số của phần luyện tập ở mỗi (§), giúp học sinh tự kiểm tra, đánh giá kết quả giải bài tập của mình.

Cuối sách có phần phụ lục : **Trích giới thiệu một số đề thi tuyển sinh Đại học (2005 – 2008)** : Đây là phần trích giới thiệu một số đề thi tuyển sinh Đại học đề ra từ 2005 đến 2008 – môn Toán, có liên quan đến phần Khảo sát hàm số, có hướng dẫn giải : giúp học sinh làm quen với các dạng câu hỏi của đề thi tuyển sinh.

Tập thể tác giả trân trọng giới thiệu với các em học sinh 12, bộ sách **Chuyên đề luyện thi vào Đại học.** Chúng tôi tin tưởng bộ sách này, sẽ góp phần giúp các em học sinh 12, nâng cao chất lượng học tập và đạt được kết quả mĩ mãn trong kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng.

Chủ biên

PGS, TS. TRẦN VĂN HẠO

CẤU TRÚC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG 2009, MÔN TOÁN

II. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7 ĐIỂM)

Câu I (3 điểm) :

– Khảo sát, vẽ đồ thị của hàm số.

– Các bài toán liên quan đến ứng dụng của đạo hàm và đồ thị của hàm số : chiều biến thiên của hàm số. Cực trị. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Tiếp tuyến, tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số. Tìm trên đồ thị những điểm có tính chất cho trước, tương giao giữa hai đồ thị (một trong hai đồ thị là đường thẳng) ;...

Câu II (2 điểm) :

– Phương trình, bất phương trình ; hệ phương trình đại số ;

– Công thức lượng giác, phương trình lượng giác.

Câu III (1 điểm) :

– Tìm giới hạn

– Tìm nguyên hàm, tính tích phân

– Ứng dụng của tích phân: tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay.

Câu IV (1 điểm) :

Hình học không gian (tổng hợp) : Quan hệ song song, quan hệ vuông góc của đường thẳng, mặt phẳng. Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay, hình trụ tròn xoay ; tính thể tích khối lăng trụ, khối chóp, khối nón tròn xoay, khối trụ tròn xoay ; tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Câu V (1 điểm) :

Bài toán tổng hợp.

II. PHẦN RIÊNG (3 ĐIỂM) :

Thí sinh chỉ được làm một trong 2 phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình chuẩn :

Câu VI.a (2 điểm) :

Nội dung kiến thức : Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian :

– Xác định toạ độ của điểm, vectơ.

– Đường tròn, elip, mặt cầu.

– Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.

– Tính góc ; tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu VII. a (1 điểm) :

Nội dung kiến thức :

– Số phức

– Tổ hợp, xác suất, thống kê.

– Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

2. Theo chương trình nâng cao :

Câu VI.b (2 điểm) :

Nội dung kiến thức :

Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian :

– Xác định toạ độ của điểm, vectơ.

– Đường tròn, ba đường cônic, mặt cầu.

– Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.

– Tính góc ; tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, mặt phẳng; khoảng cách giữa hai đường thẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu VII.b (1 điểm) :

Nội dung kiến thức :

– Số phức

– Đồ thị hàm phân thức hữu tỉ dạng $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ và một số yếu tố liên quan.

– Sự tiếp xúc của hai đường cong.

– Hệ phương trình mũ và lôgarit.

– Tổ hợp, xác suất, thống kê.

– Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

Phần I.

KIẾN THỨC CƠ BẢN – VÍ DỤ ÁP DỤNG

Chương 1.

HÀM SỐ

§ 1. MIỀN XÁC ĐỊNH VÀ MIỀN GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa hàm số :** Cho $X \subset \mathbf{R}$. Một ánh xạ $f : X \to \mathbf{R}$ được gọi là hàm số f từ X tới $\mathbf{R}$. X gọi là miền xác định của hàm f. Kí hiệu :

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad \text{hay } y = f(x)$$

2. **Miền giá trị :** Tập hợp T các giá trị $f(x)$ khi $x \in X$ gọi là miền giá trị của hàm số $f : T = \{f(x) / x \in X\}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. **Tìm miền xác định của hàm số :** Muốn tìm miền xác định D của hàm số $y = f(x)$ ta có thể thực hiện theo các phương pháp sau :

– Tìm tập D của x để $f(x)$ có nghĩa, tức là tìm :

$$D = \{x \in R / f(x) \in \mathbf{R}\}$$

– Tìm tập K của x để $f(x)$ không có nghĩa, khi đó miền xác định là $D = \mathbf{R} \setminus K$.

2. **Tìm miền giá trị của hàm số :** Để tìm miền giá trị T của hàm số $y = f(x)$ có miền xác định D ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau :

– $y \in T$ khi và chỉ khi phương trình $y = f(x)$ (ẩn x) có nghiệm $x \in D$.

– Miền giá trị T là hình chiếu vuông góc của đồ thị hàm số lên trục tung.

– Sử dụng bảng biến thiên để tìm T.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm miền xác định và miền giá trị của các hàm số :

a) $y = \dfrac{2x-1}{x^2+x+4}$; b) $y = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$.

Hướng dẫn giải

Gọi D, T theo thứ tự là miền xác định, miền giá trị của hàm số

a) Vì $x^2+x+4>0$ với mọi $x \in R$ nên $D = R$.

$y_0 \in T \Leftrightarrow$ Phương trình $y_0 = \dfrac{2x-1}{x^2+x+4}$ có nghiệm $x \in R$

$$\Leftrightarrow y_0x^2 + (y_0-2)x + 4y_0 + 1 = 0 \ (1) \text{ có nghiệm}$$

i) Với $y_0 = 0$: (1) $\Leftrightarrow -2x+1=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Vậy $y_0 = 0 \in T$

ii) Với $y_0 \neq 0$: (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y_0-2)^2 - 4y_0(4y_0+1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-4-2\sqrt{19}}{15} \leq y_0 \leq \frac{-4+2\sqrt{19}}{15}$$

Vậy miền giá trị của hàm số là :

$$T = \left[\frac{-4-2\sqrt{19}}{15} ; \frac{-4+2\sqrt{19}}{15}\right]$$

b) y xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 3+x \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$. Vậy miền xác định $D = [-3 ; 6]$

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{3+x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{6-x}} = \dfrac{\sqrt{6-x} - \sqrt{3+x}}{2\sqrt{(3+x)(6-x)}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6-x} - \sqrt{3+x} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} ; y\left(\frac{3}{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

Bang biến thiên :

x	$-\infty$	-3		$\frac{3}{2}$		6	$+\infty$
y'			$+$	0	$-$		
y		3	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	3	

Vậy miền giá trị của hàm số là $T = \left[3\ ;\ 3\sqrt{2}\right]$.

Ví dụ 2 : Tìm miền xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2 + (m+3)x + 3}}{x+1}$ tuỳ theo tham số m.

(Trích đề thi Đại học, năm 1986)

Hướng dẫn giải

y xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + (m+3)x + 3 \ge 0 \\ x + 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (mx^2 + mx) + (3x+3) \ge 0 \\ x + 1 \ne 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (mx+3)(x+1) \ge 0 & (1) \\ x \ne -1 & (2) \end{cases}$$

i) Nếu $m = 0$ thì $\begin{cases} 3(x+1) \ge 0 \\ x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1.\ \Rightarrow\ D = (-1\ ;\ +\infty)$

ii) Nếu $m \ne 0$ thì $(mx+3)(x+1)$ có hai nghiệm là -1 và $-\dfrac{3}{m}$

Xét hiệu : $-1 - \left(-\dfrac{3}{m}\right) = \dfrac{3}{m} - 1 = \dfrac{3-m}{m}$

Bang xét dấu hiệu :

m	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$\frac{3-m}{m}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

– Nếu $m < 0$ thì $-1 < -\dfrac{3}{m}$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow -1 \le x \le -\dfrac{3}{m}$ kết hợp với (2) ta có : $D = \left(-1\ ;\ -\dfrac{3}{m}\right]$

– Nếu $0 < m < 3$ thì $-\dfrac{3}{m} < -1$: Khi đó (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\dfrac{3}{m} \\ x \ge 1 \end{array}\right.$

Kết hợp với (2) ta có $D = \left(-\infty ; -\frac{3}{m}\right] \cup (1 ; +\infty)$

– Nếu $m > 3$ thì $-1 < -\frac{3}{m}$ $D = (-\infty ; -1) \cup \left[-\frac{3}{m} ; +\infty\right)$

– Nếu $m = 3$: (1) thoả với mọi x, khi đó $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{(m+1)x - m}}{\log_a(mx - m + 2)}$ $(a > 0 ; a \neq 1)$

1) Tìm miền xác định của hàm số khi $m = -\frac{1}{2}$.

2) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số xác định với mọi $x \geq 1$.

Hướng dẫn giải

1) Miền xác định của hàm số là tập nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} (m+1)x - m \geq 0 \\ mx - m + 2 > 0 \\ mx - m + 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)x \geq m \\ mx > m - 2 \\ mx \neq m - 1 \end{cases} \quad (1)$$

Với $m = -\frac{1}{2}$ thì hệ (1) trở thành :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x \geq -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x > -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2}x \neq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 5 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 5 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Vậy miền xác định của hàm số là $D = [-1 ; 3) \cup (3 ; 5)$

2) – *Trường hợp 1 :* Với $m < 0$ thì từ bất phương trình thứ hai của hệ (1) ta có $x < \frac{m-2}{m}$. Rõ ràng bất phương trình này không thoả với mọi $x \geq 1$.

– *Trường hợp 2 :* Với mọi $m = 0$. Khi đó (1) trở thành

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2 > 0 \\ 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ thoả với mọi } x \geq 1$$

– *Trường hợp 3 :* Với $m > 0$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{m}{m+1} \\ x > \dfrac{m-2}{1} \\ x \neq \dfrac{m-1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{m}{m+1}$$

Rõ ràng mọi $x \geq 1$ đều thoả mãn bất phương trình này vì $\dfrac{m}{m+1} < 1$ kết luận $m \geq 0$.

D. LUYỆN TẬP

1.1 Tuỳ theo m tìm miền xác định của hàm số $y = \dfrac{m(x-1)^3}{x^2 - mx + 1}$.

(Trích đề thi Đại học, năm 1985)

1.2 Xác định a, b để hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ có miền giá trị là $T = [-1, 4]$.

1.3 Cho $0 < \alpha < \pi$, tìm miền xác định và miền giá trị của hàm số $y = \dfrac{x^2\cos\alpha - 2x + \cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$.

1.4 Tìm miền xác định và miền giá trị của hàm số :

$$y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{3-x}.$$

1.5 Tìm miền xác định của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$ b) $y = \sqrt{\log_x(x^3+1)\log_{x+1}x - 2}$

1.6 Xác định a để hàm số $y = \sqrt{(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3}$ có miền xác định là $\mathbf{R}$.

1.7 Tìm miền giá trị của hàm số $y = \cos^2 x - \sin 2x + \cos x$.

1.8 Lập bảng biến thiên và tìm miền giá trị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh, năm 1999)

§ 2. ÁP DỤNG MIỀN GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D.

a) $M = \max\limits_{x \in D} y \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le M, & x \in D \\ \exists x_0 \in D: \ f(x_0) = M \end{cases}$

b) $m = \min\limits_{x \in D} y \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge m, & x \in D \\ \exists x_1 \in D: \ f(x_1) = m \end{cases}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

– Khi tìm miền giá trị của hàm số, chú ý đến điều kiện có nghiệm của phương trình $y = f(x)$ (ẩn x).

– Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 - c^2 \ge 0$.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số : $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

Hướng dẫn giải

Miền xác định của hàm số $D = \mathbf{R}$

y_0 thuộc miền giá trị T của hàm số khi và chỉ khi phương trình

$$y_0 = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \qquad (1)$$

có nghiệm. Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow (1 - y_0)^2 + (1 + y_0)x + 1 - y_0 = 0 \qquad (2)$$

1) Với $y_0 = 1$ thì (2) có nghiệm $x = 0$

2) Với $y_0 \neq 1$:

$$\text{(2) có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta = (1 + y_0)^2 - 4(1 - y_0)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3y_0^2 - 10y_0 + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq y_0 \leq 3$$

Vậy miền giá trị của hàm số $T = \left[\frac{1}{3}\ ;\ 3\right] \Rightarrow \text{Max } y = 3\ ;\ \text{Min } y = \frac{1}{3}$.

Cách khác : (Bảng biến thiên)

Ta có $y' = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + x + 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$; $\lim\limits_{x \to \infty} y = 1$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Vậy : $\min y = \frac{1}{3}$; $\max y = 3$

Ví dụ 2 : Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left[\dfrac{12x(x-a)}{x^2+36}\right]^{\frac{3}{4}}$ với $(a \neq 0)$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = \dfrac{12x(x-a)}{x^2+36}$ thì $y = \sqrt[4]{z^3}$

y đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow$ z đạt giá trị lớn nhất.

Ta tìm miền giá trị của hàm số $z = \dfrac{12x(x-a)}{x^2+36}$ với $z \geq 0$.

Miền xác định của hàm số z là $D = R$

z thuộc miền giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình $z = \dfrac{12x(x-a)}{x^2+36}$ (1) có nghiệm. Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow (12 - z)x^2 - 12ax - 36z = 0 \quad (2)$$

Với $z = 12$: (2) có nghiệm vì $a \neq 0$

Với $z \neq 12$: (2) có nghiệm khi

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 36a^2 + 36z(12 - z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 12z - a^2 \leq 0 \Leftrightarrow 6 - \sqrt{36 + a^2} \leq z \leq 6 + \sqrt{36 + a^2}$$

Vì $z \geq 0$ nên $0 \leq z < 6 + \sqrt{36 + a^2} \Rightarrow \max y = \sqrt[4]{\left(6 + \sqrt{36 + a^2}\right)^3}$

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y_k = \dfrac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số y ứng với $k = 1$.

b) Xác định tham số k sao cho giá trị lớn nhất của hàm số y_k là nhỏ nhất

(Trích đề thi Đại học Đại cương, năm 1996)

Hướng dẫn giải

a) Với $k = 1$ ta có $y = \dfrac{2\cos x + 2}{\cos x + \sin x + 2}$

Với $\sin x$ và $\cos x$ không đồng thời bằng -1 nên $\cos x + \sin x + 2 \neq 0$ với mọi x.

Miền xác định hàm số $D = \mathbf{R}$.

y thuộc miền giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm :

$$y = \frac{2\cos x + 2}{\cos x + \sin x + 2} \Leftrightarrow (y - 2)\cos x + y\sin x = 2(1 - y) \qquad (1)$$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow (y - 2)^2 + y^2 \geq 4(1 - y)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2$

Vậy với mọi $y = 0$, $\max y = 2$

b) Xác định k để $\max y_k$ là nho nhất

y_k thuộc miền giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm :

$$y_k = \frac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2} \Leftrightarrow (y_k - 2k)\cos x + y_k \sin x = k + 1 - 2y_k \qquad (2)$$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow (y_k - 2k)^2 + y_k^2 \geq (k + 1 - 2y_k)^2$

$$\Leftrightarrow 2y_k^2 - 4y_k - 3k^2 + 2k + 1 \leq 0 \qquad (3)$$

(3) $\Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sqrt{6k^2 - 4k + 2} \leq y_k \leq 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{6k^2 - 4k + 2}$

Từ đó suy ra $\max y_k = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{6k^2 - 4k + 2}$

$\operatorname{Max} y_k$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 6k^2 - 4k + 2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $\operatorname{Max} y_{\left(\frac{1}{3}\right)} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy với $k = \frac{1}{3}$ thì giá trị lớn nhất của y_k là nhỏ nhất.

D. LUYỆN TẬP

2.1 Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các hàm số :

a) $y = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ trong khoảng $(-\pi ; \pi)$

b) $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ trong $[0 ; \pi]$

(Trích đề thi Đại học Quy Nhơn, năm 1999)

2.2 Xác định k để $\dfrac{k\sin x + 1}{\cos x + 2} \geq -1$, với mọi x.

2.3 Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \sin x - \cos^2 x + \frac{1}{2}$

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1997)

§ 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC VÀ ỨNG DỤNG HÀM SỐ LIÊN TỤC ĐỂ CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cho hàm số $f : (a ; b) \to \mathbf{R}$; $x_0 \in (a, b)$

f liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

2. Nếu f liên tục trên $[a, b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a, b)$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số f xác định bởi $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x^2}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng f liên tục trên tập số thực **R**

(Trích đề thi Đại học Huế, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Với $x \neq 0$ hàm số $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x^2}$ liên tục

Với $x=0$ ta có :

$$\left|x\cos\frac{1}{x^2}\right| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le x\cos\frac{1}{x^2} \le |x|$$

Mà $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x^2}=0$ suy ra $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

Vậy f liên tục tại $x=0$, do đó f liên tục trên **R**.

Ví dụ 2 : Cho hàm số f xác định bởi : $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \le 1 \\ 3-ax^2 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

Định a để f liên tục tại $x=1$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $f(1)=1+1=2$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2\ ;\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3-ax^2)=3-a$$

f liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$$\Leftrightarrow 2=3-a \Leftrightarrow a=1$$

Ví dụ 3 : Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$. Chứng minh rằng nếu $2a+3b+c=0$ thì phương trình có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(0\ ;\ 1)$.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$, hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$

Ta có $f(0) = c$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4a}{9} + \frac{2b}{3} + c = \frac{2}{9}(2a + 3b) + c = -\frac{c}{3}$

nên $f(0).f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{c^2}{3}$.

– Nếu $c \neq 0$ thì $f(0).f\left(\frac{2}{3}\right) < 0$ suy ra phương trình đã cho có nghiệm nằm trong khoang $\left(0 ; \frac{2}{3}\right)$

– Nếu $c = 0$ thì phương trình trở thành : $ax^2 + bx = 0$ có hai nghiệm $x = 0$, $x = -\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \in (0 ; 1)$. (Vì $2a + 3b = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$)

Cách 2 : Ta có $f(0) = c$, $f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) = 2a + 3b + 6c = 0$

Trong 3 số $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$ không thể có 2 số bằng 0 vì khi đó $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 0$: Phương trình bậc hai có hơn hai nghiệm phân biệt (vô lí).

Vậy trong 3 số $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ phải có ít nhất hai số khác 0.

Do $f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) = 0$ nên trong 3 số phải có hai số trái dấu, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách 3 : (Áp dụng Định lí Lagrange)

Xét hàm số

$$F(x) = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx$$

liên tục trên $[0 ; 1]$ và có đạo hàm trên $(0 ; 1)$.

Ta có : $F(0) = 0$, $F(1) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = \frac{1}{6}(2a + 3b + 6c) = 0$

Theo Định lí Lagrange tồn tại $x_0 \in (0 ; 1)$ sao cho :

$$F'(x_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0 ; 1)$.

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có nghiệm :

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sin x - \cos x - m \sin x \cos x = 0$$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \cos x - m \sin x \cos x$ trên đoạn $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

f liên tục trên đoạn $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$. Vậy (1) luôn có nghiệm thuộc khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ với mọi m.

C. LUYỆN TẬP

3.1 Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 3 \\ ax + b & \text{nếu } 3 \leq x \leq 5 \\ 3 & \text{nếu } x > 5 \end{cases}$$

Định a, b để f liên tục trên $\mathbb{R}$

3.2 Xét tính liên tục cua hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

3.3 Cho $m > 0$ và a, b, c là ba số thoả điều kiện :

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0 ; 1)$

3.4 Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = m$ luôn có nghiệm.

3.5 Chứng minh rằng phương trình $x^5 - x - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất x_0 trên $[1 ; 2]$ thoả $x_0 > \sqrt[9]{8}$

3.6 Cho $x_1 \neq 0$ là nghiệm của phương trình $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$ và $x_2 \neq 0$ là nghiệm của phương trình $\frac{3a}{2}x^2 + bx + c = 0$.

Với $a \neq 0$ chứng minh rằng $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(x_1 ; x_2)$.

3.7 Cho hàm số $f : [a ; b] \to [a ; b]$ là hàm số liên tục, chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm trong đoạn $[a ; b]$.

§ 4. PHƯƠNG TRÌNH HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hàm số hợp : Cho hàm số $f : X \to \mathbf{R}$ và hàm số $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ta định nghĩa hàm số hợp $gof : X \to \mathbf{R}$ với $(gof)(x) = g[f(x)]$ với mọi $x \in X$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để tìm hàm số thoả điều kiện trước ta sử dụng một trong các phương pháp sau :

1. Dùng phương pháp đổi biến và áp dụng định nghĩa hàm số hợp.
2. Thay trị đặc biệt để đưa về hệ phương trình.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng :

$$f\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1} \text{ với } x \neq 1 \text{ và } x \neq -2$$

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \dfrac{2x-1}{x+2} \Rightarrow u(x+2) = 2x-1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2u+1}{2-u}$ $(u \neq 2)$

Ta có $f(u) = \dfrac{\dfrac{2u+1}{2-u}+1}{\dfrac{2u+1}{2-u}-1} = \dfrac{u+3}{3u-1}$ $\left(u \neq \dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow f(x) = \dfrac{x+3}{3x-1}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{3}\right)$

Ví dụ 2 : Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng : $f(x) + xf(-x) = x+2$ (1) với mọi x.

Hướng dẫn giải

Thay x bởi $-x$ vào (1) thì được :

$$f(-x) - xf(x) = -x+2 \Rightarrow -x^2 f(x) + xf(-x) = -x^2 + 2x \qquad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) theo từng vế ta được :

$$(1+x^2)f(x) = x^2 - x + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-x+2}{x^2+1}$$

Ví dụ 3 : Tìm các hàm số f và g xác định trên $\mathbf{R}$ thoả các điều kiện sau với mọi $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \dfrac{x+2}{2} & (1) \\ f\left(\dfrac{x+2}{2}\right) + g(x+5) = x+4 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x + 6 = \dfrac{u+2}{2} \Rightarrow x = \dfrac{u-10}{2}$, khi đó (1) trở thành

$$f\left(\frac{u+2}{2}\right) + 2g(u+5) = \frac{u-6}{4} \qquad (3)$$

Thay x bởi u trong (2) ta được :

$$f\left(\frac{u+2}{2}\right) + g(u+5) = u+4 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{u+2}{2}\right) = \dfrac{7u+8}{4} \\ g(u+5) = \dfrac{-3u-22}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{7x+12}{2} \\ g(x) = \dfrac{-3x-7}{4} \end{cases}$$

D. LUYỆN TẬP

4.1 Tìm hàm số f thoả $f\left(x-\frac{4}{x}\right)=x^2+\frac{16}{x^2}$ với $x \neq 0$.

4.2 Tìm hàm số f biết : $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+2$ với $x \neq 0$.

4.3 Cho hai hàm số f và g xác định với mọi x và thoả

$$\begin{cases} f(x+2)+3g(2x-1)=x \\ f(3x+1)+g(6x-3)=4 \end{cases}$$

Xác định $f(x)$ và $g(x)$.

4.4 Cho $f(x)=a\cos x+b\cos 2x+c\cos 3x$ thoả $f(x)=0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng $a=b=c=0$.

4.5 a) Tìm hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a \neq 0)$ với $f(0)=0$ và $f(x)-f(x-1)=x^2$ với mọi x

b) Suy ra cách tính các tổng sau :

$$S_1=1^2+2^2+3^2+...+n^2$$

và
$$S_2=1^2+3^2+...+(2n-1)^2$$

4.6 Cho hàm số f xác định với mọi x và thoả các điều kiện :

i) $f(x) \geq 1+x$ với mọi x ;

ii) $f(x+y) \geq f(x).f(y)$ với mọi x, y.

a) Chứng minh rằng với mọi x và mọi $n \in \mathbf{N}$ ta có :

$$f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{2^n}$$

b) Từ i) hãy chỉ ra một khoảng chứa 0 để $f(x)>0$ ở trên đó. Suy ra rằng $f(x)>0$ với mọi x

c) Chứng minh rằng với mọi x và mọi h (với $|h|<1$) thì :

$$hf(x) \leq f(x+h)-f(x) \leq \frac{hf(x)}{1-h}$$

d) Chứng tỏ $f'(x)$ tồn tại. Suy ra $f(x)$

(Trích đề thi Đại học, năm 1981)

Chương 2.

ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG

§ 5. DÙNG ĐỊNH NGHĨA ĐỂ TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa :** Cho $f:(a\,;\,b)\to \mathbf{R}$ và $x_0 \in (a\,;\,b)$.

– Đạo hàm của hàm số f tại x_0 là :

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

– Đạo hàm bên phải của f tại x_0 là :

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

– Đạo hàm bên trái của f tại x_0 là :

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

2. **Định lí :** Nếu $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ thì f có đạo hàm tại x_0 và $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$.

3. **Quan hệ giữa đạo hàm và liên tục :**

– Nếu f có đạo hàm tại x_0 thì f liên tục tại x_0.

– Điều ngược lại không đúng, chẳng hạn $f(x)=|x|$ liên tục tại $x=0$, nhưng không có đạo hàm tại $x=0$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. **Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm :**

Cách 1 : $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Cách 2 : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

2. Tìm điều kiện để hàm số có đạo hàm tại x_0 :

– Nếu f có đạo hàm tại x_0 thì f liên tục tại x_0

Ta có : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (1)

– f có đạo hàm tại x_0 thì $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ (2)

– Từ (1) và (2) suy ra điều kiện cần tìm.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Dùng định nghĩa, tính đạo hàm các hàm số sau tại x_0

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\frac{x^2}{4}} = \dfrac{1}{2}$

Vậy $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

b) Ta có : $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$

Vì $-|x| \le x \sin\dfrac{1}{x} \le |x|$ và $\lim\limits_{x \to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x \to 0}|x| = 0$

Ví dụ 2 : Cho hàm số f xác định bởi : $f(x) = \begin{cases} x \cos\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

Hàm số f có đạo hàm tại những điểm nào ? Tính đạo hàm của f tại các điểm đó.

(Trích đề thi Đại học Huế, năm 1999)

Hướng dẫn giải

–Với $x \neq 0$, ta có $f'(x) = 1.\cos\dfrac{1}{x^2} - x.\sin\dfrac{1}{x^2}.\left(x^{-2}\right)' = \cos\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^2}\sin\dfrac{1}{x^2}$

– Tại $x = 0$, xét tỉ số $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x\cos\dfrac{1}{x^2}}{x} = \cos\dfrac{1}{x^2}$, ta chứng minh không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0}\cos\dfrac{1}{x^2}$. Thật vậy, ta chọn hai dãy

$$x_n = \sqrt{\frac{1}{2n\pi}} \text{ và } x'_n = \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}}$$

có $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} x'_n = 0$ nhưng $\lim\limits_{n \to \infty}\cos\dfrac{1}{x_n^2} = 1$ còn $\lim\limits_{n \to \infty}\cos\dfrac{1}{x_n'^2} = 0$.

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Ví dụ 3 : Cho hàm số f xác định bởi : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ ab + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

Xác định a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 1$.

Hướng dẫn giải

Để f có đạo hàm tại $x = 1$, trước hết f phải liên tục tại $x = 1$ khi đó ta có

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to 1^+}(ax + b) = \lim_{x \to 1} x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a + b = 1 \qquad (1)$$

Mặt khác vì f có đạo hàm tại $x = 1$ nên $f'_+(1) = f'_-(1)$

Mà $f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+}\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+}\dfrac{ax + b - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+}\dfrac{ax - a}{x - 1} = a$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Vậy $a = 2$ và từ (1) suy ra $b = -1$, do đó a, b cần tìm là $a = 2$, $b = -1$.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} p\cos x + q\sin x & \text{khi } x \le 0 \\ px + q + 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng với mọi p, q hàm f không có đạo hàm tại $x = 0$.

Hướng dẫn giải

Giả sử f có đạo hàm tại $x = 0$, khi đó f liên tục tại $x = 0$. Tức là ta có

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}(p\cos x + q\sin x) =$$

$$= \lim_{x\to 0}(px + q + 1) = p \Leftrightarrow q + 1 = p \qquad (1)$$

Khi đó ta có :

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{px + q + 1 - p}{x} = p, \text{ (Vì } q + 1 - p = 0)$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{p\cos x + q\sin x - p}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{p(\cos x - 1)}{x} + q\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -p\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} + q = q$$

Nếu f có đạo hàm tại $x = 0$ thì $f'_-(0) = f'_+(0) \Rightarrow p = q$ (2)

Từ (1) và (2) ta gặp mâu thuẫn.

Vậy với mọi p, q hàm số f không có đạo hàm tại $x = 0$.

Chú ý : Để tính $f'_-(0)$ ta có thể sử dụng quy tắc L'Hospital

D. LUYỆN TẬP

5.1 Tính đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{x}{|x| + 1} \text{ tại } x = 0.$$

5.2 Xét đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x < 0 \\ \sin x & \text{nếu } x \ge 0 \end{cases} \text{ tại } x = 0.$$

5.3 Chứng minh hàm số

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x=0\end{cases}$$

liên tục tại $x=0$ nhưng không có đạo hàm tại $x=0$.

5.4 Tìm đạo hàm cua hàm số

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{nếu } x<1\\ \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x\geq 0\end{cases}$$

5.5 Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{2-x^2} & \text{khi } -\sqrt{2}\leq x\leq 1\\ x^2+ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$$

Định a, b để hàm số f có đạo hàm tại $x=1$.

5.6 Xác định a, b để hàm số

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & \text{khi } x\geq 1\\ 2x-1 & \text{khi } x<1\end{cases}$$

có đạo hàm tại $x=1$.

5.7 Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-2}-1}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ a & \text{nếu } x=0\end{cases}$$

Xác định a để hàm số có đạo hàm tại $x=0$. Tính $f'(0)$.

5.8 Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi :

$$f(x)=\begin{cases} (x+a)e^{-bx} & \text{nếu } x<0\\ ax^2+bx+1 & \text{nếu } x\geq 0\end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x=0$.

§ 6. ĐẠO HÀM CẤP CAO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ của hàm số $y = f(x)$ được gọi là đạo hàm cấp n của f

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' \quad (n \in \mathbf{N},\ n \geq 2)$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

– Tính $f'(x)$, $f''(x)$

– Dự đoán công thức tổng quát $f^{(n)}(x)$ sau đó chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 :

a) Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \dfrac{1}{x}$

b) Suy ra đạo hàm cấp n của $f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2-3x+2}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y = x^{-1} \Rightarrow y' = (-1)x^{-2}$; $y'' = (-1)(-2).x^{-3}$;

$$y''' = (-1)(-2)(-3).x^{-4} = (-1)^3.3!\frac{1}{x^{3+1}}$$

Ta chứng minh $\quad y^{(n)} = (-1)^n.n!\dfrac{1}{x^{n+1}} \quad$ (1)

Với $n = 1$: (1) đúng

Giả sử (1) đúng với n, ta chứng minh (1) đúng với $n + 1$.

Ta có $y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = \left[(-1)^n.n!.x^{-n-1}\right]' = (-1)^n n!(-n-1).x^{-n-2}$

$$= (-1)^{n+1}(n+1)!\frac{1}{x^{n+2}}.$$

Vậy (1) đúng với $n + 1$.

b) Trước hết ta tìm A, B sao cho :

$$\frac{5x-3}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2} \quad (2) \text{ với } x \neq 1,\ x \neq 2$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow 5x-3=A(x-2)+B(x-1)$

$$\Leftrightarrow 5x-3=(A+B)x-2A-B$$

Đồng nhất hai vế ta được :

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 2A+B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=7 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-\frac{2}{x-1}+\frac{7}{x-2}$$

Áp dụng câu a) ta có :

$$f^{(n)}(x)=-2.\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}+7.\frac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}$$

Ví dụ 2 : Cho $y=\cos ax$. Chứng minh rằng

$$y^{(n)}=a^n\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right) \quad (1),$$

từ đó suy ra đạo hàm cấp n của $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$.

(Trích đề thi Đại học Y khoa Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Với $n=1$:

Ta có : $y'=-a\sin ax=a\cos\left(ax+\frac{\pi}{2}\right)$: (1) đúng với $n=1$.

Giả sử (1) đúng với n, khi đó :

$$y^{(n+1)}=\left(y^{(n)}\right)'=\left[a^n\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)\right]'$$

$$=-a^{n+1}\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)=a^{n+1}\cos\left(ax+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

Vậy (1) đúng với $n+1$ nên (1) đúng với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Áp dụng :

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \text{ và } \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

Ta có : $\left(\sin^2 x\right)^{(n)} = -\frac{1}{2}.2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$

$$\left(\cos^2 x\right)^{(n)} = \frac{1}{2}.2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) = 2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

D. LUYỆN TẬP

1. Tính đạo hàm cấp n các hàm số sau :

a) $y = \sin x$; b) $y = \cos x$; c) $y = \ln|x|$;

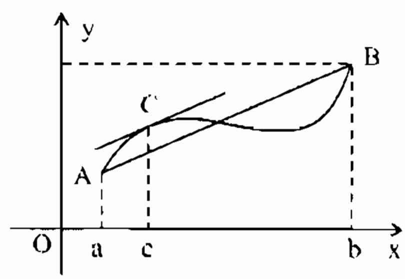
d) $y = e^{ax}$; e) $y = xe^x$; f) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

§ 7. CÔNG THỨC LAGRANGE

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nếu f liên tục trên $[a\,;b]$ và có đạo hàm trên $(a\,;b)$ thì tồn tại số $c \in (a\,;b)$ sao cho :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



2. Ý nghĩa hình học : Trên cung AB của đồ thị hàm số f trên $[a\,;b]$ tồn tại một điểm C có hoành độ $c \in (a\,;b)$ mà tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng AB.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. **Áp dụng công thức Lagrange để chứng minh bất đẳng thức :**

Chọn hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a\,;b]$, có đạo hàm trên $(a\,;b)$ và $|f'(x)| \le M,\ \forall x \in (a\,;b)$ theo công thức Lagrange

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = |f'(c)| \le M,$$

suy ra $-M(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$

2. Chứng minh phương trình f(x) = 0 có nghiệm trong khoảng (a ; b) :

Chọn hàm số $y = F(x)$ liên tục trên $[a ; b]$, có đạo hàm trên $(a ; b)$ sao cho $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a ; b)$ sao cho

$$F'(a) = f(x),\ \forall x \in (a ; b) \text{ và } F(a) = F(b)$$

Theo công thức Lagrange tồn tại $c \in (a ; b)$ sao cho

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) \quad \text{hay} \quad f(c) = 0$$

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng nếu $0 < b < a$ thì

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \tag{1}$$

Hướng dẫn giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{\ln a - \ln b}{a-b} < \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} < \dfrac{1}{b}$

Với $f(x) = \ln x$, hàm số $f(x)$ liên tục trên $[b ; a]$, có đạo hàm trên $(b ; a)$ nên $\exists c \in (b ; a)$ sao cho $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c) = \dfrac{1}{c}$

Vì $0 < b < c < a$ nên $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{b}$, $\Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{\ln a - \ln b}{a-b} < \dfrac{1}{b}$

Ví dụ 2 : Cho $x > 1$ và $a > 1$, chứng minh rằng : $x^a - 1 > a(x-1)$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(t) = t^a$ với $1 \le t \le x$. Ta có $f'(t) = at^{a-1}$. Theo công thức Lagrange thì tồn tại $c \in (1 ; x)$ thoả mãn điều kiện

$$\frac{x^a - 1^a}{x-1} = ac^{a-1} \text{ hay } x^a - 1 = a(x-1).c^{a-1}$$

Vì $c > 1$ và $a - 1 > 0$ nên $c^{a-1} > 1$, do đó :

$$a(x-1).c^{a-1} > a(x-1) \text{ (vì } a(x-1) > 0) \Rightarrow x^a - 1 > a(x-1).$$

Ví dụ 3 : Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ thoả :

$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in (0 ; 1)$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số

$$F(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x$$

với $x \in (a ; b)$.

Ta có $F(0) = 0$ và $F(1) = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$

Áp dụng công thức Lagrange cho hàm số F trên $[0 ; 1]$ thì tồn tại $x \in (0 ; 1)$ sao cho :

$$F(1) - f(0) = (1-0).F'(x_0) \Rightarrow F'(x_0) = 0.$$

Mặt khác, ta có :

$$F'(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = f(x) \Rightarrow f(x_0) = 0.$$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (0 ; 1)$.

D. LUYỆN TẬP

7.1 Cho $0 < a < b$, $n > 1$. Chứng minh rằng :

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a).$$

7.2 Cho $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}.$$

7.3 Chứng minh rằng nếu $x > 0$ thì :

$$\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

7.4 Cho $m > 0$, $n > 0$ và $f(x) = 2 + x^m(x-1)^n$. Chứng minh rằng phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x \in (0 ; 1)$.

7.5 Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 3x + m = 0$ không thể có hai nghiệm phân biệt trong $(0 ; 1)$ với mọi giá trị của m.

7.6 Cho $m > 1$ và a, b, c thỏa

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in (0 ; 1)$.

§ 8. HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa :** Cho hàm số $f : (a ; b) \to \mathbf{R}$

+ f là hàm số tăng (đồng biến) trên $(a ; b)$ nếu

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ với } x_1, x_2 \in (a ; b)$$

+ f là hàm số giảm (nghịch biến) trên $(a ; b)$ nếu

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ với } x_1, x_2 \in (a ; b)$$

+ Hàm số tăng hoặc giảm được gọi chung là hàm số đơn điệu.

2. **Định lí 1 :**

- Nếu $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a ; b)$ thì f là hằng số trên $(a ; b)$.

- Nếu $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a ; b)$ thì f tăng trên $(a ; b)$.

- Nếu $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a ; b)$ thì f giảm trên $(a ; b)$.

3. **Định lí 2 :** Giả sử $f'(x) = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $(a ; b)$

+ f tăng trên $(a ; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a ; b)$.

+ f giảm trên $(a ; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a ; b)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Xét tính đơn điệu của hàm số :

– Tìm miền xác định D của hàm số ;

– Tính đạo hàm y' ;

– Xét dấu y' và lập bảng biến thiên.

2. Điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng cho trước :

Bài toán : Xác định m để hàm số y = f(x, m) tăng (hoặc giảm) trên khoảng I.

– Tìm miền xác định D của hàm số (ta phải có $I \subset D$) ;

– Định m để $y' \geq 0 (\leq 0)$ với mọi $x \in I$.

Lưu ý :

– Cần nắm vững các định lí về dấu tam thức bậc hai và việc so sánh các số α, β với các nghiệm của tam thức bậc hai.

– Đây là bài toán áp dụng tam thức không đổi dấu trên một khoảng. Chẳng hạn :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$$f(x) \geq 0,\ \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}, \qquad f(x) \leq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0, \forall x > \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $a < 0$:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in (\alpha\ ;\ \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \geq 0 \\ f(\beta) \geq 0 \end{cases}$$

Lưu ý : Nếu miền xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = R \setminus \{x_0\}$ thì :

– Hàm số đồng biến trên $(\alpha\,;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' \geq 0,\ x > \alpha \\ x_0 \leq \alpha \end{cases}$

– Hàm số nghịch biến trên $(\alpha\,;\ +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' \leq 0,\ x > \alpha \\ x_0 \leq \alpha \end{cases}$

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số :

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$;   b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$;   c) $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định $D = R \setminus \{-1\}$

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	–	||	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Vậy :

Hàm số tăng trên các khoảng $(-\infty\,;\ -2), (0\,;\ +\infty)$;

Hàm số giảm trên các khoảng $(-2\,;\ -1)$, $(-1\,;\ 0)$.

b) Miền xác định $D = (0\,;\,1) \cup (1\,;+\infty)$

Ta có $y' = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		1		e		$+\infty$
y'		||	–	||	–	0	+	
y		||	↘	||	↘	e	↗	

Vậy : Hàm số tăng trên khoảng $(e ; +\infty)$ và giảm trên các khoảng $(0 ; 1)$, $(1 ; e)$.

c) Miền xác định $D = R$ (vì $x^2 - x + 1 > 0$ với mọi x)

$$\text{Ta có } y' = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}(x + 1)}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{2(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(x + 1)}{2(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{-3x + 3}{2(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	−1	↗	2	↘	1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -1$$

Ví dụ 2 : Tuỳ theo m, hãy khảo sát sự biến thiên của hàm số :

$$y = 4x^3 + (m + 3)x^2 + mx$$

Hướng dẫn giải

Miền xác định $D = \mathbf{R}$

Ta có $y' = 12x^2 + 2(m + 3)x + m \Rightarrow \Delta' = (m - 3)^2$

i) Nếu $m = 3$ thì $\Delta' = 0 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbf{R}$.

ii) Nếu $m \neq 3$ thì $\Delta' > 0 \Rightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = -\frac{1}{2}\ ;\ x_2 = -\frac{m}{6}.$$

Ta có : $x_1 - x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{m}{6} = \frac{m-3}{6}$

– Với $m < 3$ ta có $x_1 < x_2$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{m}{6}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

– Với $m > 3$ ta có $x_1 > x_2$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\frac{m}{6}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Kết luận :

– Với $m = 3$: hàm số tăng trên R

– Với $m < 3$: hàm số giam trên khoang $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{m}{6}\right)$ và tăng trên hai khoảng $\left(-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{m}{6}\ ;\ +\infty\right)$.

– Với $m > 3$: hàm số giảm trên khoảng $\left(-\frac{m}{6}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$ và tăng trên hai khoảng $\left(-\infty\ ;\ -\frac{m}{6}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right)$.

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x^2 + \frac{3}{4}x\sin 2a$. Xác định a để hàm số đồng biến trên **R**.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = x^2 - (\sin a + \cos a)x + \frac{3}{4}\sin 2a.$

Hàm số đồng biến trên **R** khi và chỉ khi

$y' \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \Delta = (\sin a + \cos a)^2 - 3\sin 2a \leq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin 2a \leq 0 \Leftrightarrow \sin 2a \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 2a \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi \leq a \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ (k \in Z).$$

Ví dụ 4 : Xác định m để hàm số sau luôn nghịch biến trên **R** : $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x.$

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = m - 3 + (2m+1)\sin x.$

Hàm số nghịch biến trên **R** khi và chỉ khi

$y' \leq 0,\ \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow m - 3 + (2m+1)\sin x \leq 0.$ với mọi x.

Đặt : $t = \sin x\ (-1 \leq t \leq 1)$. Ta phải tìm m để hàm số bậc nhất

$$f(t) = m - 3 + (2m+1)t \leq 0,\ \forall t \in [-1\ ;\ 1].$$

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 4 \leq 0 \\ 3m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq \frac{2}{3}$$

Vậy hàm số nghịch biến trên **R** khi $-4 \leq m \leq \frac{2}{3}.$

Ví dụ 5 : Xác định m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + (m-1)x^2 + (m+3)x$ tăng trên khoảng $(0\ ;\ 3)$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = f(x) = -x^2 + 2(m-1)x + m + 3.$

Hàm số tăng trên $(0\ ;\ 3)$ khi và chỉ khi

$y' \geq 0,\ \forall x \in (0\ ;\ 3) \Leftrightarrow f(x) = -x^2 + 2(m-1)x + m + 3 \geq 0,\ \forall x \in (0\ ;\ 3)$

Vì $a = -1 < 0$ nên để $f(x) \geq 0, \forall x \in (0;3)$ thì $(0;3)$ phải nằm trong khoảng hai nghiệm số của $f(x)$, tức là

$$x_1 \leq 0 < 3 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)f(0) \leq 0 \\ (-1)f(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m-3 \leq 0 \\ 12-7m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{12}{7}$$

Ví dụ 6 : Cho hàm số : $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$

a) Tìm m để hàm số tăng trên từng khoảng xác định ;

b) Tìm m để hàm số tăng trên $(2;+\infty)$;

c) Tìm m để hàm số giảm trên $(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

Miền xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

Ta có : $y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$

a) Hàm số tăng trên khoảng xác định khi và chỉ khi

$$y' > 0,\ \forall x \neq -m \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$$

b) Hàm số tăng trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4>0 \\ -m \notin (2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right. \\ -m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Vậy khi $m > 2$ thì y tăng trên $(2;+\infty)$.

c) Hàm số giảm trên $(-\infty;1) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ -m \notin (-\infty;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$$

Vậy khi $-2 < m \leq -1$ thì y giảm trên $(-\infty;1)$.

Ví dụ 7 : Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{-x+m}$

Xác định m để hàm số nghịch biến trong khoảng $(2;+\infty)$.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1996)

Hướng dẫn giải

Miền xác định : $D = R \setminus \{m\}$

Ta có $y' = \dfrac{-2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1}{(m - x)^2}$

Hàm số nghịch biến trong khoảng $(2 ; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (2 ; +\infty) \subset D \\ y' \le 0, \text{ với mọi } x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 \\ -2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1 \le 0, \text{ với mọi } x > 2 \end{cases}$$

$$\Delta' = 2(m + 1)^2$$

– Với $m = -1$ thì $y = \dfrac{2x^2 + 2x}{-(x + 1)} = -2x \ (x \ne -1)$

Hàm số nghịch biến trong khoảng $(2 ; +\infty)$

– Với $m \ne -1$ thì $\Delta' > 0 : f(x) = -2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$, khi đó

$$f(x) \le 0, \ \forall x > 2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \le 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(2) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -1 \\ m^2 - 10m + 7 \ge 0 \\ m < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \le 5 - 3\sqrt{2} \text{ (thoả điều kiện } m \le 2)$$

Vậy : $m \le 5 - 3\sqrt{2}$

D. LUYỆN TẬP

8.1 Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số

a) $y = \dfrac{x^4}{4} + x^3 - \dfrac{x^2}{2} - 3x$; b) $y = \sqrt[3]{x^2}(x - 5)$;

c) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x - 2}$; d) $y = x^2 e^{-x}$;

e) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)$.

8.2 Tuỳ theo m khảo sát sự biến thiên của hàm số :

$$y = \frac{mx + m - 7}{5x - m + 3}$$

8.3 a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx - 2$; b) $y = x + m\sin x$.

8.4 Cho hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$. Định m để hàm số :

a) Luôn tăng trên **R** ; b) Tăng trên khoảng $(2 ; +\infty)$;

c) Tăng trên các khoảng $(-\infty ; -1)$, $(2 ; +\infty)$.

8.5 Xác định m để hàm số

$$y = x^3 - ax^2 - (2a^2 - 7a + 7)x + 2(a-1)(2a-3)$$

tăng trên $[2 ; +\infty)$.

(Trích đề thi Đại học Kinh tế Quốc dân, năm 1997)

8.6 Xác định a để hàm số $y = \frac{x^2 - 2ax + 3a^2}{2a - x}$ nghịch biến trên khoảng $(1 ; +\infty)$.

8.7 Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 5}{3 - x}$. Định m để hàm số :

a) Giảm trên khoảng xác định ;
b) Giảm trên $(-1 ; 0)$; c) Tăng trên $(-2 ; 2)$.

8.8 Cho hàm số $y = a\sin x + b\cos x + x$. Tìm điều kiện của a, b để hàm số đồng biến trên **R**.

§ 9. ÁP DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Chứng minh đẳng thức :

Áp dụng định lí :

Nếu $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a ; b)$ thì $f(x) = C$ (hằng số), $\forall x \in (a ; b)$.

Để tìm C ta chọn $x_0 \in (a ; b)$ thì $C = f(x_0)$.

2. Chứng minh bất đẳng thức :

Giả sử cần chứng minh bất đăng thức $f(x) > g(x)$, $x \in (a ; b)$.

Xét hàm số : $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, với $x \in [a ; b]$.

– Nếu φ tăng trên $(a ; b)$ thì $\varphi(x) > \varphi(a)$, với $\forall x \in (a ; b)$

– Nếu φ giảm trên $(a ; b)$ thì $\varphi(x) > \varphi(b)$, với $\forall x \in (a ; b)$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng $\cos\alpha + \alpha\sin\alpha > 1$, với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

(Trích đề thi Đại học Hàng hải, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = \cos x + x\sin x - 1$, với $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có :

$$f'(x) = -\sin x + \sin x + x\cos x = x\cos x \geq 0,\ \forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$$

Suy ra f tăng trên $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. Do đó, với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì :

$$f(\alpha) > f(0) = 0 \Rightarrow \cos\alpha + \alpha\sin\alpha > 1 \text{ với } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng $2^{2\sin x} + 2^{\text{tg}x} > 2^{\frac{3x}{2}+1}$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương $2^{2\sin x}$ và $2^{\tan x}$ ta có :

$$2^{2\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2\sqrt{2^{2\sin x + \tan x}} \Leftrightarrow 2^{2\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2 \,.\, 2^{\frac{2\sin x + \tan x}{2}}$$

Ta cần phải chứng minh $2\sin x + \tan x > 3x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Xét hàm số $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$

Ta có $f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3=\frac{2\cos^3 x-3\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$

$$=\frac{(2\cos x+1)(1-\cos x)^2}{\cos^2 x}\geq 0,\ \forall x\in\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right)$ mà $f(0)=0$ nên với $0<x<\frac{\pi}{2}$ ta có $f(x)=2\sin x+\tan x-3x>0$ (đpcm).

Ví dụ 3 : Chứng minh rằng :

a) $2<\sqrt{\log_2 3}+\sqrt{\log_3 2}<\frac{3\sqrt{2}}{2}$; b) $b\tan a<a\tan b$ với $0<a<b<\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $\alpha=\sqrt{\log_2 3}$. Vì $1<\sqrt{\log_2 3}<2$ nên $1<\alpha<\sqrt{2}$

Mặt khác, $\sqrt{\log_2 3}+\sqrt{\log_3 2}=\alpha+\frac{1}{\alpha}$ với $1<\alpha<\sqrt{2}$

Xét hàm số $f(x)=x+\frac{1}{x}$ với $x\in[1\ ;\ 2]$. Ta có :

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}\geq 0,\forall x\in\left[1\ ;\ \sqrt{2}\right]\Rightarrow f$ tăng trên $\left[1\ ;\ \sqrt{2}\right]$.

Do đó, với $1<\alpha<\sqrt{2}$ thì $f(1)<f(\alpha)<f\left(\sqrt{2}\right)$ hay

$$2<\sqrt{\log_2 3}+\sqrt{\log_3 2}<\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

b) Ta có $b\tan a<a\tan b\Leftrightarrow\frac{\tan a}{a}<\frac{\tan b}{b}$ $(a, b>0)$

Ta chứng minh hàm số $f'(x)=\frac{\tan x}{x}$ tăng trên $\left(0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có : $f'(x)=\frac{1-\frac{1}{2}\sin x}{x^2\cos^2 x}$. Đặt $g(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x$ trên $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có : $g'(x)=1-\cos 2x\geq 0\Rightarrow g$ tăng trên $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

Do đó : $g(x) > g(0) = 0, \forall x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

Từ đó suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f$ tăng trên $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

Vậy $\frac{\tan a}{a} < \frac{\tan b}{b}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 4 : Cho hai hàm số :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) \; ; \; g(x) = x - \ln(1+x)$$

a) Chứng minh rằng với $x > 0$ thì $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$;

b) Với n là số nguyên dương, hãy tìm $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ với

$$u_n = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)\right]$$

(Trích đề thi Đại học, năm 1984)

Hướng dẫn giải

a) Ta có $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} \le 0, \; \forall x \ge 0 \Rightarrow f$ giảm trên $[0 ; \infty)$

Do đó với $x > 0$ thì $f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$ (1)

Mặt khác, $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \ge 0, \; \forall x \ge 0 \Rightarrow g$ tăng trên $[0 ; \infty)$.

Do đó với $x > 0$ thì $g(x) > g(0) \Rightarrow x > \ln(1+x)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ với $x > 0$

b) Ta có $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$

Áp dụng kết quả câu a), ta có :

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{n^4} < \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{2}{n^2} - \frac{1}{2}.\frac{2^2}{n^4} < \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) < \frac{2}{n^2}$$

$$\frac{3}{n^2} - \frac{1}{2}.\frac{3^2}{n^4} < \ln\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) < \frac{3}{n^2}$$

...

$$\frac{n}{n^2} - \frac{1}{2}.\frac{n^2}{n^4} < \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) < \frac{n}{n^2}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được :

$$\frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) - \frac{1}{2}.\frac{1}{n^4}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) < u_n < \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n).$$

Mà $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ và $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

nên $\dfrac{n(n+1)}{2n^2} - \dfrac{1}{2}.\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} < u_n < \dfrac{n(n+1)}{2n^2}$

Cho $n \to \infty$ thì $\dfrac{1}{2} < \lim\limits_{n\to\infty} u_n < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

C. LUYỆN TẬP

9.1 Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$ với mọi $x > 0$;

b) $\alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta > 2(\cos\beta - \cos\alpha)$ với $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

9.2 Chứng minh rằng $2^{\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{x+1}$, với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

9.3 Cho $a \le 6$, $b \le -8$, $c \le 3$. Chứng minh rằng với mọi $x \ge 1$ ta đều có $x^3 \ge ax^2 + bx + c$.

9.4 Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc nhọn thì :

a) $\sin A + \sin B + \sin C + \tan A + \tan B + \tan C > 2\pi$;

b) $2(\sin A + \sin B + \sin C) + \tan A + \tan B + \tan C > 3\pi$.

§ 10. ÁP DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Giả sử hàm số $y = f(x)$ tăng (hoặc giảm) trên $(a\,;b)$, ta có :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ (với } x_1, x_2 \in (a\,;b))$$

2. Giả sử $y = f(x)$ tăng trên $(a\,;b): f(x_1) \le f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \le x_2$

Giả sử $y = f(x)$ giảm trên $(a\,;b): f(x_1) \le f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \ge x_2$

3. Nếu $y = f(x)$ tăng trên $(a\,;b)$ và $y = g(x)$ là hàm hằng hoặc là một hàm số giảm trên $(a\,;b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(a\,;b)$.

Do đó nếu có $x_0 \in (a\,;b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm các số x, y thuộc khoảng $(0\,;\pi)$ thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} \cot x - \cot y = x - y & (1) \\ 5x - 8y = 2\pi & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $(1) \Rightarrow \cot x - x = \cot y - y$ (3)

Xét hàm số : $f(t) = \cot t - t$, với $0 < t < \pi$.

Ta có : $f'(t) = -\dfrac{1}{\sin^2 t} - 1 < 0,\ \forall t \in (0\,;\pi)$ suy ra f giảm trên $(0\,;\pi)$ nên từ (3) suy ra $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ (4)

Từ (2) và (4) ta được $x = y = \dfrac{2\pi}{13}$

Ví dụ 2 : Giải bất phương trình $2^x < 3^{\frac{x}{2}} + 1$.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1995)

Hướng dẫn giải

Ta có : $2^x < 3^{\frac{x}{2}} + 1 \Leftrightarrow 1 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Hàm số $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nghịch biến trên **R** và $f(2) = 1$ nên $f(2) < f(x) \Leftrightarrow x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình : $S = (-\infty\,;\, 2)$.

Ví dụ 3 : Giải các phương trình sau :

a) $2^x = 6 - x$; b) $\log_{12}\left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}\right) = \frac{1}{2}\log_9 x$.

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $y = 2^x$ tăng trên **R** và hàm số $y = 6 - x$ giảm trên **R**. Rõ ràng $x = 2$ là nghiệm của phương trình $2^x = 6 - x$, do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) Điều kiện $x > 0$.

Đặt : $t = \frac{1}{2}\log_9 x \Rightarrow x = 9^{2t} \Rightarrow \sqrt[4]{x} = 3^t$. Phương trình đã cho trở thành :

$$\log_{12}\left(9^t + 3^t\right) = t \Leftrightarrow 9^t + 3^t = 12^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t = 1$$

Hàm số $f(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t$ giảm trên **R** và $f(1) = 1$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $t = 1$, suy ra $x = 9^{2t} = 81$. $\Rightarrow S = \{81\}$.

Ví dụ 4 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \neq 0$; $y \neq 0$.

Từ hệ phương trình suy ra $x > 0$ và $y > 0$. Áp dụng đẳng thức Côsi, ta có :

$$2x^2 = y + \frac{1}{y} \geq 2 \Rightarrow x \geq 1,\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow y \geq 1$$

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{t}$ với $t \geq 1$, ta có :

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2} \geq 0,\ \forall t \geq 1 \Rightarrow f \text{ tăng trên } [1\ ;\ +\infty)$$

i) Nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y) \Rightarrow x + \frac{1}{x} < y + \frac{1}{y}$

$$\Rightarrow 2y^2 < 2x^2 \Rightarrow y < x \text{ (vô lí)}$$

ii) Nếu $y < x$ thì $f(y) < f(x) \Rightarrow y + \frac{1}{y} < x + \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow 2x^2 < 2y^2 \Rightarrow x < y \text{ (vô lí)}$$

Vậy $x = y$.

Thay $x = y$ vào một trong hai phương trình của hệ ta được

$$2x^2 = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

C. LUYỆN TẬP

10.1 Tìm $x,\ y \in \left(0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} \tan x - \tan y = x - y \\ \tan x + \tan y = 2 \end{cases}$$

10.2 Giải các phương trình sau :

a) $3.25^{x-2}(3x-10)5^{x-2} + 3 - x = 0$;

b) $2\log_3 \cot_2 x = \log_2 \cos x$;

c) $(x+2)\log_3(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) - 16 = 0$.

d) $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4^x$

(Trích đề thi trường Bưu chính Viễn thông, năm 1998)

10.3 Giải các phương trình sau :

a) $\log_2\left(1+\sqrt{x}\right) = \log_3 x$; b) $\log_2\left(x^2 - x - 6\right) + \log_2(x+2) + 4$.

10.4 Giải bất phương trình :

$$\log_2\left(\sqrt{x^2 - 5x + 5} + 1\right) + \log_3\left(x^2 + 7 - 5x\right) \leq 2$$

10.5 Tìm nghiệm dương của hệ phương trình : $x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 5}$

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1996)

10.6 Giải các bất phương trình :

a) $2^x + 5^x \geq 7^x$;

b) $2^x + 3^{x+1} + 5^{x+2} \geq 2^{2-x} + 3^{3-x} + 5^{4-x}$;

c) $\dfrac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} \leq 0$.

10.7 Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. Chứng minh rằng :

$$x - \frac{x^2}{2} < f(x) < x \quad \text{với } x > 0.$$

Tính $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ với $S_n = f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + f\left(\dfrac{2}{n^2}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{n}{n^2}\right)$

§ 11. ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa :** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng $(a\ ;\ b)$ và $x_0 \in (a\ ;\ b)$.

– f đạt cực đại tại x_0 nếu với mọi x thuộc lân cận nào đó của x_0 ta có : $f(x) < f(x_0)$ (với $x \neq x_0$)

– f đạt cực tiểu tại x_0 nếu với mọi x thuộc lân cận nào đó của x_0 ta có : $f(x) > f(x_0)$ (với $x \neq x_0$)

– f đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 ta nói f đạt cực trị tại x_0

– $f(x_0)$ gọi là cực trị của hàm số $f(x)$; x_0 là điểm cực trị của hàm số f.

Điểm $M(x_0, f(x_0))$ gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số.

2. Điều kiện cần để hàm số có cực trị :

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ phải cùng phương với trục hoành.

3. Điều kiện đủ để có cực trị :

Điều kiện đủ thứ nhất : Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a ; b)$ và $x_0 \in (a ; b)$. Nếu khi x đi qua x_0 mà $f'(x)$ đổi dấu thì hàm số đạt cực trị tại x_0.

Chú ý : Có thể thay giả thiết "$f(x)$ có đạo hàm tại x_0" bằng "$f(x)$ liên tục tại x_0"

x	$-\infty$	a		x_0		b	$+\infty$
f'(x)			+	0	-		
f(x)			↗	CĐ	↘		

x	$-\infty$	a		x_0		b	$+\infty$
f'(x)			–	0	+		
f(x)			↘	CT	↗		

Điều kiện đủ thứ hai : Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $(a ; b)$, $x_0 \in (a ; b)$ và $f'(x_0) = 0$

(i) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_0 ;

(ii) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

Chú ý : Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm có đạo hàm bằng 0 hoặc tại những điểm không có đạo hàm.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Tìm điểm cực trị của hàm số y = f(x) :

a) Dấu hiệu đủ thứ nhất :

– Tìm miền xác định và tính $y' = f'(x)$

– Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương $(+)$ sang âm $(-)$ tại x_0 thì y đạt cực đại tại x_0. Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm $(-)$ sang dương $(+)$ tại x_0 thì y đạt cực tiểu tại x_0.

b) Dấu hiệu đủ thứ hai :

– Tìm miền xác định và tính $f'(x), f''(x)$.

– Tìm nghiệm x_0 của y' (giải phương trình $f'(x) = 0$)

Nếu $f''(x_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_0

Nếu $f''(x_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

2. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị :

– Tìm miền xác định và tính $y' = f'(x)$

– Hàm số có cực trị khi $f'(x) = 0$ có nghiệm và f' đổi dấu khi x qua các nghiệm đó.

Chú ý : Nếu bài toán nói rõ cực trị là cực đại hay cực tiểu thì ta phải thử lại với giá trị của tham số tìm được hàm số đạt cực đại hay cực tiểu bằng một trong hai dấu hiệu đủ để hàm số có cực trị.

3. Tìm tham số để hàm số có cực trị thoả mãn điều kiện cho trước :

– Trước hết, ta tìm điều kiện để hàm số có cực trị

– Sau đó tiếp tục tìm tham số để các cực trị thoả mãn điều kiện cho trước bằng cách áp dụng định lí Viét hoặc so sánh các số α, β với các nghiệm của phương trình bậc hai.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm các điểm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = x^2e^x$;   b) $y = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$;

c) $y = \dfrac{2x^2 - 4x + 2}{2x+3}$;   d) $y = \dfrac{x}{\ln^2 x}$.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : $D = \mathbf{R}$

Ta có $y' = e^x(x^2 + 2x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗	CĐ	↘	CT	↗	

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Cách khác : (Dấu hiệu đu thứ hai)

Ta có $y'' = e^x(x^2 + 4x + 2)$

Với $x = 0$, ta có $y''(0) = 2e^0 > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Với $x = -2$, ta có $y''(-2) = -2e^{-2} < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

b) Miền xác định $D = \mathbf{R}$

$$y' = \frac{1 - 3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \; ; \; y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	
y		↗	CĐ	↘	

Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{1}{3}$

c) Miền xác định : $D = R \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$$y' = \frac{4(x^2 + 3x - 4)}{(2x+3)^2} \; ; \; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-4		$-\frac{3}{2}$		1	$+\infty$
y'	+	0	-	‖	-	0	+
y	↗	CĐ	↘	‖	↘	CT	↗

Hàm số đạt cực đại tại $x = -4$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

d) Miền xác định : $D = (0 \,;\, +\infty) \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x} \; ; \; y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		1		e^2	$+\infty$
y'	▨		+	‖	-	0	+
y	▨		↗	‖	↘	CT	↗

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = e^2$

Ví dụ 2 : Tìm các điểm cực trị của các hàm số :

a) $y = |\,2x^2 - 3x + 5|$; b) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x + x$; c) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : $D = \mathbf{R}$

$$\text{Ta có } y = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 & \text{nếu } x \le -1 \vee x \ge \frac{5}{2} \\ -2x^2 + 3x + 5 & \text{nếu } -1 < x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 4x - 3 \text{ nếu } x < -1 \vee x > \dfrac{5}{2} \\ -4x - 3 \text{ nếu } -1 < x < \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Tại các điểm $x = -1,\ x = \dfrac{5}{2}$ hàm số không có đạo hàm nhưng đạt cực đại tại đó.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
4x - 3		−		−	0	+		+	
- 4x + 3		+		+	0	−		−	
y'		−	||	+	0	−	||	+	
y		↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và tại $x = \dfrac{5}{2}$, đạt cực đại tại $x = \dfrac{3}{4}$.

b) Miền xác định : $D = \mathbf{R}$, $y' = \sqrt{3}\cos x - \sin x + 1$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Ta có $y'' = -\sqrt{3}\sin x - \cos x$

Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ ta có $y''\left(\dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\right) = \sqrt{3} > 0$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbf{Z})$.

c) Miền xác định $D = (0\ ;\ +\infty)$

Ta có : $\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}} = \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x^2}(1 - \ln x)$

suy ra $y' = x^{\frac{1}{x}} \dfrac{1}{x^2}(1 - \ln x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		e		$+\infty$
y'			$+$	0	$-$	
y			$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	

Hàm số đạt cực đại tại $x = e$.

Ví dụ 3 : Xác định m để các hàm số sau đạt cực đại và cực tiểu :

a) $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x - 1$; b) $y = \dfrac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : $D = \mathbf{R}$. Ta có : $y' = x^2 + 2mx + m + 6$

y có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi hàm số $f(x) = x^2 + 2mx + m + 6$ triệt tiêu và đổi dấu trên $\mathbf{R}$. Điều này xảy ra khi phương trình $x^2 + 2mx + m + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $\Delta' = m^2 - m - 6 > 0$ $\Leftrightarrow (m < -2) \vee (m > 3)$.

b) – Với $m = 0$ ta có $y = -x^2 + 2$ đạt cực đại tại $x = 0$

– Với $m \neq 0$: Miền xác định $D = R \setminus \left\{\frac{1}{m}\right\}$. Ta có : $y' = \dfrac{mx^2 - 2x + m}{(mx-1)^2}$.

Đặt $f(x) = mx^2 - 2x + m$

y có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{m}$. Điều này xảy ra khi

$$\begin{cases} \Delta' = 1 - m^2 > 0 \\ f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} - \frac{2}{m} + m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Vậy : $-1 < m < 1$ và $m \neq 0$.

Ví dụ 4 : Xác định m để hàm số :

a) $y = mx^3 + 3x^2 + 5x + 2$ đạt cực đại tại $x = 2$;

b) $y = \frac{1}{3}\sin 3x + m\sin x$ đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{3}$.

c) $y = a\ln x + bx^2 + x$ đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $y' = 3mx^2 + 6x + 5$; $y'' = 6mx + 6$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12m + 17 = 0 \\ 12m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{17}{12}$

b) Ta có $y' = \cos 3x + m\cos x$; $y'' = -3\sin 3x - m\sin x$

Hàm số đạt cực đại tại $x = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \\ y''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

c) Miền xác định $D = (0 ; +\infty)$

Ta có $y' = \dfrac{a}{x} + 2bx + 1$; $y'' = -\dfrac{a}{x^2} + 2b$

Nếu hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$ thì

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 1 = 0 \\ \dfrac{a}{2} + 4b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{3} \\ b = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Thử lại :

Với $a = -\dfrac{2}{3}$, $b = -\dfrac{1}{6}$ thì $y''(1) = \dfrac{1}{3} > 0$, $y''(2) = -\dfrac{1}{6} < 0$

Vậy với $a = -\dfrac{2}{3}$, $b = -\dfrac{1}{6}$ thì y đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Ví dụ 5 : Xác định a để hàm số $y = x^4 + 8ax^3 + 3(1 + 2a)x^2 - 4$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

Hướng dẫn giải

Miền xác định : $D = \mathbf{R}$. Ta có : $y' = 2x\left[2x^2 + 12ax + 3(1 + 2a)\right]$.

Đặt $f(x) = 2x^2 + 12ax + 3(1 + 2a)$

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại nếu xảy ra một trong các trường hợp sau :

(i) $f(x) \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \Delta' = 6(6a^2 - 2a - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - \sqrt{7}}{6} \leq a \leq \dfrac{1 + \sqrt{7}}{6}$

Khi đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Bang biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	CT	$\nearrow$	

(ii) $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = 6\left(6a^2 - 2a - 1\right) > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Khi đó $y' = 4x^2(x-3)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$. Vậy $\frac{1-\sqrt{7}}{6} \le a \le \frac{1+\sqrt{7}}{6}$ hoặc $a = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 6 : Với giá trị nào của m thì hàm số $y = -2x + m\sqrt{x^2+1}$ có cực tiểu ?

Hướng dẫn giải

Miền xác định : $D = \mathbf{R}$. Ta có : $y' = -2 + \frac{mx}{\sqrt{x^2+1}}; y'' = -\frac{m}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$

Hàm số có cực tiểu khi hệ sau có nghiệm x_0

$$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x_0^2+1} = mx_0 \\ m > 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Với $m>0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 > 0 \\ 4\left(x_0^2+1\right) = m^2x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 > 0 \\ \left(m^2-4\right)x_0^2 = 4 \end{cases}$ (2)

(2) có nghiệm $x_0 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 2$ (vì $m > 0$)

Vậy với $m > 2$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x_0 = \dfrac{2}{\sqrt{m^2 - 4}}$

Ví dụ 7 : Cho hàm số : $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$

Với giá trị nào của m thì hàm số có cực đại và cực tiểu đồng thời hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 + 2x_2 = 1$.

(Trích đề thi Đại học Y Hà Nội, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Miền xác định : $D = \mathbf{R}$. Ta có : $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Với điều kiện (1) hoành độ các điểm cực đại, cực tiểu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$.

Từ giả thiết và định lí Viét ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} & (2) \\ x_1 x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} & (3) \\ x_1 + 2x_2 = 1 & (4) \end{cases}$$

Từ (2) và (4) suy ra : $x_1 = \dfrac{3m-4}{m}$; $x_2 = \dfrac{2-m}{m}$

Thay vào (3) ta được : $\dfrac{2-m}{m} \cdot \dfrac{3m-4}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$ (thoả (1))

Vậy $m = 2$, $m = \dfrac{2}{3}$

Ví dụ 8 : Tìm $m > 0$ để hàm số

$$y = \frac{x^2 + m^2x + 2m^2 - 5m + 3}{x}$$

có cực tiểu trong khoảng $0 < x < m$.

(Trích đề thi Đại học, năm 1980)

Hướng dẫn giải

$$y = x + m^2 + \frac{2m^2 - 5m + 3}{x}$$

Miền xác định $D = \mathbf{R}$. Ta có $y' = 1 - \frac{2m^2 - 5m + 3}{x^2} = \frac{x^2 - (2m^2 - 5m + 3)}{x^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m^2 - 5m + 3$$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 1 \\ m > \frac{3}{2} \end{array}\right.$ (vì $m > 0$)

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2m^2 - 5m + 3}$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y		↗	CĐ	↘	CT	↗	

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \sqrt{2m^2 - 5m + 3} \in (0 ; 2m)$ khi và chỉ khi

$0 < \sqrt{2m^2 - 5m + 3} < 2m \Leftrightarrow 0 < 2m^2 - 5m + 3 < 4m^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < m < 1 \\ m > \frac{3}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > \frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{2} ; 1\right) \cup \left(\frac{3}{2} ; \pm\infty\right).$$

Ví dụ 9 : Cho hàm số : $y = \frac{2x^3}{3} + (\cos a - 3\sin a)x^2 - 8(\cos 2a + 1)x + 1$.

Chứng minh rằng hàm số luôn có cực đại và cực tiểu đồng thời hoành độ các điểm cực trị x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 \le 18$.

Hướng dẫn giải

Miền xác định : $D = \mathbf{R}$

Ta có : $y' = 2x^2 + 2(\cos a - 3\sin a)x - 8(\cos 2a + 1)$

$$\Delta' = (\cos a - 3\sin a)^2 + 16(\cos^2 a + 1)$$

$$= (\cos a - 3\sin a)^2 + 32\cos^2 a > 0 \text{ với mọi a,}$$

(Vì $\cos a - 3\sin a$ và $\cos a$ không đồng thời bằng 0).

Vậy hàm số luôn có cực đại và cực tiểu với mọi a.

Khi đó hoành độ các điểm cực trị x_1, x_2 là nghiệm phương trình $2x^2 + 2(\cos a - 3\sin a)x - 8(\cos 2a + 1) = 0$.

Theo định lí Viét : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3\sin a - \cos a \\ x_1x_2 = -4(\cos 2a + 1) \end{cases}$

Ta có : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (3\sin a - \cos a)^2 + 8(\cos 2a + 1)$

$$= 9\sin^2 a + \cos^2 a - 3\sin^2 a + 8\cos^2 a + 8$$

$$= \frac{9}{2}(1 - \cos 2a) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) - 3\sin 2a + 8\cos 2a + 8$$

$$= 13 + 4\cos 2a - 3\sin 2a \le 18$$

Vì $|4\cos 2a - 3\sin 2a| \le \sqrt{4^2 + 3^2}\sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a} = 5$. (Bất đẳng thức Bunhiacôpxki).

Ví dụ 10 : Cho hàm số $y = (x - a)(x - b)(x - c)$ với $a < b < c$. Chứng minh rằng hàm số luôn có cực đại và cực tiểu. Khi đó hãy xác định vị trí hoành độ của điểm cực đại và cực tiểu đối với a, b, c.

Hướng dẫn giải

Miền xác định : $D = \mathbf{R}$

Ta có : $y' = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c)(x - a) = f(x)$.

Do đó : $f(a) = (a - b)(a - c) > 0$, $f(b) = (b - c)(b - a) < 0$

$$f(c) = (c - a)(c - b) > 0$$

f liên tục trên **R** có $f(a).f(b)<0$ và $f(b).f(c)<0$ nên $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $a<x_1<b<x_2<c$.

Vậy hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	$-$	0	+	
y		↗	CĐ	↘	CT	↗	

Hoành độ điểm cực đại $x_1 \in (a\,;b)$ còn hoành độ điểm cực tiểu $x_2 \in (b\,;c)$.

D. LUYỆN TẬP

11.1 Tìm cực trị các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; b) $y=x\sqrt{4-x^2}$;

c) $y=e^x\sin x$; d) $y=x^n(x-2)^2$, với n là số nguyên dương.

11.2 Xác định a để hàm số $y=\dfrac{a\sin x-\cos x-1}{a\cos x}$ đạt cực trị tại ba điểm phân biệt thuộc khoảng $\left(0\,;\dfrac{9\pi}{4}\right)$

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1996)

11.3 Xác định m để hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+m}{x^2-2x+2}$ đạt cực đại tại $x=\sqrt{2}$

(Trích đề thi Đại học Tổng hợp, năm 1976)

11.4 Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+ab}{bx+a}$ $(a\neq 0)$. Xác định a, b để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và đạt cực đại tại $x=4$.

11.5 Xác định a để hàm số $y=-2x+2+a\sqrt{x^2-4x+5}$ có cực đại.

11.6 a) Định m để hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

b) Định m để hàm số $y = mx^4 - 2(m^2 - 1)x^2 + 3m + 2$ có hai cực tiểu và một cực đại.

11.7 Định m để hàm số $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$ đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

(Trích đề thi Đại học, năm 1987)

11.8 Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x^2 + \left(\frac{3}{4}\sin 2a\right)x$.

Xác định a để hàm số có cực trị.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm cực trị, xác định a để cho $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$.

11.9 Cho hàm số $y = \frac{2mx^2 + (4m^2 + 1)x + 32m^3 + 2m}{x + 2m}$. Xác định m để hàm số có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ hai và điểm cực trị kia thuộc góc phần tư thứ tư của mặt phẳng toạ độ.

§ 12. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ VÀ ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA CÁC ĐIỂM CỰC TRỊ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Giá trị cực trị của hàm số :** Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f(x_0)$ là giá trị tương ứng. Một cách tổng quát, muốn tính $f(x_0)$ ta chỉ cần thay $x = x_0$ vào $f(x)$. Nhưng theo điều kiện cần để có cực trị là $f'(x_0) = 0$ nên ta có cách tính $f(x_0)$ gọn hơn với một số hàm ; đồng thời có thể viết được phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

a) Hàm hữu tỉ $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x)$, $v(x)$ là các đa thức không có nghiệm chung : Nếu x_0 là điểm cực trị của $f(x)$ và $v'(x_0) \neq 0$ thì

$$f(x_0) = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}.$$

Thật vậy.

Ta có $f'(x)=\dfrac{u'(x)v'(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

$$f'(x_0)=0\Rightarrow u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)=0\Rightarrow\frac{u(x_0)}{v(x_0)}=\frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}.$$

Chẳng hạn, hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x-1}$ có $y'=\dfrac{x^2-2x-5}{(x-1)^2}$

$$y'=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{6}.$$

Xét dấu y' ta được $x_1=1-\sqrt{6}$ là điểm cực đại và $x_2=1+\sqrt{6}$ là điểm cực tiêu của hàm số. Khi đó các cực trị tương ứng là

$$y_{CĐ}=y\left(1-\sqrt{6}\right)=\frac{2\left(1-\sqrt{6}\right)+2}{1}=4-2\sqrt{6}$$

$$y_{CT}=y\left(1+\sqrt{6}\right)=\frac{2\left(1+\sqrt{6}\right)+2}{1}=4+2\sqrt{6}$$

b) Hàm số đa thức y = f(x) : Thực hiện phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $f'(x)$ được thương là $q(x)$ và dư là đa thức bậc nhất $ax+b$. Ta có :

$$f(x)=f'(x)g(x)+ax+b$$

Nếu x_0 là điểm cực trị của f thì $f'(x_0)=0$ và giá trị cực trị tương ứng là $f(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+ax_0+b=ax_0+b$.

Chẳng hạn, hàm số $y=x^3+3x^2-4x+1$ có $y'=3x^2+6x-4$

$$y'=0\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{3}$$

Xét dấu y' ta được $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{3}$ là điểm cực đại và $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{3}$ là điểm cực tiêu.

Thực hiện phép chia đa thức y cho y' ta được

$$y=\frac{1}{3}(x+1)y'-\frac{14}{3}x+\frac{7}{3}$$

Do đó

$$y_{CĐ}=-\frac{14}{3}\left(\frac{-3-\sqrt{21}}{3}\right)+\frac{7}{3}=7+\frac{14\sqrt{21}}{9}$$

$$y_{C1} = -\frac{14}{3}\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{3}\right) + \frac{7}{3} = 7 - \frac{14\sqrt{21}}{9}.$$

2. Phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số :

a) Hàm số hữu tỉ $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{\alpha x + \beta}$ $(a \neq 0,\ \alpha \neq 0)$ **:**

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại và cực tiểu.

– Giải sử x_1, x_2 là hoành độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số. Các cực trị tương ứng là $y_1 = \dfrac{2ax_1 + b}{\alpha}$; $y_2 = \dfrac{2ax_2 + b}{\alpha}$.

Rõ ràng hai điểm cực trị của đồ thị là $M_1(x_1\,;y_1)$ và $M_2(x_2\,;y_2)$ thuộc đường thẳng có phương trình

$$y = \frac{2a}{\alpha}x + \frac{b}{\alpha}.$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là : $y = \dfrac{2a}{\alpha}x + \dfrac{b}{\alpha}$.

b) Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$ **:**

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại và cực tiểu

– Giả sử x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số, chúng là các nghiệm của $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Lấy đa thức y chia cho y' ta được :

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{b}{9a}\right)y'(x) + \frac{2}{3}\left(c - \frac{b}{3a}\right)x + \left(d - \frac{bc}{9a}\right)$$

Vậy $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$ nên :

$$y_1 = y(x_1) = \frac{2}{3}\left(c - \frac{b}{3a}\right)x_1 + d - \frac{bc}{9a}$$

$$y_2 = y(x_2) = \frac{2}{3}\left(c - \frac{b}{3a}\right)x_2 + d - \frac{bc}{9a}$$

Rõ ràng hai điểm cực trị của đồ thị là $M_1(x_1\,;y_1)$ và $M_2(x_2\,;y_2)$ thuộc đường thẳng của phương trình

$$y = \frac{2}{3}\left(c - \frac{b}{3a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua các điểm có cực trị của đồ thị hàm bậc ba là :

$$y=\frac{2}{3}\left(c-\frac{b}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(2m+3)x+m^2+4m}{x+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có hai cực trị và hai giá trị này trái dấu nhau.

(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Miền xác định $D=R\setminus\{-m\}$

Ta có $y=x+m+3+\dfrac{m}{x+m}\Rightarrow y'=1-\dfrac{m}{(x+m)^2}=\dfrac{x^2+2mx+m^2-m}{(x+m)^2}$

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi phương trình $x^2+2mx+m^2-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-m$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta'=m>0\\ -m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m>0$$

Khi đó hoành độ các điểm cực trị là

$$x_{1,2}=-m\pm\sqrt{m}$$

và giá trị tương ứng của hàm số là :

$$y_1=\frac{2x_1+2m+3}{1}=2\left(-m-\sqrt{m}\right)+2m+3=-2\sqrt{m}+3$$

$$y_2=\frac{2x_2+2m+3}{1}=2\left(-m+\sqrt{m}\right)+2m+3=+2\sqrt{m}+3$$

Hai cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2<0\Leftrightarrow 9-4m<0\Leftrightarrow m>\dfrac{9}{4}$.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có cực trị. Tìm m để tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Miền xác định $D = \mathbf{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y = x - m - \dfrac{m^2 - 3m + 2}{x - 1}$

$$y' = 1 + \frac{m^2 - 3m + 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x-1)^2}$$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = -m^2 + 3m - 2 > 0 \\ 1^2 - 2\,.\,1 + m^2 - 3m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2$$

Hàm số đạt cực trị tại

$$x_1 = 1 - \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \text{ và } x_2 = 1 + \sqrt{-m^2 + 3m - 2}$$

và các cực trị tương ứng là

$$y_1 = \frac{2x_1 - (m+1)}{1} = 1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2}$$

$$y_2 = \frac{2x_2 - (m+1)}{1} = 1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2}$$

Ta có $y_1.y_2 = (1-m)^2 - 4(-m^2 + 3m - 2)$

$$= 5m^2 - 14m + 9 = 5\left(m - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} \geq \frac{-4}{5}$$

Vậy $y_1.y_2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow m = \dfrac{7}{5}$.

Ví dụ 3 : Cho họ đường cong (Cm) : $y = \dfrac{-x^2 + mx - m^2}{x - m}$

a) Tìm m để đường cong (Cm) có điểm cực đại và điểm cực tiểu

b) Với m vừa tìm được ở phần a), hãy viết phương trình đường thẳng nối điểm cực đại và điểm cực tiểu của đường cong (Cm).

(Trích đề thi Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định $D = \mathbf{R}\setminus\{m\}$. $y' = \dfrac{-x^2 + 2mx}{(x-m)^2}$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $-x^2 + 2mx = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-m \Leftrightarrow m \neq 0$.

Với $m \neq 0$, giả sử hoành độ các điểm cực trị là x_1, x_2 thế thì các cực trị tương ứng của hàm số là

$$y_1 = -2x_1 + m \ ; \ y_2 = -2x_2 + m$$

Vậy đường thẳng nối hai điểm cực trị của (Cm) có phương trình là $y = -2x + m$.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Lập phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu đó.

(Trích đề thi Đại học Tài chính, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Miền xác định $D = \mathbf{R}$

$$y' = 3x^2 + 2mx + 7$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\Delta' = m^2 - 21 > 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{21}$$

Khi đó hoành độ x_1, x_2 của các điểm cực trị của đồ thị là nghiệm của phương trình $y' = 0$. Thực hiện phép chia y cho y' ta được :

$$y = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}m\right)y' + \frac{2}{9}(21 - m^2)x + 3 - \frac{7m}{9}$$

Giá trị cực trị tương ứng là :

$$y_1 = \frac{2}{9}(21 - m^2)x_1 + 3 - \frac{7m}{9} \ ; \ y_2 = \frac{2}{9}(21 - m^2)x_2 + 3 - \frac{7m}{9}$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là :

$$y = \frac{2}{9}(21 - m^2)x + 3 - \frac{7m}{9}.$$

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 3(m + 2)x - m - 6$. Định m để :

a) Hàm số có cực đại và cực tiểu.

b) Hàm số có hai cực trị cùng dấu.

c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 3m + 6$

y có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\Delta' = 36 - 9m - 18 > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

b) Với $m < 2$, gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số. Chia y cho y' ta được $y = \frac{1}{3}y'(x-2) + (m-2)(2x+1)$

Giá trị cực trị tương ứng là

$$y_1 = (m-2)(2x_1+1)\ ;\ y_2 = (m-2)(2x_2+1)$$

Suy ra $y_1.y_2 = (m-2)^2(2x_1+1)(2x_2+1)$

$$= (m-2)^2\left[4x_1x_2 + 2(x_2 + x_2) + 1\right]$$

Theo Định lí Viét ta có $x_1 + x_2 = 4$ và $x_1x_2 = m + 2$ nên :

$$y_1y_2 = (m-2)^2(4m+17)$$

Vậy $y_1.y_2$ cùng dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{17}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $m < 2$ ta có : $-\frac{17}{4} < m < 2.$

c) Giả sử $x_1 < x_2$, ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên và do hàm số liên tục trên **R** nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi hai điểm cực trị nằm hai phía đối với Ox tức là y_1 và y_2 trái dấu.

Ta có : $y_1.y_2 = (m-2)^2(4m+17) < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{17}{4}$

Ví dụ 6 : Cho hàm số $y = f(x) = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$.

a) Các số a, b phải thoả mãn điều kiện gì để hàm số có cực đại và cực tiểu. Khi đó viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại và cực tiểu đó.

b) Chứng minh rằng với mọi a, b phương trình

$$(x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3 = 0$$

không có ba nghiệm phân biệt.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Tp. HCM, năm 1994)

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : D = **R**.

Ta có : $y' = 3\left[(x+a)^2 + (x+b)^2 - x^2\right] = 3\left[x^2 + 2(a+b)x + a^2 + b^2\right]$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\Delta' = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) > 0 \Leftrightarrow ab > 0$$

Chia y cho y' ta được $y = \frac{1}{3}y'(x+a+b) - ab(4x+a+b)$

Giải sử x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số, khi đó các cực trị tương ứng là :

$$y_1 = f(x_1) = -ab(4x_1 + a + b)$$

$$y_2 = f(x_2) = -ab(4x_2 + a + b)$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị là :

$$y = -ab(4x + a + b).$$

b) – Nếu $ab \le 0$ thì $y' \ge 0, \forall x \in R \Rightarrow$ y tăng trên **R** $\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

– Nếu $ab > 0$ thì $y_1.y_2 = a^2b^2(9a^2 + 9b^2 - 14ab)$

$$= a^2b^2\left[7(a-b)^2 + 2(a^2+b^2)\right] > 0$$

Hai cực trị cùng dấu, tức là hai điểm cực trị của đồ thị nằm cùng phía đối với trục hoành. Do đó đồ thị không thể cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, vậy phương trình $f(x) = 0$ không thể có ba nghiệm phân biệt.

C. LUYỆN TẬP

12.1 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m-1)x - m + 4}{x - 1}$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có cực đại và cực tiểu. Chứng minh rằng khi đó khoảng cách giữa hai điểm cực đại và điểm cực tiểu không phụ thuộc vào m.

(Trích đề thi Đại học, năm 1997)

12.2 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx - m + 8}{x - 1}$. Xác định m để cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số ở về hai phía của đường thẳng $9x - 7y - 1 = 0$

(Trích đề thi Đại học An ninh, năm 1999)

12.3 Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 7m + 2)x - 2m(m+2)$. Xác định m để hàm số có cực đại, cực tiểu và viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu đó.

(Trích đề thi Học viện Kĩ thuật mật mã, năm 1999)

12.4 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx - 6}{x - m}$. Xác định m để hàm số có hai cực trị. Chứng minh rằng khi đó giá trị hai cực trị cùng dấu.

12.5 Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - 1}$. Định m để hàm số có cực đại và cực tiểu thoả mãn điều kiện $|y_{CĐ} - y_{CT}| > 8$.

12.6 Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 2x^3 + \dfrac{3}{2}(m+2)x^2 - (m+6)x + 1$

a) Định m để hàm số có ba cực trị.

b) Viết phương trình Parabol đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

12.7 Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 3m - 5$. Định m để hàm số có cực trị và viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị.

12.8 Với giá trị nào của m thì hàm số

$$y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$$

có cực đại và cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị song song với đường thẳng $y = kx$ (k cho trước) ? Biện luận theo k số giá trị của m.

§ 13. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa : Cho hàm số $f : D \to \mathbf{R}$.

– Hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 \in D$ nếu $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in D$

Kí hiệu : $\max\limits_{x \in D} f(x) = f(x_0)$

– Hàm số f đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in D$ nếu $f(x) \ge f(x_0)$, $\forall x \in D$

Kí hiệu : $\min\limits_{x \in D} f(x) = f(x_0)$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Cho hàm số $f : D \to \mathbf{R}$ và $X \subset D$. Để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của f trên tập X ta làm như sau :

Phương pháp chung :

– Lập bảng biến thiên của f trên X.

– Dựa vào bảng biến thiên trong đó lưu ý đến sự thay đổi giá trị của f trên X (giá trị hàm số tại các điểm mút, giới hạn hàm số, ...). Phần này chính là tìm miền giá trị của hàm số f trên tập X.

Trường hợp X = [a ; b] :

– Giải phương trình $f'(x) = 0$ để tìm các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trong $[a ; b]$ (nghiệm ở ngoài $[a ; b]$ thì không kể).

– Tính $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ và $f(a), f(b)$.

– Số lớn nhất trong các số vừa tính là $\max f$.

– Số nhỏ nhất trong các số vừa tính là $\min f$.

– Nếu bài toán không nói đến tập X thì ta xem $X = D$.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số :

a) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$ với $x > 0$; b) $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$;

c) $y = 2x + \sqrt{5 - x^2}$.

Hướng dẫn giải

a) $X = (0 ; +\infty)$

Cách 1 : (Dựa vào bảng biến thiên)

Ta có : $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (Vì $x > 0$)

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
y'			-	0	+	
y		$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy min $y = 3$ khi $x = 1$, không tồn tại max y

Cách 2 : (Bất đẳng thức)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$y = \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 \geq 2\sqrt{x.\frac{1}{x}} + 1 \Leftrightarrow y \geq 3$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{1}{x}$ hay $x = 1$ (vì $x > 0$). Vậy $\min y = 3$ khi $x = 1$.

Cách 3 : (Miền giá trị)

y thuộc miền giá trị của hàm số với $x > 0$ khi phương trình $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$ có nghiệm $x > 0$ hay phương trình $x^2 + (1 - y)x + 1 = 0$ có nghiệm $x > 0$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = (1 - y)^2 - 4 \geq 0 \\ S = y - 1 > 0 \text{ (vì } P = 1 > 0) \end{cases} \Leftrightarrow y \geq 3$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{y - 1}{2} = 1$. Vậy min y = 3 khi x = 1.

b) Miền xác định $D = \mathbb{R}$

Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$ ta có $y = \dfrac{t+1}{t^2+t+1}$ với $t \in [-1 ; 1]$

$$y' = \frac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2} \ ; \ y' = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \in [-1 ; 1] \\ t = -2 \notin [-1 ; 1] \end{array}\right.$$

Ta có $y(0) = 1$; $y(-1) = 0$; $y(1) = \dfrac{2}{3}$. Vậy $\min y = 0$, $\max y = 1$.

c) Miền xác định $D = \left[-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\right]$

Ta có : $y' = 2 - \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}} = \dfrac{2\sqrt{5-x^2} - x}{\sqrt{5-x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{5-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4\left(5-x^2\right) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \in \left[-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\right]$$

Ta có $y(2) = 5$; $y\left(-\sqrt{5}\right) = -2\sqrt{5}$; $y\left(\sqrt{5}\right) = 2\sqrt{5}$.

Vậy $\min y = -2\sqrt{5}$; $\max y = 5$.

Ví dụ 2 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$

(Trích đề thi Đại học Ngoại ngữ, năm 1999)

Hướng dẫn giải

$$D = \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$$

Ta có : $y' = 1 - 2\sin x \cos x = 1 - \sin 2x \ge 0$, $\forall x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$

Do đó hàm số đồng biến trên $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		$\dfrac{\pi}{4}$	$+\infty$
y'			$+$		
y		1	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$	

Vậy $\min y = 1$ khi $x = 0$; $\max y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$ khi $x = \dfrac{\pi}{4}$

Ví dụ 3 : Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sin^{20} x + \cos^{20} x$$

(Trích đề thi Đại học Luật, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ và $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ nên hàm số $y = \sin^{20} x + \cos^{20} x$ là hàm tuần hoàn có chu kì $\frac{\pi}{2}$, do đó ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có : $y' = 20\sin^{19} x\cos x - 20\cos^{19} x\sin x = 20\sin x\cos x\left(\sin^{18} x - \cos^{18} x\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \sin x = \cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

$$f(0) = 1 ; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 ; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^9}$$

Vậy $\min y = \frac{1}{512}$ khi $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ và $\max y = 1$ khi $x = k\frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = x^4 - 6mx^2 + m^2$. Tuỳ theo m, tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2 ; 1]$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x^2$ thì $y = f(t) = t^2 - 6mt + m^2$

Với $0 \le t \le 4$, y là hàm số chẵn nên

$$\max_{x\in[-2;1]} y = \max_{x\in[-2;2]} y = \max_{t\in[0;4]} f(t)$$

Ta có $f'(t) = 2t - 6m$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3m$

i) Nếu $3m \le 0$ hay $m \le 0$. Ta có bang biến thiên :

t	$-\infty$	$3m$		0		4	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(t)$					$\nearrow$		

$$\max y = f(4) = m^2 - 24m + 16 \qquad (1)$$

ii) Nếu $3m \geq 4$ hay $m \geq \dfrac{4}{3}$

t	$-\infty$	0		4		$3m$		$+\infty$
$f'(t)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(t)$			$\searrow$					

$$\max y = f(0) = m^2 \qquad (2)$$

iii) Nếu $0 < 3m < 4$ hay $0 < m < \dfrac{4}{3}$

t	$-\infty$	0		$3m$		4	$+\infty$
$f'(t)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(t)$			$\searrow$	CT	$\nearrow$		

$$\max y = \max\{f(0),\ f(4)\} = \max\{m^2,\ m^2 - 24m + 16\}$$

Xét hiệu : $m^2 - (m^2 - 24m + 16) = 24m - 16$

Nếu $m > \dfrac{2}{3}$ thì $\max y = m^2$ (3)

Nếu $0 < m \leq \dfrac{2}{3}$ thì $\max y = m^2 - 24m + 16$ (4)

Từ (1), (2), (3) và (4). Ta được :

$$\max_{x\in[-2;1]} y = \begin{cases} m^2 - 24m + 16 & \text{nếu } m \leq \dfrac{2}{3} \\ m^2 & \text{nếu } m > \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Ví dụ 5 : Người ta dùng tấm kim loại để gò một thùng hình trụ tròn xoay có hai đáy với thể tích cho trước. Hãy xác định kích thước của hình trụ để vật liệu tốn ít nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi x là bán kính đáy, h là chiều cao của hình trụ $(x, h > 0)$ S là diện tích toàn phần và V là thể tích của hình trụ.

Ta có : $$V = \pi x^2 h \qquad (1)$$

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra : $h = \dfrac{V}{\pi x^2}$.

Thay vào (2) ta được : $S = 2\pi x^2 + \dfrac{2V}{x}\ (x > 0)$

Ta có : $$S' = 4\pi x - \frac{2V}{x^2} = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow 4\pi x^3 = 2V \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$ 0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
S'		−	0	+	
S		↘	CT	↗	

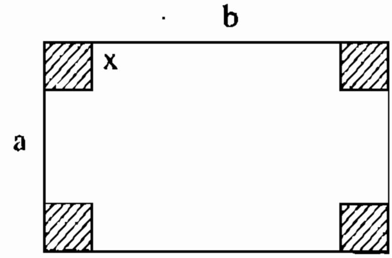
Vậy S nhỏ nhất khi $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, khi đó

$$h = \frac{V}{\pi x^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2x.$$

Vậy phải chọn bán kính đáy là $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ và chiều cao $h = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Ví dụ 6 : Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước là a, b. Người ta cắt bỏ 4 hình vuông bằng nhau ở 4 góc rồi gò thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Cạnh của hình vuông cắt đi phải bằng bao nhiêu để hình hộp có thể tích lớn nhất ?

Hướng dẫn giải



i) Giải sử $a < b$, gọi x là cạnh của hình vuông cắt đi, ta phải có $0 < x < \frac{a}{2}$.

Thể tích hình hộp là

$V = x(a - 2x)(b - 2x)$

$\quad = 4x^3 - 2(a + b)x^2 + abx$

$V' = 12x^2 - 4(a + b)x + ab$

$$V' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{6}\left(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right) \\ x_2 = \frac{1}{6}\left(a + b + \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right) \end{array}\right.$$

Theo Định lí Viét $x_1 > 0, x_2 > 0$ và vì $V'\left(\frac{a}{2}\right) = a^2 - ab < 0$ nên $0 < x_1 < \frac{a}{2} < x_2$. Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		x_1		$\frac{a}{2}$	x_2	$+\infty$
V'			$+$	0	$-$			
V			$\nearrow$	CĐ	$\searrow$			

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi

$$x = x_1 = \frac{1}{6}\left(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right)$$

ii) Nếu $a = b$ thì phương trình $V' = 0$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{a}{6}$, $x_2 = \frac{a}{2}$. Khi đó V lớn nhất : khi $x = x_1 = \frac{a}{6}$

Vậy trong mọi trường hợp, V lớn nhất khi

$$x = \frac{1}{6}\left(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right).$$

D. LUYỆN TẬP

13.1 Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các hàm số :

a) $y = x + 1 - x^2$;

b) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$;

c) $y = \lg^2 x + \frac{1}{\lg^2 x + 2}$;

d) $y = \sin x + \cos^2 x + \frac{1}{2}$;

13.2 Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình :

$$12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0.$$

Với giá trị nào của m thì $x_1^3 + x_2^3$:

a) Đạt giá trị lớn nhất.

b) Đạt giá trị nhỏ nhất.

13.3 x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + px + \frac{1}{p^2} = 0$ $(p \neq 0)$. Xác định p để $x_1^4 + x_2^4$ đạt giá trị nhỏ nhất.

13.4 Cho hàm số $y = |3x^2 - 6x + 2a - 1|$ với $-2 \leq x \leq 3$.

a) Xác định a để giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm a để giá trị nhỏ nhất của y bằng 29.

13.5 Cho hàm số $y = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a$ với $x \in [-2 ; 0]$. Tìm a để $\min y = 2$.

13.6 Cho hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x + m\sin x\cos x$. Tuỳ theo m tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số.

13.7 Cho $a \neq 0$, $b \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$M = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

13.8 Một tam giác vuông có cạnh huyền bằng a không đổi. Cho tam giác quay xung quanh cạnh huyền. Hỏi chiều cao tương ứng với cạnh huyền bằng bao nhiêu để hiệu của thể tích hai hình nón sinh ra khi quay đạt gia trị lớn nhất.

13.9 Cho hình cầu bán kính R. Tìm hình nón ngoại tiếp hình cầu sao cho diện tích xung quanh là nhỏ nhất.

§ 14. ÁP DỤNG GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất trên D.

Ta có : $$f(x) \geq a,\ \forall x \in D \Leftrightarrow \min_{x\in D} f(x) \geq a$$

$$f(x) \leq a,\ \forall x \in D \Leftrightarrow \max_{x\in D} f(x) \leq a$$

Để chứng minh $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in D$ ta chứng minh :

$$\max_{x\in D}\left[f(x) - g(x)\right] \leq 0 \text{ hoặc } \max_{x\in D} f(x) \leq \min_{x\in D} g(x)$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

- ***Ví dụ 1 :*** Cho a, b, c là ba số dương thoả mãn điều kiện :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Chứng minh rằng : $$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có : $0 < a,\ b,\ c < 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{a^2}{a(1 - a^2)} + \frac{b^2}{b(1 - b^2)} + \frac{c^2}{c(1 - c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Xét hàm số : $f(t) = t(1 - t^2) = -t^3 + t$ với $t \in (0\ ;\ 1)$

Ta có $$f'(t) = -3t^2 + 1\ ;\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (vì } t > 0)$$

- Bảng biến thiên :

t	$-\infty$	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	$+\infty$
f'(t)			+	0	−		
f(t)		0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0	

Ta có $f(t) \le \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ với mọi $t \in (0\,;\,1)$. Từ đó suy ra :

$$0 < a(1-a^2) \le \frac{2}{3\sqrt{3}}\ ;\ 0 < b(1-b^2) \le \frac{2}{3\sqrt{3}}\ ;\ 0 < c(1-c^2) \le \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$$\frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy : $\dfrac{a}{b^2+c^2} + \dfrac{b}{c^2+a^2} + \dfrac{c}{a^2+b^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (đpcm).

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = m^2x^4 - 2x^2 + m$ $(m \ne 0)$. Khảo sát sự biến thiên của hàm số khi $m \ne 0$. Từ đó xác định m để $m^2x^4 - 2x^2 + m \ge 0$ với mọi x.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Miền xác định : D = R

Ta có : $y' = 4m^2x^3 - 4x = 4x(m^2x^2 - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(m^2x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{1}{|m|} \end{array}\right.$$

Với $x = 0$ thì $y = m$; với $x = \dfrac{\pm 1}{|m|}$ thì $y = \dfrac{m^3-1}{m^2}$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\lvert m\rvert}$		0		$\frac{1}{\lvert m\rvert}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	$\frac{m^3-1}{m^2}$	↗	m	↘	$\frac{m^3-1}{m^2}$	↗	$+\infty$

Ta có : $m^2x^4 + m \ge 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \min y \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{m^3-1}{m^2} \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 1$

Ví dụ 3 : Cho hàm số : $f(x) = x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m$. Xác định m để $f(x) \ge \frac{1}{x}$ với mọi $x \ge 2$.

(Trích đề thi Đại học Tổng hợp Tp. HCM, năm 1995)

Hướng dẫn giải

Ta có : $f(x) \ge \frac{1}{x},\ \forall x \ge 2 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m \ge \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - (m-1)x^2 + mx - 1 \ge 0,\ \forall x \ge 2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x)(x^2 - x - m) - 1 \ge 0,\ \forall x \ge 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - x)^2 - 1}{x^2 - x} \ge m \ \ (\text{vì } x^2 - x \ge 2)$$

Đặt $t = x^2 - x$, ta có $t' = 2x - 1 > 0,\ \forall x \ge 2$ nên t đồng biến trên $[2\ ;+\infty)$ do đó $x \ge 2 \Leftrightarrow t \ge 2$.

Ta tìm m để $g(t) = \frac{t^2 - 1}{t} \ge m,\ \forall t \ge 2$

$$g'(t) = \frac{t^2 + 1}{t^2} > 0 \Leftrightarrow g \text{ đồng biến } [2\ ;+\infty)$$

$$\Rightarrow \min_{t \ge 2} g(t) = g(2) = \frac{3}{2}$$

Vậy : $g(t) \ge m,\ \forall t \ge 2 \Leftrightarrow \min_{t \ge 2} g(t) \ge m \Leftrightarrow m \le \frac{3}{2}$

Ví dụ 4 : Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{\sin 2x}$ và $g(x) = 3x - x^3$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

a) Chứng minh $0 < g(x) \le 2$ với mọi $x \in \left(0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right)$

b) Chứng minh rằng $\sin 2x < \frac{2}{3x - x^3}$ với mọi $x \in \left(0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right)$

(Trích đề thi Đại học, năm 1979)

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $g'(x) = 3 - 3x^2$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \ \ (\text{vì } x > 0)$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		1		$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$			$+$	0	$-$		
$g(x)$		0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{\pi}{8}(12-\pi^2)$	

Ta có $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi^3}{8}=\frac{\pi}{8}(12-\pi^2)>0$ nên

$$0<g(x)\le 2,\ \forall x\in\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right).$$

b) Theo câu a) ta có $0<3x-x^3\le 2, \forall x\in\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$. Do đó

$$\frac{2}{3x-x^3}\ge 1.$$

Mặt khác, $\sin 2x\le 1,\ \forall x\in\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra : $\sin 2x\le 1\le\frac{2}{3x-x^3}$

Ngoài ra : $\sin 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$

$$3x-x^3=2\Leftrightarrow x=1\ \left(\text{vì } x\in\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Vậy : $\sin 2x<\frac{2}{3x-x^3}$ với $x\in\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 5 : Xác định m để $1+\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x\ge m$, với mọi x.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y=1+\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x$

$$=1+\cos x+\frac{1}{2}(2\cos^2 x-1)+\frac{1}{3}(4\cos^3 x-3\cos x)$$

$$=\frac{4}{3}\cos^3 x+\cos^2 x+\frac{1}{2}$$

Đặt $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$, ta được : $y = \frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y' = 4t^2 + 2t \; ; \; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{2} \\ t = 0 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

t	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		0		1	$+\infty$
y'			+	0	-	0	+		
y		$\frac{1}{6}$	↗	$\frac{7}{12}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{17}{6}$	

Ta có $\min y = \frac{1}{6}$. Vậy : $y \ge m, \forall x \in R \Leftrightarrow \min y \ge m \Leftrightarrow m \le \frac{1}{6}$

Ví dụ 6 : Chứng minh rằng để $x^4 + px^3 + q \ge 0$ với mọi $x \in R$ điều kiện cần và đủ là $256q \ge 27p^4$.

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x) = x^4 + px^3 + q$. Ta tìm $\min f(x)$

Ta có : $f'(x) = 4x^3 + 3px^2 = x^2(4x + 3p)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{3p}{4} \end{array}\right.$$

$$f\left(-\frac{3p}{4}\right) = \frac{256q - 17p^4}{256}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\frac{3p}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{256q - 27p^4}{256}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min f(x) = \dfrac{256q - 27p^4}{256}$

Từ đó : $f(x) \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \min f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 256q \geq 27p^4$

Ví dụ 7 : Chứng minh rằng thể tích V và diện tích xung quanh S của một hình nón tròn xoay luôn thoả mãn bất đẳng thức :

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \leq \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn giải

Gọi R là l lần lượt là bán kính đáy và đường sinh của hình nón. Ta có

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2 - R^2} \ (0 < R < l) \ ; \ S = \pi R l$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4R^4(l^2 - R^2) \leq \frac{8R^3 l^3}{3\sqrt{3}}.$$

Chia hai vế cho $4R^3 l^3$ ta có : $\dfrac{R}{l} - \dfrac{R^3}{l^3} \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

Đặt $x = \dfrac{R}{l}$ $(0 < x < 1)$ ta cần chứng minh $x - x^3 \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ với $x \in (0\,;\,1)$ (xem Ví dụ 1).

C. LUYỆN TẬP

14.1 Cho $c > 0$. n là số nguyên thoả $n > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^n + (c - x)^n$ suy ra rằng nếu $a + b > 0$, $n > 1$ thì $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n \leq \dfrac{a^n + b^n}{2}$.

14.2 Xác định m để $x + \sqrt{1 - x^2} \leq m$, với mọi $x \in [-1\,;\,1]$.

14.3 Xác định m để các bất đẳng thức sau thoả với mọi x :

a) $\sin^3 x + \cos^3 x \geq m$; b) $mx^4 - 4x + m \geq 0$;

c) $x^4 + 4mx + m > 0$.

14.4 Chứng minh rằng $x^4 + px + q \geq 0$ với mọi x khi và chỉ khi $256q^3 \geq 27p^4$.

14.5 Xác định m để các bất phương trình sau thoả mãn với mọi x.

a) $(x+1)(x+3)(x^2+4x+6) \geq m$; b) $\dfrac{8x^2}{(1+x^2)^2} + \dfrac{6mx}{(1+x^2)} + 1 \geq 0$;

c) $x^2 - 2mx + 2|x-m| + 2 > 0$.

14.6 Xác định a nhỏ nhất để $a(x^2+x-1) \leq (x^2+x+1)$ thoả với mọi $x \in [0 ; 1]$

(Trích đề thi Đại học Bách khoa, năm 1994)

14.7 Xác định a để

$3\cos^4 x - 5\cos 3x - 36\sin^2 x - 15\cos x + 36 + 24a - 12a^2 > 0$, với mọi x

14.8 Xác định m để $m\ln x - m - 2x \leq 0$, với mọi $x > 0$.

§ 15. ÁP DỤNG GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên D, f liên tục trên D.

– Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{x \in D} f(x) \leq m \leq \max_{x \in D} f(x)$$

– Bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi

$$\max_{x \in D} f(x) \geq m$$

– Bất phương trình $f(x) \leq m$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi

$$\min_{x \in D} f(x) \leq m$$

Tổng quát ta lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên D rồi kết luận.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 :

a) Xác định m để phương trình $x+\sqrt{2x^2+1}=m$ có nghiệm.

b) Xác định m để bất phương trình $x+\sqrt{2x^2+1}<m$ có nghiệm.

(Trích đề thi Đại học, năm 1984)

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $y=x+\sqrt{2x^2+1}$ có miền xác định D = **R**

Ta có : $y'=1+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}+2x}{\sqrt{2x^2+1}}$, $y'=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+1}=-2x$

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\2x^2+1=4x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Với $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì $y=+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\min y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

a) $x+\sqrt{2x^2+1}=m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $x+\sqrt{2x^2+1}<m$ có nghiệm $\Leftrightarrow \min y<m\Leftrightarrow m>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 2 : Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$x+3=m\sqrt{x^2+1}\qquad(1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = m$. Xét hàm số $y = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ trên **R**

$$y' = \frac{1-3x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3},\ \left(f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{10}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 1\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = -1$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$t'(x)$		+	0	-	
$t(x)$	-1	↗	$\sqrt{10}$	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có :

* $m \le -1 \vee m > \sqrt{10}$ phương trình vô nghiệm.
* $-1 < m \le 1$ phương trình có một nghiệm.
* $1 < m \le \sqrt{10}$ phương trình có hai nghiệm.
* $m = \sqrt{10}$ phương trình có nghiệm kép $x = \dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 3 : Xác định m để phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2+9x+m}$$

có nghiệm.

(Trích đề thi Đại học Y Khoa Tp. HCM, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Điều kiện $0 \le x \le 9$. Phương trình đã cho tương đương với

$$9 + 2\sqrt{x(9-x)} = x(9-x) + m$$

Đặt $t = \sqrt{x(9-x)}$ thì $0 < t < \frac{x+9-x}{2} = \frac{9}{2}$ (Bất đẳng thức Côsi). Ta có phương trình $-t^2 + 2t + 9 = m$ với $t \in \left[0\ ;\ \frac{9}{2}\right]$

Xét hàm số $y = -t^2 + 2t + 9$ với $t \in \left[0\ ;\ \frac{9}{2}\right]$

$$y' = -2t + 2\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Bảng biến thiên :

t	$-\infty$	0		1		$\frac{9}{2}$	$+\infty$
y'			+	0	-		
y		9	↗	10	↘	$-\frac{9}{4}$	

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{9}{4} \le m \le 10$

Ví dụ 4 : Xác định m để bất phương trình sau có nghiệm

$$2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \ge m\ .\ 3^{\sin^2 x}$$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sin^2 x$ thì $0 \le t \le 1$ và bất phương trình trở thành

$$2^t + 3^{1-t} \ge m\ .\ 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\ .\left(\frac{1}{9}\right)^t \ge m.$$

Hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\ .\left(\frac{1}{9}\right)^t$ nghịch biến trên đoạn $[0\ ;\ 1]$ nên

$\max\limits_{t\in[0\ ;\ 1]} f(t) = f(0) = 4$

Vậy $f(t) \ge m$ có nghiệm $t \in [0\ ;\ 1] \Leftrightarrow \max\limits_{t\in[0\ ;\ 1]} f(t) \ge m$

$$\Leftrightarrow m \le 4.$$

Ví dụ 5 : Tìm nghiệm $x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình :

$$\pi^2 x - \frac{16}{3}x^3 = \frac{\pi^3}{6\sin 2x}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = \pi^2 x - \frac{16}{3}x^3$ và $g(x) = \frac{\pi^3}{6\sin 2x}$ với $x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f'(x) = \pi^2 - 16x^2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ $\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^3}{6}\right)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$			$\nearrow$	$\frac{\pi^3}{6}$	$\searrow$		

Ta có $\max\limits_{x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)} f(x) = \frac{\pi^3}{6} \Rightarrow f(x) \le \frac{\pi}{6},\ \forall x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{\pi}{4}$.

Mặt khác, $g(x) = \frac{\pi^3}{6\sin 2x} \ge \frac{\pi^3}{6},\ \forall x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$. Dấu bằng xảy ra khi $\sin 2x = 1$ hay $x = \frac{\pi}{4}$.

Vậy $f(x) \le \frac{\pi}{6} \le g(x),\ \forall x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$. Dấu bằng xảy ra đồng thời khi $x = \frac{\pi}{4}$. Vậy $x = \frac{\pi}{4}$ là nghiệm của phương trình.

C. LUYỆN TẬP

15.1 Xác định m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{3x} + \sqrt{6x} = m + \sqrt{(3+x)(6-x)}$$

15.2 Xác định m để bất phương trình $mx - \sqrt{x-3} \le m+1$ có nghiệm.

15.3 Xác định m để bất phương trình

$$(x^2+1)^2 + m \le x\sqrt{x^2} + x^2 + 4$$

thoả với mọi $x \in [0 ; 1]$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1997)

15.4 Xác định a để phương trình $\dfrac{3x^2-1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x} - 1 + ax$ có nghiệm duy nhất.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1998)

15.5 Xác định m để các phương trình sau có nghiệm

a) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin 2^4 x = m.$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1997)

b) $\cos 4x + 6\sin x \cos x = m.$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1998)

c) $3\cos^6 2x + \sin^4 x + \cos^4 x - m = 2\cos^2 x\sqrt{3\cos^2 2x + 1}$

(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, năm 1999)

d) $m\cos 2x - 4\sin x \cos x + m - 2 = 0$, với $x \in \left(0 ; \dfrac{\pi}{4}\right)$

(Trích đề thi Đại học Giao thông vận tải, năm 1999)

15.6 Giải các phương trình :

a) $x^5 + (1-x)^5 = \dfrac{1}{16}$; b) $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x}$;

c) $\sin nx + \cos nx = 2^{\frac{2-n}{2}}$, $x \in \left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(Trích đề thi Đại học Bách khoa Hà Nội, năm 1999)

§ 16. TÍNH LỒI, LÕM VÀ ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

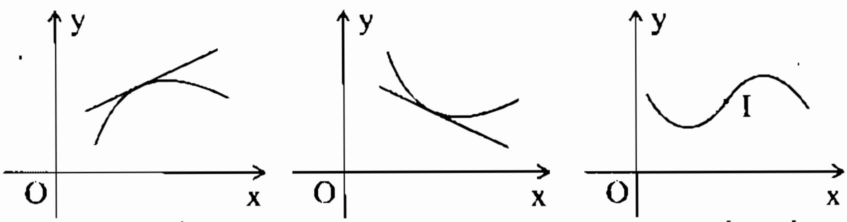
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa :** Cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ với $x \in (a\ ;\ b)$

* Đồ thị (C) được gọi là đồ thị lồi nếu mọi tiếp tuyến của (C) đều ở phía trên đồ thị (C).

* Đồ thị (C) được gọi là đồ thị lõm nếu mọi tiếp tuyến của (C) đều ở phía dưới đồ thị (C).

* Điểm ngăn cách giữa phần lồi và phần lõm của (C) được gọi là điểm uốn của (C)



(C) lồi — (C) lõm — I : Điểm uốn

2. **Định lí :** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) với f có đạo hàm cấp hai trên $(a\ ;\ b)$.

* Nếu $f''(x) > 0,\ \forall x \in (0\ ;\ b)$ thì (C) là đồ thị lõm trên $(a\ ;\ b)$;

* Nếu $f''(x) < 0,\ \forall x \in (0\ ;\ b)$ thì (C) là đồ thị lồi trên $(a\ ;\ b)$;

* Nếu $f''(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 thì điểm $I(x_0\ ;\ f(x_0))$ là điểm uốn của (C).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. **Tìm các khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị :**

– Tìm miền xác định ;

– Tính đạo hàm cấp hai y'' và xét dấu y'' ;

– Dựa vào định lí để xác định khoảng lồi, lõm và điểm uốn.

2. Điều kiện để đồ thị hàm số có điểm uốn :

– Xét các điểm mà $y'' = 0$ hoặc y'' không tồn tại ;

– y'' đổi dấu hay không khi x qua các điểm ấy.

Chú ý : Hàm số bậc ba luôn có một điểm uốn.

3. Chứng minh ba điểm uốn thẳng hàng :

– Chứng minh (C) có ba điểm uốn ;

– Chứng minh có một đường thẳng $\Delta : y = ax + b$ cắt (C) tại ba điểm uốn.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm các khoảng lồi lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số :

a) $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$; b) $y = |x|(x - 5)$;

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + a^2}$ $(a > 0)$.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định D = **R**

$y' = 15x^4 - 20x^3 + 3$; $y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)$

$$y'' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \ \ (y(0) = -2) \\ x = 1 \ \ (y(1) = -1) \end{array}\right.$$

Xét dấu y'' :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y''		-	0	-	0	+	
(C)			lồi			lõm	

Điểm uốn I(1 ; −1).

b) Miền xác định D = **R**

$$y = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{nếu } x \ge 0 \\ -x^2 + 5x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 2x - 5 & \text{nếu } x > 0 \\ -2x + 5 & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'' = \begin{cases} 2 & \text{nếu } x > 0 \\ -2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hàm số không có đạo hàm cấp 2 tại $x = 0$.

Đồ thị lõm trên $(0 ; +\infty)$ và lồi trên $(-\infty ; 0)$. Điểm uốn $I(0 ; 0)$

c) Miền xác định $D = \mathbf{R}$.

y là hàm số lẻ nên ta xét $x \geq 0$

$$y' = \frac{x^2(x^2+3a^2)}{(x^2+a^2)^2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{y'} = \frac{x\sqrt{x^2+3a^2}}{x^2+a^2}$$

Lấy đạo hàm hai vế :

$$\frac{y''}{2\sqrt{y'}} = \frac{-a^2(x^2-3a^2)}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+3a^2}}$$

Dấu của y'' là dấu của $3a^2 - x^2$

x	0		$a\sqrt{3}$		$+\infty$
y''		+	0	-	

y là hàm số lẻ nên $y(-x) = -y(x) \Rightarrow y'(x) = y'(-x)$

$$\Rightarrow y''(x) = -y''(-x).$$

Dấu của y'' đối xứng qua O nên bảng xét dấu của y'' như sau :

x	$-\infty$		$-a\sqrt{3}$		0		$a\sqrt{3}$		$+\infty$
y''		+	0	-	0	+	0	-	
(C)		lõm		lồi		lõm		lồi	

Đồ thị có ba điểm uốn

$$I_1\left(-a\sqrt{3} ; -\frac{3a\sqrt{3}}{4}\right), I_2(0 ; 0), I_3\left(a\sqrt{3} ; \frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)$$

Ví dụ 2 : Định a và b để điểm $I(2 ; -6)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + x - 4$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx$; $y'' = 6ax + 2b$

Hàm số đã cho là hàm bậc ba nên đồ thị luôn có một điểm uốn.

$I(2 ; -6)$ là điểm uốn của đồ thị khi

$$\begin{cases} y''(2) = 0 \\ y(2) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a + 2b = 0 \\ 8a + 4b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{8} \\ b = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Chú ý : Hoành độ điểm uốn của hàm số bậc ba là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (Vì y'' là một nhị thức bậc nhất nên đổi dấu khi x qua nghiệm của nhị thức).

Ví dụ 3 : Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ có ba điểm uốn thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng đi qua ba điểm uốn.

Hướng dẫn giải

Miền xác định D = **R**

Cách 1 :

Ta có : $y' = \dfrac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2+x+1)^2}$; $y'' = \dfrac{2(2x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^3}$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Xét dấu y''

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y''		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
(C)		lồi		lõm		lồi		lõm	

Đồ thị có ba điểm uốn $A(1\ ;\ 1)$, $B(-2\ ;\ -1)$, $C\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$

Ta có $\vec{AB} = (3\ ;\ 2)$, $\vec{BC} = \left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 1\right)$

Rõ ràng $\vec{AB} = 2\vec{BC}$ nên A, B, C thẳng hàng.

Phương trình đường thẳng đi qua ba điểm uốn là phương trình đường thẳng AB :

$$\frac{y-1}{-1-1}=\frac{x-1}{-2-1}\Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

Cách 2 :

Như cách 1, ta chứng minh được đồ thị hàm số có ba điểm uốn có hoành độ x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình :

$$2x^3+3x^2-3x-2=0 \qquad (3)$$

Ta tìm đường thẳng $(\Delta): y=ax+b$ cắt (C) tại ba điểm uốn. Phương trình hoành độ giao điểm của (Δ) và (C).

$$\frac{2x+1}{x^2+x+1}=ax+b\Leftrightarrow ax^3+(a+b)x^2+(a+b-2)x+b-1=0 \qquad (4)$$

Để (3) và (4) có 3 nghiệm trùng nhau ta phải có :

$$\frac{a}{2}=\frac{a+b}{3}=\frac{a+b-2}{-3}=\frac{b-1}{-2}\left(=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\right) \text{ (tỉ lệ thức)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\ b=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Vậy 3 điểm uốn thẳng hàng vì cùng nằm trên đường thẳng $(\Delta): y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

Cách 3 :

Ta có : $y''=\dfrac{2(2x^3+3x^2-3x-2)}{(x^2+x+1)^3}$

Giả sử $(x\,;y)$ là toạ độ một trong 3 điểm uốn của đồ thị, ta có :

$$\begin{cases}2x^3+3x^2-3x-2=0 & (1)\\ y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1} & (2)\end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x=\frac{1}{3}(2x^3+3x^2-2)$, thay vào (2) ta được :

$$y=\frac{2(2x^3+3x^2-3x-2)}{(x^2+x+1)^3}=\frac{2}{3}\left[2x+1-\frac{3(x+1)}{x^2+x+1}\right] \text{ (chia đa thức).}$$

Suy ra $y = \frac{2}{3}(2x+1) - y$ hay $y = \frac{1}{3}(2x+1)$.

Vậy 3 điểm uốn thẳng hàng và chúng thuộc đường thẳng có phương trình $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

Nhận xét : Cách giải 2 và 3 tỏ ra hiệu nghiệm khi hoành độ các điểm uốn là những số vô tỉ (có khi không tìm được cụ thể hoành độ các điểm uốn). Khi đó phải chứng tỏ $y'' = 0$ có ba nghiệm phân biệt bằng cách chứng minh hàm bậc ba có hai giá trị cực đại trái dấu. Chẳng hạn, các bạn hãy chứng minh đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ có ba điểm uốn thẳng hàng và viết phương trình đường thẳng đi qua ba điểm uốn.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$. Chứng minh rằng trong tất cả các tiếp tuyến với đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại điểm uốn có hệ số góc nhỏ nhất.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Miền xác định : D = **R**. Ta có : $y' = 3x^2 + 6x - 9$

Theo ý nghĩa hình học của đạo hàm thì hệ số góc $k(x)$ của tiếp tuyến tại điểm $M(x,\ f(x))$ là :

$$k(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

Ta có $\quad k'(x) = 6x + 6$;

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
k'(x)		$-$	0	$+$	
k(x)		↘	CT	↗	

Tại $x = -1$ hệ số góc tiếp tuyến với đồ thị là nhỏ nhất.

Rõ ràng $I(-1\ ;\ 16)$ là điểm uốn của đồ thị.

Ví dụ 5 : Chứng minh rằng các điểm uốn của đồ thị (C) : $y = x\sin x$ nằm trên đường cong (L) có phương trình $4x^2 = y^2(4 + x^2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = x\cos x + \sin x$; $y'' = 2\cos x - x\sin x$.

Toạ độ điểm uốn thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} y'' = 0 \\ y = x\sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x - x\sin x = 0 & (1) \\ y = x\sin x & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\cos x = \dfrac{y}{2}$, từ (2) suy ra $\sin x = \dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0)$.

Ta có : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 = y^2(4 + x^2)$

Vậy điểm uốn của (C) thuộc đường cong (L).

Ví dụ 6 : Xác định m để đồ thị (C) của hàm số $y = e^x + mx^3$ có điểm uốn.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = e^x + 3mx^2$; $y'' = e^x + 6mx$

* Nếu $m = 0$ thì $y'' = e^x > 0$, $\forall x \in R$ nên (C) không có điểm uốn ;

* Nếu $m > 0$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} y'' = +\infty$ (vì $e^x \to +\infty$ và $6mx \to +\infty$)

$$\lim_{x \to -\infty} y'' = -\infty \text{ (vì } e^x \to 0 \text{ và } 6mx \to -\infty)$$

Do đó y'' đổi dấu nên (C) có điểm uốn.

* Nếu $m < 0$ thì $y^{(3)} = e^x + 6m$

$$y^{(3)} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq -6m \Leftrightarrow x \geq \ln(-6m)$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		ln(- 6m)		$+\infty$
y(3)		-	0	+	
y''	↘		CT		↗

Suy ra : $y''_{CT} = y''(\ln(-6m)) = 6m[\ln(-6m) - 1]$

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} y'' = +\infty$ nên để (C) có điểm uốn thì

$y''_{CT} < 0 \Leftrightarrow 6m[\ln(-6m)-1] < 0 \Leftrightarrow \ln(-6m) > 1$ (vì $m < 0$)

$\Leftrightarrow -6m > e \qquad \Leftrightarrow m < -\dfrac{e}{6}$

Vậy (C) có điểm uốn khi $m < -\dfrac{e}{6}$ hoặc $m > 0$.

D. LUYỆN TẬP

16.1 Tìm các khoảng lồi lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số :

a) $y = |x^3 - 1|$; b) $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^3 - x + 1}$;

c) $y = \sqrt[3]{x+2}$; d) $y = e^{-x^2+x}$.

16.2 Xác định M để điểm $M(-1;2)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 + 4$.

(Trích đề thi Học viện Chính trị Quốc gia, năm 1999)

16.3 Xác định a, b để $I(1\ ;\ -2)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2$.

16.4 Chứng minh đồ thị các hàm số sau có ba điểm uốn thẳng hàng và viết phương trình đường thẳng qua các điểm uốn.

a) $y = \dfrac{x-2}{x^2 - x + 1}$; b) $y = \dfrac{x+m}{x^2+1}$;

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3a^2}$ $(a > 0)$; d) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

(Trích đề thi Đại học Y khoa Hà Nội, năm 1999)

16.5 Cho hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x - 5$

a) Định m để đồ thị lồi trên $(-5\ ;\ 2)$;

b) Định m để đồ thị có điểm uốn với hoành độ $x_0 > m^2 - 2m - 5$.

16.6 Định a để đồ thị hàm số $y = x^4 + 8ax^3 + 3(1+3a)x^2 - 4$ có hai điểm uốn mà hoành độ của chúng thoả mãn bất phương trình $\dfrac{x^2 - 2x}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} < 0$.

16.7 Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$. Chứng minh rằng hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị có giá trị lớn nhất nếu $a < 0$ và nhỏ nhất nếu $a > 0$ khi so với hệ số góc các tiếp tuyến tại các điểm khác trên đồ thị.

16.8 a) Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

cắt trục hoành tại ba điểm cách đều nhau thì điểm uốn nằm trên trục hoành.

b) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm cách đều nhau.

16.9 Chứng minh rằng các điểm uốn của đồ thị (C) : $y = \dfrac{\sin x}{x}$ nằm trên đường cong (L) có phương trình $y^2(4 + x^2) = 4$.

§ 17. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. **Định nghĩa :** Cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$.

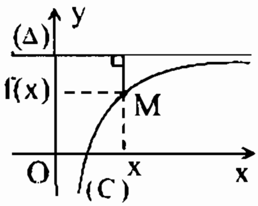
* Điểm $M(x\,;f(x))$ trên (C) được gọi là tiến ra vô cùng trên (C) khi $x \to \pm\infty$ hay $f(x) \to \pm\infty$.

* Đường thẳng (Δ) được gọi là tiệm cận của đồ thị (C) nếu $d(M, \Delta) \to 0$ ($d(M, \Delta)$ là khoảng cách từ M đến Δ) khi M tiến ra vô cùng trên (C).

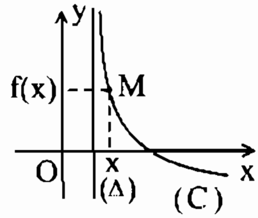
+ Tiệm cận (Δ) gọi là tiệm cận ngang khi (Δ) cùng phương với trục hoành.

+ Tiệm cận (Δ) gọi là tiệm cận đứng khi (Δ) cùng phương với trục tung.

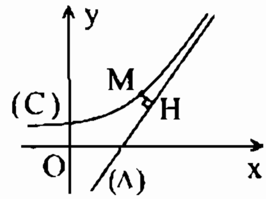
+ Tiệm cận (Δ) gọi là tiệm cận xiên khi (Δ) không song song với hai trục toạ độ.



(Δ) : Tiệm cận ngang



(Δ) : Tiệm cận đứng



(Δ) : Tiệm cận xiên

2. **Cách tìm tiệm cận :** Cho đồ thị (C) : $y = f(x)$

a) Tiệm cận đứng :

$x = a$ là tiệm cận đứng của $(C) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

b) Tiệm cận ngang :

$y = b$ là tiệm cận ngang của $(C) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$

c) Tiệm cận xiên :

Công thức 1 : Nếu $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ (với $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0$) thì đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của (C).

Công thức 2 : Nếu $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ và $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax]$ thì đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của (C).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Tiệm cận đứng của $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x)$ và $Q(x)$ là đa thức không có nghiệm chung. Nếu a là nghiệm của $Q(x)$ thì $x = a$ là tiệm cận đứng.

2. Tiệm cận ngang của $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

– Nếu bậc $P(x)$ nhỏ hơn bậc $Q(x)$ thì $y = 0$ là tiệm cận ngang.

– Nếu bậc $P(x)$ bằng bậc $Q(x)$ thì $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ là tiệm cận ngang.

Trong đó $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

và $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$.

3. Tiệm cận xiên :

– Hàm số hữu tỉ $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó bậc $P(x)$ bằng bậc $Q(x)$ cộng với 1 thì thực hiện phép chia đa thức ta được $y=ax+b+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ với bậc $R(x)<$ bậc $Q(x)$. Khi đó $y=ax+b$ là tiệm cận xiên.

– Hàm số vô tỉ $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a>0)$

Khi $x\to\pm\infty$ thì $y=\sqrt{a}\left|a+\dfrac{b}{2a}\right|+\varepsilon(x)$ với $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=0$

$$\left(\varepsilon(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|\to 0\right)$$

* Khi $x\to+\infty$: (C) có tiệm cận xiên bên phải $y=\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$.

* Khi $x\to-\infty$: (C) có tiệm cận xiên bên trái $y=-\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

- ***Ví dụ 1 :*** Tìm tiệm cận của đồ thị các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{3x^3+4}{(x-1)(x-2)^2}$; b) $y=\sqrt[3]{x^3-x}$.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : $D=\mathbb{R}\setminus\{1,\ 2\}$. Ta có $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$ và $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$ nên đồ thị có hai tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=2$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4}{(x-1)(x-2)^2}=3$ nên đồ thị có tiệm cận ngang là $y=3$.

b) Miền xác định $D=\mathbb{R}$ nên đồ thị không có tiệm cận đứng. Để tìm tiệm cận ngang hoặc xiên ta tính :

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3-x)-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-x)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}+1\right]}=0$$

Vậy $y=x$ là tiệm cận xiên của đồ thị.

Ví dụ 2 : Cho họ đường cong (C_m) :

$$y=\frac{x^2+mx-1}{x-1}\text{ (m là tham số).}$$

Tìm m sao cho (D_m) tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 8 (đơn vị diện tích). Với (D_m) là tiệm cận xiên của (C_m).

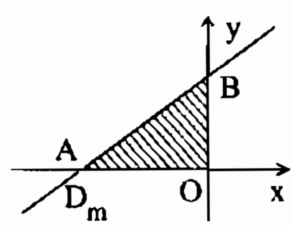
(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Ta có : $$y=x+m+1+\frac{m}{x-1},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{m}{x-1}=0 \text{ nên } y=x+m+1$$

là tiệm cận xiên của (C_m) $(m\neq 0)$.



Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (D_m) với các trục Ox, Oy ta có :

$$A(-m-1\,;0) \text{ và } B(0\,;m+1)$$

Diện tích tam giác vuông AOB là :

$$S=\frac{1}{2}(m+1)^2=8\Leftrightarrow(m+1)^2=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+1=4\\m+1=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-5\end{array}\right.$$

Vậy $m=3$, $m=-5$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3 : Xác định m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận.

Hướng dẫn giải

Ta có $y = 2x + 2m - 3 + \frac{2m^2 - 2m}{x - m}$

Đồ thị hàm số không có tiệm cận khi

$$2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$$

Ví dụ 4 : Biện luận theo m các tiệm cận của đồ thị các hàm số sau :

a) $y = \frac{x + 2}{x^2 - 4x + m}$;   b) $y = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Hướng dẫn giải

a) Vì $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 2}{x^2 - 4x + m} = 0$ với mọi m nên đồ thị luôn có tiệm cận ngang $y = 0$, do đó đồ thị không có tiệm cận xiên.

Ta tìm tiệm cận đứng của đồ thị.

Mẫu số là tam thức bậc hai : $x^2 - 4x + m$ có $\Delta' = 4 - m$.

i) Nếu $m > 4$ thì $\Delta' < 0$ khi đó $x^2 - 4x + m > 0$, $\forall x \in R$, đồ thị không có tiệm cận đứng.

ii) Nếu $m = 4$ thì $y = \frac{x + 2}{(x - 2)^2}$, đồ thị có tiệm cận đứng $x = 2$.

iii) Nếu $m < 4$ thì $\Delta' > 0$ khi đó $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Để x_1, x_2 không là nghiệm của tử $x + 2$ thì $x = -2$ không là nghiệm cua mẫu, tức là $(-2)^2 - 4(-2) + m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -12$.

Trong trường hợp này $(-12 \neq m < 4)$ đồ thị có hai tiệm cận đứng : $x = 2 \pm \sqrt{4 - m}$

Nếu $m = -12$ thì $y = \frac{x + 2}{(x + 2)(x - 6)} = \frac{1}{x - 6}$ $(x \neq -2)$ đồ thị có tiệm cận đứng $x = 6$.

Bang biện luận :

m	Tiệm cận đứng	Tiệm cận ngang
$+\infty$		$y = 0$
4	$x = 2$	$y = 0$
	$x = 2 + \sqrt{4-m}$ $x = 2 - \sqrt{4-m}$	$y = 0$
-12	$x = 6$	$y = 0$
$-\infty$	$x = 2 + \sqrt{4-m}$ $x = 2 - \sqrt{4-m}$	$y = 0$

b) Miền xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{1,\ 2\}$

* *Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận xiên.*

– Nếu $m = 0$ thì : $$y = -\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

có tiệm cận ngang $y = 0$, không có tiệm cận xiên.

– Nếu $m \neq 0$ thì : $$y = mx + 3m + \frac{7mx - 1 - 6m}{x^2 - 3x + 2}$$

(thực hiện phép chia đa thức).

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7mx - 1 - 6m}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

nên đồ thị có tiệm cận xiên $y = mx + 3m$.

* *Tìm tiệm cận đứng.*

Mẫu số có hai nghiệm $x = 1$, $x = 2$.

$x = 1$ là nghiệm của tử $mx^3 - 1$ khi $m = 1$. Khi đó

$$y = \frac{x^3 - 1}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$$

có tiệm cận đứng $x = 2$.

$x = 2$ là nghiệm của tử khi $m.2^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{8}$. Khi đó

$$y = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{8(x-1)(x-2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{8(x-1)}$$

có tiệm cận đứng $x = 1$.

Với $m \neq 1$ và $m \neq \frac{1}{8}$ đồ thị có hai tiệm cận đứng $x = 1$, $x = 2$.

Bảng biện luận :

m	Tiệm cận đứng	Tiệm cận ngang	Tiệm cận xiên
$+\infty$	$x = 1$ $x = 2$		$y = mx + 3m$
1	$x = 2$		$y = x + 3$
	$x = 1$ $x = 2$		$y = mx + 3m$
$\frac{1}{8}$	$x = 1$		$y = \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$
	$x = 1$ $x = 2$		$y = mx + 3m$
0	$x = 1$ $x = 2$	$y = 0$	
$-\infty$	$x = 1$ $x = 2$		$y = mx + 3m$

Ví dụ 5 : Xác định hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ (với $c \neq 0$) biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $A(-1\,;\,7)$ và giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(-2\,;\,3)$.

Hướng dẫn giải

Miền xác định $D = R \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$. Đồ thị có hai tiệm cận là $x = -\dfrac{d}{c}$ và $y = \dfrac{a}{c}$.

$I(-2\,;\,3)$ là giao điểm hai tiệm cận nên ta có :

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{c} = -2 \\ \dfrac{a}{c} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2c \\ a = 3c \end{cases}$$

Đồ thị đi qua $A(-1\,;\,7)$ nên ta có :

$$7 = \frac{-a + b}{-c + d} \Rightarrow -7c + 7d = -a + b \Rightarrow -7c + 14c = -3c + b \Rightarrow b = 10c$$

Vậy $y = \frac{3cx + 10c}{cx + 2c} = \frac{3x + 10}{x + 2}$ (vì $c \neq 0$).

Ví dụ 6 : Cho hàm số $y = \frac{x^2 \cos\alpha + 2x\sin\alpha + 1}{x - 2}$

a) Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

b) Định α để khoảng cách từ gốc toạ độ đến tiệm cận xiên lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$

Ta có : $y = x\cos\alpha + 2(\sin\alpha + \cos\alpha) + \frac{1 + 4(\sin\alpha + \cos\alpha)}{x - 2}$

Vậy với $\cos\alpha \neq 0$ và $\sin\alpha + \cos\alpha \neq -\frac{1}{4}$ thì đồ thị có tiệm cận xiên :

$y = x\cos\alpha + 2(\sin\alpha + \cos\alpha)$ hay $x\cos\alpha - y + 2(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

b) Khoảng cách từ 0 đến tiệm cận xiên là

$$d = \frac{|2(\cos\alpha + \sin\alpha)|}{\sqrt{\cos^2\alpha + 1}} \Rightarrow d^2 = \frac{4(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{8(1 + \sin 2\alpha)}{3 + \cos 2\alpha}$$

Đặt $z = \frac{1 + \sin 2\alpha}{3 + \cos 2\alpha}$ xác định với mọi α

z_0 thuộc miền giá trị của hàm số khi phương trình sau đối với α có nghiệm :

$$z_0 = \frac{1 + \sin 2\alpha}{3 + \cos 2\alpha} \Leftrightarrow z_0(3 + \cos 2\alpha) = 1 + \sin 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha - z_0 \cos 2\alpha = 3z_0 - 1 \qquad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm $\alpha \Leftrightarrow 1 + z_0^2 \geq (3z_0 - 1)^2$

$$\Leftrightarrow 4z_0^2 - 3z_0 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq z_0 \leq \frac{3}{4}.$$

Do đó $\max z = \frac{3}{4}$, suy ra giá trị lớn nhất của d là $\sqrt{8.\frac{3}{4}} = \sqrt{6}$.

Thay $z = \frac{3}{4}$ và (*), ta được :

$$\sin 2\alpha - \frac{3}{4}\cos 2\alpha = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}\sin 2\alpha - \frac{3}{5}\cos 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos(2\alpha + \varphi) = -1$$

$$(\text{với } \cos\alpha = \frac{3}{5},\ \sin\varphi = \frac{4}{5})$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha + \varphi = \pi + k2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} + k\pi$$

Vậy d lớn nhất khi $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} + k\pi \left(\cos\varphi = \frac{3}{5},\ k \in \mathbf{Z}\right)$

D. LUYỆN TẬP

17.1 Tìm tiệm cận của đồ thị các hàm số :

a) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$; b) $y = \frac{x^2 - 2|x| + 2}{|x| - 1}$;

c) $y = x + \ln x$; d) $y = x + \frac{\ln x}{x}$;

17.2 Biện luận theo m các tiệm cận của đồ thị hàm số :

a) $y = \frac{2x^2 - mx - m}{x - m}$; b) $y = \frac{x - 2m}{x^2 + (m-1)x - 3}$;

c) $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$; d) $y = \frac{mx^2 - x}{(x-2)(x-m)}$.

17.3 Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$. Xác định a, b, c để hàm số có cực trị bằng 1 khi $x = 1$ và có tiệm cận xiên vuông góc với đường thẳng $x + 2y + 1 = 0$.

17.4 Xác định m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x + m}$ không có tiệm cận. Vẽ đồ thị hàm số trong trường hợp đó.

17.5 Định a để đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2 + x + a}{x + a}$ có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(2\ ;0)$.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm, năm 1995)

17.6 Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = x + x^2 + x + 1$

(Trích đề thi Học viện Kĩ thuật Quân sự, năm 1999)

17.7 Cho hàm số

$$y = \frac{mx^2 + (m^2 + m - 1)x + m^2 - m + 2}{x - m} \quad (m \neq 0)$$

a) Viết phương trình tiệm cận xiên.

b) Chứng minh rằng khoảng cách từ gốc toạ độ đến tiệm cận xiên không vượt quá $\sqrt{2}$.

17.8 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2\cos\alpha + 2x\sin\alpha + 1}{x + 2}$. Xác định α để đường tròn có tâm ở gốc toạ độ và tiếp xúc với tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

17.9 Xác định a đê tiệm cận xiên của đồ thị $y = \dfrac{2x^2 + (a + 1)x - 3}{x + a}$ tiếp xúc với $(P): y = x^2 + 5$.

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1999)

§ 18. TÂM ĐỐI XỨNG, TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA ĐỒ THỊ, CÔNG THỨC ĐỔI TRỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C)

1. Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì (C) nhận trục tung làm trục đối xứng.

2. Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì (C) nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

3. Công thức đổi trục.

Giả sử $I(x_0 ; y_0)$, công thức dời trục bằng cách tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$$

4. Hàm số bậc ba nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

5. Hàm số nhất biến và hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc một nhận giao điểm hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

6. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ nhận đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.

7. Hàm bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Chứng minh đồ thị (C) : y = f(x) có tâm đối xứng

Cách 1 :

– Dự đoán tâm đối xứng là $I(x_0 ; y_0)$

– Dùng công thức đổi trục $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$

– Lập phương trình mới của $(C): Y = g(X)$

– Chứng minh $Y = g(X)$ là hàm số lẻ để kết luận I là tâm đối xứng của (C).

Cách 2 : Đồ thị (C) nhận $I(x_0 ; y_0)$ làm tâm đối xứng khi và chỉ khi $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$ với mọi x.

2. Chứng minh đồ thị (C) : y = f(x) có trục đối xứng

Cách 1 :

– Dự đoán trục đối xứng là $x = x_0$

– Dùng công thức đổi trục về gốc $I(x_0 ; 0)$

– Lập phương trình mới của $(C): Y = g(X)$

– Chứng minh $Y = g(X)$ là hàm số chẵn để kết luận $x = x_0$ là trục đối xứng của (C).

Cách 2 : Đồ thị (C) nhận $x = x_0$ làm trục đối xứng khi và chỉ khi $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$ với mọi x.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ có đồ thị (C). Chứng minh rằng (C) có một tâm đối xứng.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Miền xác định $D = R \setminus \{1\}$; ta có $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$

Giao điểm của hai tiệm cận là $I(1\,;2)$

Dời hệ trục toạ độ về gốc $I(1\,;2)$ theo công thức đổi trục :

$$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = 2 + Y \end{cases}$$

Thay vào $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ ta có $2 + Y = \dfrac{(1+X)^2}{X} \Leftrightarrow Y = X + \dfrac{1}{X}$

Hàm số $Y = X + \dfrac{1}{X}$ là hàm số lẻ nên (C) nhận $I(1\,;2)$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 2 : Chứng minh đồ thị hàm số $(C): y = \dfrac{x^2+4x-2}{x^2+1}$ không có tâm đối xứng.

Hướng dẫn giải

Giả sử (C) có tâm đối xứng $I(x_0\,;y_0)$ ta có :

$$f(x_0+x) + f(x_0-x) = 2y_0, \text{ với mọi } x$$

Hay $\dfrac{(x_0+x)^2+4(x_0+x)-2}{(x_0+x)^2+1} + \dfrac{(x_0-x)^2+4(x_0-x)-2}{(x_0-x)^2+1} = 2y_0,\ \forall x \in \mathbf{R}$

Chuyển qua giới hạn khi $x \to \infty$ ta được $2y_0 = 1 + 1 \Rightarrow y_0 = 1$

Thay $x = x_0$ vào đẳng thức trên ta được :

$$4x_0^2 + 8x_0 - 2 = 4\left(4x_0^2+1\right) \Rightarrow 12x_0^2 - 8x_0 + 6 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy (C) không có tâm đối xứng.

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 4$ có đồ thị (C). Chứng minh rằng đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng của (C).

Hướng dẫn giải

Cách 1 : Gọi $I(1 ; 0)$ thuộc đường thẳng $x = 1$.

Công thức đổi hệ trục toạ độ bằng phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OI}$:

$$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = Y \end{cases}$$

Phương trình của (C) trong hệ trục IXY là :

$$Y = (X+1)^4 - 4(X+1)^3 + 7(X+1)^2 - 6(X+1) + 4$$

hay : $$Y = X^4 + X^2 + 2$$

Đây là hàm số chẵn. Vậy (C) nhận $x = 1$ làm trục đối xứng.

Cách 2 : Ta có :

$$f(1+x) = (1+x)^4 - 4(1+x)^3 + 7(1+x)^2 - 6(1+x) + 4$$
$$= x^4 + x^2 + 2$$
$$f(1-x) = (1-x)^4 - 4(1-x)^3 + 7(1-x)^2 - 6(1-x) + 4$$
$$= x^4 + x^2 + 2$$

Suy ra : $f(1+x) = f(1-x)$, $\forall x \in R$. Vậy (C) nhận $x = 1$ làm trục đối xứng.

Ví dụ 4 : Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số

$$y = x^4 + 4x^3 + mx^2$$

có trục đối xứng song song với trục tung.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : Gọi $I(x_0 ; 0)$. Công thức đổi trục bằng tịnh tiến theo $\overrightarrow{OI}$:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y \end{cases}$$

Phương trình (C) trong hệ trục XIY là :

$$Y = (X + x_0)^2\left[(X + x_0)^2 + 4(X + x_0) + m\right]$$
$$= X^4 + 4(x_0 + 1)X^3 + \left(6x_0^2 + 3x_0 + m\right)X^2 +$$
$$+\left(4x_0^3 + 12x_0^2 + 2x_0m\right)X + x_0^4 + 4x_0^3 + mx_0^2 = g(X)$$

(C) nhận $x = x_0$ làm trục đối xứng $\Leftrightarrow Y = g(X)$ là hàm số chẵn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_0 + 1) = 0 \\ 4x_0^3 + 12x_0^2 + 2mx_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ m = 4 \end{cases}$$

Vậy với $m = 4$ thì đồ thị có trục đối xứng là $x = -1$.

Cách 2 : $X = x_0$ là trục đối xứng của (C)

$$\Leftrightarrow f(x_0 + x) = f(x_0 - x),\ \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + x)^4 + 4(x_0 + x)^3 + m(x_0 + x)^2 =$$

$$= (x_0 - x)^4 + 4(x_0 - x)^3 + m(x_0 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x_0 + 1)x^3 + (2x_0^3 + 6x_0^2 + mx_0)x = 0,\ \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_0\ 1) = 0 \\ 2x_0^3 + 6x_0^2 + mx_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ m = 4 \end{cases}$$

Ví dụ 5 : Chứng minh rằng đồ thị (H) hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ nhận đường thẳng $(d): y = x + 2$ làm trục đối xứng.

Hướng dẫn giải

Gọi $(d'): y = -x + b$ là đường thẳng vuông góc với (d), với b là một số thực tuỳ ý. Hoành độ giao điểm M_1, M_2 của (d') và (H) là nghiệm của phương trình :

$$\frac{x-1}{x+1} = -x + b \Leftrightarrow x^2 - (b-2)x - (b+1) = 0 \ (1) \ (\text{vì } x \neq -1)$$

Ta có : $\Delta = b^2 + 8 > 0$ do đó (1) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2.

Trung điểm I của M_1M_2 có toạ độ :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{b-2}{2} \\ y_I = -x_I + b = \dfrac{b+2}{2} \end{cases}$$

Điểm $I\left(\dfrac{b-2}{2} ; \dfrac{b+2}{2}\right)$ thoả mãn phương trình $(d): y = x + 2$ nên $I \in (d)$.

Vậy $(d): y = x + 2$ là trục đối xứng của (H).

D. LUYỆN TẬP

18.1 Chứng minh giao điểm hai tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{1+x}$ là tâm đối xứng của đồ thị.

(Trích đề thi Đại học Nông nghiệp I, năm 1999)

18.2 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$. Chứng minh giao điểm 2 đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của đồ thị.

(Trích đề thi Đại học Quy Nhơn, năm 1999)

18.3 Chứng minh rằng đồ thị (C) hàm số

$$y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1$$

có trục đối xứng song song với trục tung. Tìm giao điểm của (C) với trục hoành.

18.4 Xác định m để đồ thị các hàm số sau có trục đối xứng song song với trục tung :

a) $y = x^4 + mx^3 + 2(m-2)x^2$; b) $y = x^4 + 4mx^3 - 2mx^2 - 12mx$.

18.5 Định m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số :

$$y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx - (m^3 - m^2 - 2)}{x - m} \; (m \neq -1)$$

nằm trên Parabol $y = x^2 + 1$.

18.6 Xác định m để đồ thị hàm số

$$y = -\frac{x^3}{m} + 3mx^2 - 2 \; (m \neq 0)$$

nhận $I(1 ; 0)$ làm tâm đối xứng.

18.7 Chứng minh đồ thị $y = \dfrac{2x^2 + 4x - 5}{x^2 + 3}$ không có trục đối xứng.

18.8 Chứng minh đường thẳng $x = 2$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5}{x^2 - 4x + 3}$.

18.9 Chứng minh đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x-4}$ nhận các đường thẳng $y = x - 2$ và $y = x + 6$ làm các trục đối xứng.

Chương 3.

KHẢO SÁT HÀM SỐ. PHƯƠNG PHÁP TỔNG QUÁT

Bài toán "Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số" gồm hai phần :

Phần 1. Khảo sát hàm số

– Tìm miền xác định của hàm số.

– Xét tính chẵn lẻ, tuần hoàn của hàm số để thu hẹp phạm vi khảo sát (nếu có) (Nếu là hàm số chẵn hoặc lẻ chỉ khảo sát trên nửa miền xác định, nếu là hàm tuần hoàn chỉ khảo sát trên một đoạn bằng chu kì).

– Tính và xét dấu đạo hàm cấp một để tìm các khoảng tăng, giảm và tìm cực trị (nếu có) của hàm số.

– Tính và xét dấu đạo hàm cấp hai để tìm các khoảng lồi, lõm và tìm điểm uốn (nếu có) của đồ thị (có thể bỏ qua phần này nếu đạo hàm cấp hai quá phức tạp).

– Tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có) và các giới hạn đặc biệt.

– Lập bảng biến thiên tổng kết các kết quả trên.

Phần 2. Vẽ đồ thị hàm số

– Xác định các điểm đặc biệt (điểm cực trị, điểm uốn) và vẽ các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).

– Tìm một số điểm đặc biệt của đồ thị (thường là giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ).

– Kết hợp với bảng biến thiên để vẽ đồ thị.

– Lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị.

§ 19. HÀM SỐ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hàm số bậc hai :

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$$

1. Miền xác định $D = \mathbf{R}$

2. Đạo hàm $y' = 2ax + b$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$;

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

3. Đạo hàm cấp hai $y'' = 2a$

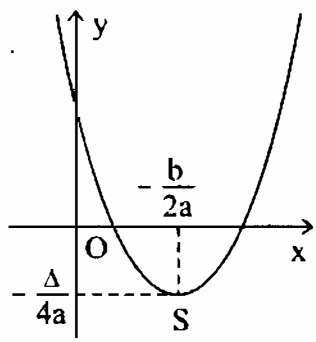
Nếu $a > 0$ thì đồ thị lõm trên **R.** Nếu $a < 0$ thì đồ thị lồi trên **R**

4. Giới hạn $\lim\limits_{x \to \infty} y = +\infty$ nếu $a > 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} y = -\infty$ nếu $a < 0$

5. Bảng biến thiên và đồ thị :

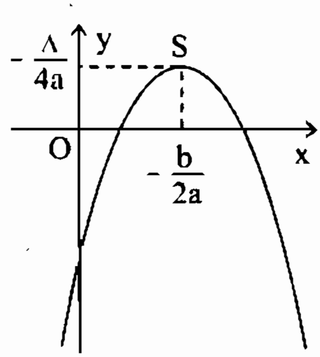
i) $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$



ii) $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		+	0	-	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$



6. Đồ thị là một Parabol có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ và có trục đối xứng có phương trình $x = -\frac{b}{2a}$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ : Cho hai hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ (1) và $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ (2)

1) Vẽ các đồ thị biểu diễn các hàm số (1) và (2) trên cùng một hệ trục toạ độ. Tìm m sao cho đường thẳng $y = m$ cắt cả hai đồ thị vừa vẽ.

2) Giả sử m thoả mãn điều kiện ở câu 1, gọi các giao điểm của đường thẳng $y = m$ với đồ thị (1) là A và B, với đồ thị (2) là C và D. Hãy tìm m sao cho độ dài đoạn AB bằng độ dài đoạn CD. Lúc đó hãy tính độ dài của chúng.

(Trích đề thi Đại học Hàng hải, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Xét $y = -x^2 + 2x + 3$ ta có $y' = -2x + 2$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 1 \ (y(1) = 4)$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

Xét $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ ta có $y' = x - 4$

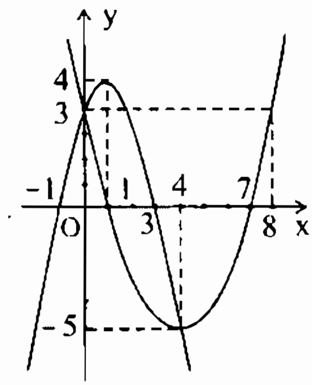
$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 4 \ (y(4) = -5)$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y'		−	0	+	
y	$+\infty$	↘	−5	↗	$+\infty$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (1) và (2) là :

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$



Các giao điểm là $(0 ; 3)$ và $(4 ; -5)$

Dựa vào đồ thị, đường thẳng $y = m$ cắt hai đường parabol (1) và (2) khi $-5 \leq m \leq 4$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm giữa $y = m$ với đồ thị (1) là :

$$-x^2 + 2x + 3 = m \Leftrightarrow x^2 - 2x + m - 3 = 0$$

Gọi $A(x_1 ; m)$, $B(x_2 ; m)$ là hai giao điểm thì :

$$x_1 + x_2 = 2 \text{ và } x_1x_2 = m - 3$$

Ta có $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$$= 4 - 4(m - 3) = 16 - 4m$$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa $y = m$ với đồ thị (2) là :

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 = m \Leftrightarrow x^2 - 8x + 6 - 2m = 0$$

Gọi $C(x_3 ; m)$, $D(x_4 ; m)$ là hai giao điểm thì :

$$x_3 + x_4 = 8 \text{ và } x_3x_4 = 6 - 2m$$

Ta có $CD^2 = (x_4 - x_3)^2 = (x_3 + x_4)^2 - 4x_3x_4$

$$= 64 - 4(6 - 2m) = 40 + 8m$$

$AB^2 = CD^2 \Leftrightarrow 16 - 4m = 40 + 8m \Leftrightarrow m = -2$ (thoả mãn điều kiện $-5 \le m \le 4$)

Với $m = -2$ thì $AB = CD = \sqrt{16+8} = 2\sqrt{6}$

C. LUYỆN TẬP

19.1 Cho hàm số $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$

a) Khảo sát hàm số.

b) Tìm tất cả các điểm trên trục hoành mà từ đó có thể kẻ đến đồ thị hai tiếp tuyến vuông góc nhau.

19.2 Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị là (P)

a) Xác định a, b, c để (P) có đỉnh $S(-1\ ;\ 5)$ và đi qua điểm $A(1\ ;\ 1)$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P).

c) Lập phương trình tiếp tuyến với (P) biết nó song song với đường thẳng $y = 2x + 3$.

19.3 Cho $(P): y = x^2$ và $A(0\ ;\ 2)$. Xác định điểm M trên (P) sao cho AM nhỏ nhất. Chứng minh rằng AM vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M.

19.4 Cho $(P): y = \frac{x^2}{2}$ và $A\left(\frac{15}{8}\ ;\ \frac{27}{8}\right)$

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua $M_1\left(-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ và vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M_1.

b) Tìm tất cả các điểm M trên (P) sao cho AM vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M.

(Trích đề thi Khối A, Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1997)

§ 20. HÀM SỐ BẬC BA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Hàm số bậc ba : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

1. Miền xác định : D = R

2. Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $\Delta' = b^2 - 3ac$

$\Delta' > 0$: Hàm số có hai cực trị

$\Delta' \leq 0$: Hàm số luôn tăng hoặc luôn giảm trên **R**.

3. Đạo hàm cấp hai : $y'' = 6ax + 2b$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$

Đồ thị luôn có một điểm uốn có hoành độ $x = -\dfrac{b}{3a}$.

4. Giới hạn :

Nếu $a > 0$ thì $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

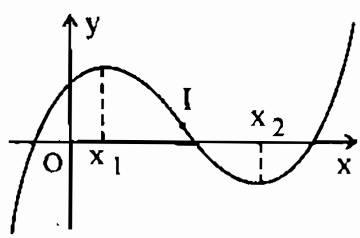
Nếu $a < 0$ thì $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

5. Bảng biến thiên và đồ thị

a) Trường hợp $a > 0$

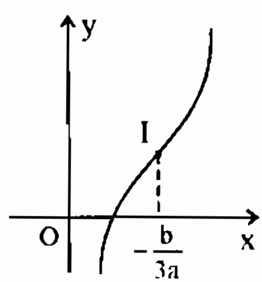
i) $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$: Hàm số có hai cực trị

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$



ii) $\Delta' \leq 0 : y' \geq 0, \forall x \in R$

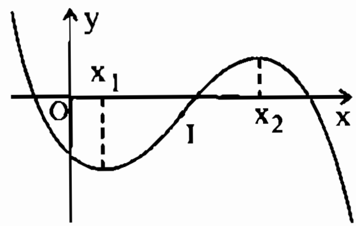
x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$



b) Trường hợp $a < 0$

i) $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$: hàm số hai cực trị

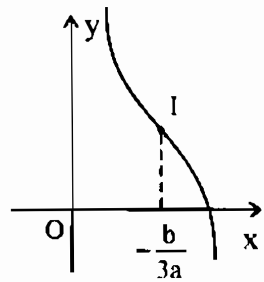
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	$-\infty$



ii) $\Delta' \le 0 : y' \le 0,\ \forall x \in R$

6. Đồ thị luôn nhận điểm uốn I làm tâm đối xứng.

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$



II. Một số tính chất của hàm số bậc ba :

1. Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi

$$\Delta' = b^2 - 3ac > 0$$

2. Hàm số luôn đồng biến trên **R** $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$

3. Hàm số luôn nghịch biến trên **R** $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$

4. Để tìm các cực trị ta lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$, giả sử được $f(x) = f'(x).g(x) + mx + p$.

Nếu x_1, x_2 là nghiệm của $f'(x)$ thì

$$f(x_1) = mx_1 + p \text{ và } f(x_2) = mx_2 + p$$

5. Khi đó đường thẳng đi qua các điểm cực trị là

$$y = mx + p$$

6. Đồ thị luôn có điểm uốn I và là tâm đối xứng của đồ thị.

7. Chỉ tại điểm uốn tiếp tuyến xuyên qua đồ thị. Tiếp tuyến tại điểm uốn có hệ số góc đạt giá trị lớn nhất nếu $a < 0$ và đạt giá trị nhỏ nhất nếu $a > 0$.

8. Nếu đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm lập thành cấp số cộng thì điểm uốn nằm trên trục hoành.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số

$$y = \frac{1}{3}(m+1)x^3 - (m-1)x^2 + mx - \frac{2}{3}$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 0$.

b) Với giá trị nào của m hàm số luôn đồng biến ?

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1997)

Hướng dẫn giải

a) Với $m = 0$ ta có $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}$

Miền xác định : $D = \mathbf{R}$, $y' = x^2 + 2x$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \quad \left(y(-2) = \frac{2}{3}\right) \\ x = 0 \quad \left(y(0) = -\frac{2}{3}\right) \end{array}\right.$$

$y'' = 2x + 2$;

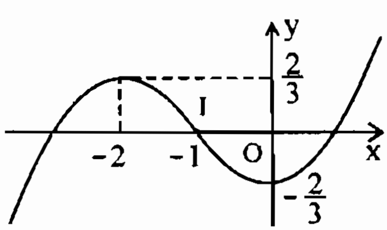
$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \left(y(-1) = 0\right)$

Điểm uốn $I(-1\,;\,0)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y''		−		−	0	+		+	
y'		+	0	−		−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	0	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$
			CĐ		Đ.UỐN		CT		

Đồ thị :



b) Ta có $y' = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + m$

Hàm số luôn đồng biến $\Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in R$

Với $m = -1 : y' = 4x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$ (không thoả với mọi x)

Với $m \neq -1 : y' \geq 0,\ \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m+1)m \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$$

Vậy với $m \geq \frac{1}{3}$ thì hàm số luôn đồng biến.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$.

a) Với $a > 0$ cho trước, hãy khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Xác định a để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

c) Xác định a để đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt A, B, C với $AB = BC$.

(Trích đề thi Đại học Y Dược Tp. HCM, năm 1996)

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : $D = \mathbf{R}$

$$y' = 3x(x - 2a)\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2a \end{array}\right.$$

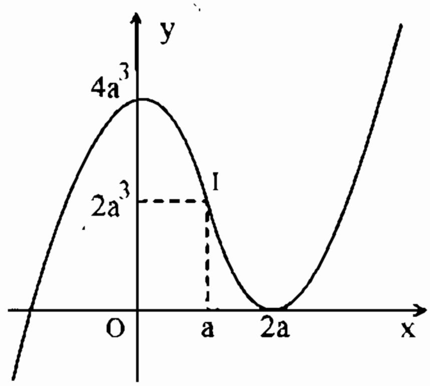
$$y'' = 6x - 6a\ ;\ y'' = 0 \Leftrightarrow x = a$$

Điểm uốn $I(a\ ;\ 2a^3)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		a		2a		$+\infty$
y''		−		−	0	+		+	
y'		+	0	−		−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$4a^3$	↘	$2a^3$	↘	0	↗	$+\infty$
			CĐ		Đ.UỐN		CT		

Đồ thị :



b) Điều kiện để hàm số có cực đại và cực tiểu là $a \neq 0$

Toạ độ hai điểm cực trị là $A\left(0 ; 4a^3\right)$, $B(2a ; 0)$

Hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ khi và chỉ khi $4a^3 = 2a \Leftrightarrow a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

c) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng $y = x$ là $x^3 - 3ax^2 - x + 4a^3 = 0$ (1)

Gọi x_1, x_2, x_3 là hoành độ của A, B, C ta có :

$$x_1 + x_3 = 2x_2$$

và theo định lí Viét ta có :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3a$$

Suy ra : $3x_2 = 3a \Leftrightarrow x_2 = a$

Thay $x_2 = a$ vào (1) ta được :

$$2a^3 = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Thử lại :

* Với $a = 0$ thì (1) thành $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x = \pm 1$

* Với $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1) có nghiệm

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

* Với $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (1) có nghiệm

$$x_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}},\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

Vậy đáp số là $a = 0$, $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. LUYỆN TẬP

20.1 a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

b) Tìm tất cả các đường thẳng đi qua điểm $M(4 ; 4)$ và cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

(Trích đề thi Đại học Đại cương Tp. HCM, năm 1996)

20.2 Cho hàm số $y = x^2.(m - x) - m$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = 0$.

b) Xác định m để đồ thị hàm số cắt đồ thị $y = x^2$ tại ba điểm phân biệt.

(Trích đề thi Đại học, năm 1993)

20.3 Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số ứng với $m = 0$.

b) Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt với các hoành độ lập thành một cấp số cộng.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương Tp. HCM, năm 1993)

20.4 Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị biết rằng tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{9}x + 1$.

c) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m(x-1) - 1$ tiếp xúc với đồ thị hàm số.

(Trích đề thi Khối D, Đại học Cần Thơ, năm 1997)

§ 21. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ (a \neq 0)$ (1)

1. Dự đoán nghiệm và sử dụng sơ đồ Horner :

Nếu $a + b + c + d = 0$ thì (1) có nghiệm $x = 1$.

Nếu $a - b + c - d = 0$ thì (1) có nghiệm $x = -1$.

Đoán nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q}$ nếu a, b, c, d nguyên thì p là ước của d và q là ước của a.

Giả sử $x = \alpha$ là nghiệm của (1), bằng cách chia đa thức hoặc sử dụng sơ đồ Horner ta được

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - \alpha)\left(ax^2 + b_1x + c_1\right) = 0$$

2. Dùng đồ thị hàm bậc ba để xác định số nghiệm :

Bằng cách đặt $x = X - \frac{a}{x}$ thì (1) trở thành $x^3 + px + q = 0$

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 + px + q$ (2)

Ta có $f'(x) = 3x^2 + p$

* Nếu $p \geq 0$ thì $y' \geq 0,\ \forall x : y$ tăng trên R $\Leftrightarrow$ (2) có một nghiệm.

* Nếu $p < 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}\ (x_1 < x_2)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Để tính các cực trị ta lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{3}x\ .\ f'(x)+\frac{2}{3}px+q$$

Suy ra : $$y_{CĐ}\ .\ y_{CT}=f(x_1)f(x_2)=\left(\frac{2}{3}px_1+q\right)\left(\frac{2}{3}px_2+q\right)$$

$$=\frac{4p^3+27q^2}{27}$$

Đặt $\Delta=4p^3+27q^2$

i) $\Delta=0 \Leftrightarrow y_{CĐ}\ .\ y_{CT}=0$: (2) có 1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép

ii) $\Delta>0 \Leftrightarrow y_{CĐ}\ .\ y_{CT}>0$: (2) có 1 nghiệm đơn

iii) $\Delta<0 \Leftrightarrow y_{CĐ}\ .\ y_{CT}<0$: (2) có 3 nghiệm đơn.

3. Định m để phương trình bậc ba

$$\mathbf{f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0} \qquad \mathbf{(1)}$$

có 3 nghiệm phân biệt (hay đồ thị (C) : y = f(x) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt).

Cách 1 : Định m để (C) có hai điểm cực trị nằm hai phía đối với trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1,\ x_2 \\ f(x_1)\ .\ f(x_2)<0 \end{cases}$$

Cách 2 :

– Biến đổi (1) về dạng $g(x)=m$

– Lập bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$

– Xác định m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

Cách 3 : (Đại số)

– Đoán nghiệm $x=\alpha$ của (1)

– Phân tích (1) thành $(x-\alpha).h(x)=0$ với $h(x)$ là tam thức bậc hai có biệt số Δ.

$(x-\alpha).h(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ h(\alpha)\neq 0 \end{cases}$

4. Định m để phương trình bậc ba

$$\mathbf{f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0} \qquad \mathbf{(1)}$$

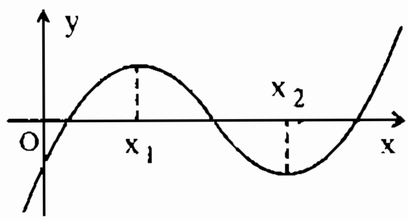
có ba nghiệm dương phân biệt (hay đồ thị (C) : y = f(x) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương).

Giả sử $a > 0$.

Giải hệ

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1 < x_2 \\ f(x_1) \,.\, f(x_2) < 0 \\ x_1 > 0 \\ f(0) < 0 \end{cases}$$

(Xem hình vẽ bên)



Phương pháp đại số :

(1) có 3 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow (x-\alpha).h(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow h(x) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt khác $\alpha(\alpha > 0)$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Xác định m để có đồ thị hàm số :

$$y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1)$$

cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1994)

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành.

$$x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1) = 0 \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)\left[x^2 - (3m+1)x + 2m(m+1)\right] = 0$$

Đặt $g(x) = x^2 - (3m+1)x + 2m(m+1)$

(1) có 3 nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 và khác 2. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = (3m+1)^2 - 8m(m+1) > 0 \\ 1 \,.\, g(1) = 2m^2 - m > 0 \\ \dfrac{s}{2} = \dfrac{3m+1}{2} > 1 \\ g(2) = 2m^2 - 4m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Cách khác :

$$g(x) = (x-2m)(x-m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m \\ x = m+1 \end{array}\right.$$

$g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 và khác 2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2m > 1 \\ m + 1 > 1 \\ 2m \neq m + 1 \\ 2m \neq 2 \\ m + 1 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{array}\right.$$

Vậy $m > \dfrac{1}{2}$ và $m \neq 1$.

Ví dụ 2 : Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số

$$y = x^3 + m(x^2 - 1)$$

cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

(Trích đề thi trường Hàng không Việt Nam, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Cách 1 : Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi hàm số $y = f(x) = x^3 + m(x^2 - 1)$ có hai cực trị trái dấu.

Ta có : $y' = 3x^2 + 2mx = x(3x + 2m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{2m}{3} \end{array}\right.$$

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó $y_{CĐ}.y_{CT} = f(0).f\left(-\dfrac{2m}{3}\right) = (-m)\dfrac{4m^3 - 27m}{27} < 0$

$$\Leftrightarrow m^2(4m^2 - 27) > 0 \Leftrightarrow |m| > \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Cách 2 : Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

$$x^3+m\left(x^2-1\right)=0 \qquad (1)$$

Rõ ràng $x=\pm 1$ không là nghiệm phương trình nên :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^3}{1-x^2}=m.$$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$. Miền xác định $D=R\setminus\{-1\ ;\ 1\}$. Ta có :

$$g'(x)=\frac{x^2\left(3-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}\ ;\ g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

$$(1) \text{ có 3 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ m>\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow |m|>\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y=x^3-mx^2+(2m+1)x-m-2$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm các giá trị của m để đồ thị $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương.

(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\left(C_m\right)$ với trục hoành là

$$x^3-mx^2+(2m+1)x-m-2=0 \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)\left[x^2+(1-m)x+m+2\right]=0$$

$\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi $g(x)=x^2+(1-m)x+m+2=0$ có hai nghiệm dương phân biệt khác 1. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta = (1-m)^2 - 4(m+2) > 0 \\ S = m - 1 > 0 \\ p = m + 2 > 0 \\ g(1) = 4 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 7 > 0 \\ m > 1 \\ m > -2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)(m-7) > 0 \\ m > 1\end{cases} \Leftrightarrow m > 7$$

Ví dụ 4 : Xác định m để phương trình

$$x^3 - x^2 + 18mx - 2m = 0$$

có 3 nghiệm dương phân biệt.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - x^2 + 18mx - 2m$

Phương trình có 3 nghiệm dương phân biệt khi phương trình $y' = 3x^2 - 2x + 18m$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả

$$\begin{cases} f(x_1) \, . \, f(x_2) < 0 \\ x_1 > 0 \\ f(0) < 0\end{cases}$$

Để tính $f(x_1)$, $f(x_2)$ ta chia đa thức $f(x)$ cho $f'(x)$:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)f'(x) + 2\left(6m - \frac{1}{9}\right)x$$

Từ đó suy ra : $f(x_1).f(x_2) = \left[2\left(6m - \frac{1}{9}\right)\right]^2 x_1x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 < 0$, mâu thuẫn với điều kiện $0 < x_1 < x_2$.

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình đã cho có 3 nghiệm dương phân biệt.

Cách 2 :

Ta có : $x^3 - x^2 + 2m(9x - 1) = 0$ (**) $\Leftrightarrow 2m = \dfrac{x^2 - x^3}{9x - 1}$

(vì $x = \frac{1}{9}$ không là nghiệm của (**))

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-x^3}{9x-1}$. Miền xác định $D=R\setminus\left\{\dfrac{1}{9}\right\}$,

$$g'(x)=\frac{-2x\left(9x^2-6x+1\right)}{(9x-1)^2}=\frac{-2x(3x-1)^2}{(9x-1)^2};$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	‖	−	0	−	
g(x)	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘		$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình không thể có ba nghiệm dương phân biệt.

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y=4x^3+mx$

a) Tuỳ theo các giá trị của m, hãy xét sự biến thiên của hàm số.

b) Xác định m để $|y|\le 1$ khi $|x|\le 1$.

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc, năm 1994)

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : D = **R**, $y'=12x^2+m$

i) Nếu $m\ge 0$ thì $y'\ge 0,\ \forall x\in R$: hàm số luôn đồng biến.

ii) Nếu $m<0$ thì $y'=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{12}}$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{m}{12}}$		$\sqrt{-\frac{m}{12}}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

$$y_{CĐ} = y\left(-\sqrt{-\frac{m}{12}}\right) = -\frac{2m}{3}\sqrt{-\frac{m}{12}}\ ;$$

$$y_{CT} = y\left(\sqrt{-\frac{m}{12}}\right) = \frac{2m}{3}\sqrt{-\frac{m}{12}}.$$

b) *Cách 1 : (Dựa vào bảng biến thiên)*

Điều kiện cần : $|y(1)| \le 1 \Rightarrow -1 \le 4 + m \le 1 \Rightarrow -5 \le m \le -3$

Điều kiện đủ : Với $-5 \le m \le -3$ ta có $0 < -\dfrac{m}{12} < 1$

Bảng biến thiên :

x	-1		$-\sqrt{-\frac{m}{12}}$		$\sqrt{-\frac{m}{12}}$		1
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-4-m$	↗	CĐ	↘	CT	↗	$4+m$

Ta đã có : $|y(\pm 1)| = |4 + m| \le 1$

Để $|y| \le 1$ với mọi $x \in [-1\ ;\ 1]$ thì $|y_{CT}| \le 1 \Rightarrow -\dfrac{2m}{3}\sqrt{-\dfrac{m}{12}} \le 1$

Kết hợp với điều kiện $m \le -3$ ta suy ra $m = -3$.

Cách 2 : (Dùng trị đặc biệt)

Ta có $|y| \le 1 \Rightarrow -1 \le y \le 1$

* Với $x = 1$ ta có $y(1) = 4 + m \le 1 \Rightarrow m \le -3$ (1)

* Với $x = \dfrac{1}{2}$ ta có $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}m \ge -1 \Rightarrow m \ge -3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $m = -3$

Thử lại với $m = -3$ ta có $y = 4x^3 - 3x$

* Với $x \in [-1\ ;\ 1]$, đặt $x = \cos t$ khi đó $y = 4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$ suy ra $|y| \le 1$. Vậy $m = -3$

Cách 3 : (Đổi biến)

Vì $x \in [-1 ; 1]$ ta đặt $x = \cos t$ khi đó

$$y = 4\cos^3 t + m\cos t = 4\cos^3 t - 3\cos t + (m+3)\cos t$$

$$= \cos 3t + (m+3)\cos t$$

* Nếu $m = -3$ thì $y = \cos 3t$ ta có $|y| \le 1$

* Nếu $m < -3$ thì $m + 3 < 0$, chọn $t = \frac{\pi}{3}$ thì $y = 1 + \frac{m+3}{2} < -1$

* Nếu $m > -3$ thì $m + 3 > 0$, chọn $t = 0$ thì $y = 1 + (m+3) > 1$.

Vậy chỉ có $m = -3$ là thích hợp.

C. LUYỆN TẬP

21.1 Xác định m để phương trình

$$mx^3 - x^2 - 2x + 8m = 0$$

có ba nghiệm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn -1.

21.2 Xác định m để đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$$

cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thoả mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15$

(Trích đề thi Học viện Chính trị Quốc gia Tp. HCM, năm 1999)

21.3 Xác định m để đồ thị hàm số

$$y = x^3 + (1-m)^2 - m^2$$

cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1997)

21.4 Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = m \\ (x+1)y^2 + xy = m(y+2) \end{cases}$$

Xác định m để hệ có nhiều hơn hai nghiệm.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1997)

21.5 Xác định m để đồ thị

$$y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$$

cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt, trong đó có đúng hai điểm có hoành độ âm.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1999)

21.6 Xác định a, b, c để

$$|4x^3 + ax^2 + bx + c| \le 1, \text{ với mọi } x \in [-1\ ;\ 1]$$

21.7 Cho hàm số $y = 4x^3 + (a+3)x^2 + ax$

a) Tuỳ theo a, khảo sát sự biến thiên của hàm số.

b) Xác định a để $|y| \le 1$ với mọi $x \in [-1\ ;\ 1]$

21.8 a) Chứng minh rằng với mọi m phương trình $x^3 + mx^2 - 1 = 0$ luôn có một nghiệm dương.

b) Xác định m để phương trình $x^3 + mx^2 - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

21.9 Cho $y = mx^3 - 3x$. Xác định m để $|y| \le 1$ với $|x| \le 1$.

§ 22. HÀM SỐ BẬC BỐN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$:

* Miền xác định D = R

* $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right.$

i) Nếu $ab \ge 0$ thì y có một cực trị $x_0 = 0$

ii) Nếu $ab < 0$ thì y có ba cực trị $x_0 = 0$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$

* $y'' = 12ax^2 + 2b$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{b}{6a}$

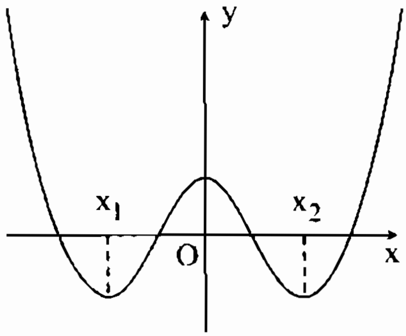
i) Nếu $ab \ge 0$ thì đồ thị không có điểm uốn.

ii) Nếu $ab < 0$ thì đồ thị có hai điểm uốn.

* Bảng biến thiên và đồ thị.

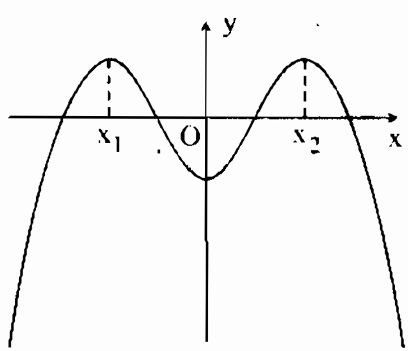
i) $a > 0,\ b < 0$: y có 3 cực trị

x	$-\infty$		x_1		x_3		0		x_4		x_2		$+\infty$
y''		+		+	0	−		−	0	+		+	
y'		−	0	+		+	0	−		−	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	Đ/U	↗	CĐ	↘	Đ/U	↘	CT	↗	$+\infty$



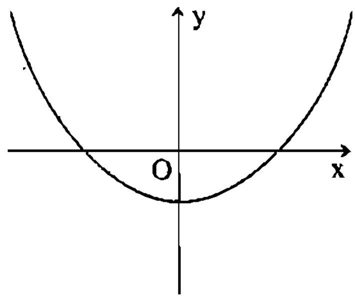
ii) $a < 0,\ b > 0$: y có 3 cực trị

x	$-\infty$		x_1		x_3		0		x_4		x_2		$+\infty$
y''		−		−	0	+		+	0	−		−	
y'		+	0	−		−	0	+		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	Đ/U	↘	CT	↗	Đ/U	↗	CĐ	↘	$-\infty$



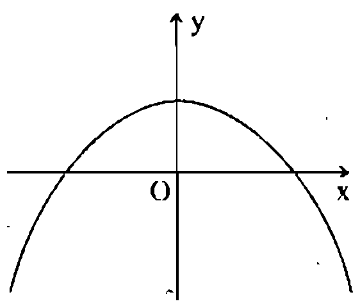
iii) $a > 0,\ b \geq 0$: y có 1 cực trị

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		+		+	
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$



iv) $a < 0,\ b \leq 0$: y có 1 cực trị

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		-		-	
y'		+	0	-	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	$+\infty$ $-\infty$



Đồ thị nhận trục tung là trục đối xứng.

2. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng khi phương trình $aX^2 + bX + c = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt thoả $X_1 = 9X_2$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = kx^4 + (k-1)x^2 + (1-2k)$

1) Xác định các giá trị của tham số k để đồ thị của hàm số chỉ có 1 điểm cực trị.

2) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $k = \frac{1}{2}$

3) Viết phương trình các tiếp tuyến của đồ thị ở phần 2) đi qua gốc toạ độ.

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Miền xác định D = **R**. Ta có $y' = 4kx^3 + 2(k-1)x = 2x(2kx^2 + k - 1)$

Đặt $f(x) = 2kx^2 + k - 1$.

Hàm số chỉ có 1 cực trị $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ vô nghiệm} \\ f(0) = 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ \dfrac{1-k}{2k} < 0 \\ k - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \le 0 \\ k > 1 \\ k = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \le 0 \\ k \ge 1 \end{array}\right.$$

2) Với $k = \frac{1}{2}$ ta có $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

Miền xác định D = **R**.

$$y' = 2x^3 - x \text{ ; } y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$y(0) = 0 \text{ ; } y\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$y'' = 6x^2 - 1 \text{ ; } y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

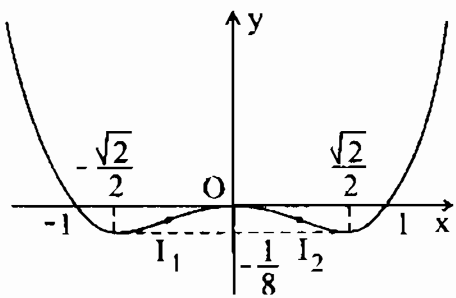
Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-\frac{\sqrt{6}}{6}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{6}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y''		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$ CT	$\nearrow$	$-\frac{5}{72}$ Đ/U	$\nearrow$	0 CĐ	$\searrow$	$-\frac{5}{72}$ Đ/U	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$ CT	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị có hai điểm uốn $I_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\ ;\ -\frac{5}{72}\right)$, $I_2\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\ ;\ -\frac{5}{72}\right)$

Điểm đặc biệt $(0\ ;\ 0)$. $(1\ ;\ 0)$, $(-1\ ;\ 0)$

Đồ thị :



3) Đường thẳng $y = kx$ tiếp xúc với đồ thị ở phần 2) khi và chỉ khi hệ phương trình sau đây có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = kx & (1) \\ 2x^3 - x = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$x^2\left(3x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Vậy có ba tiếp tuyến cần tìm là :

$$y = 0,\ y = -\frac{1}{3\sqrt{3}}x,\ y = \frac{1}{3\sqrt{3}}x$$

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = -x^4 + 2(m+1)x^2 - 2m - 1$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$.

b) Xác định tham số m để phương trình

$$-x^4 + 2(m+1)x^2 - 2m - 1 = 0$$

có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

(Trích đề thi Đại học Y Dược Tp. HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

a) Với $m = 0$ ta có $y = -x^4 + 2x^2 - 1$

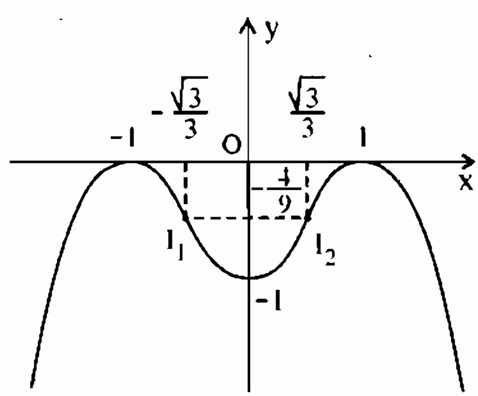
Miền xác định D = **R**

$$y' = -4x^3 + 4x = -4x\left(x^2 - 1\right) \; ; \; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

$$y'' = -12x^2 + 4 \; ; \; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
y''		-		-	0	+		+	0	-		-	
y'		+	0	-		-	0	+		+	0	-	
y	$-\infty$	↗	0 CĐ	↘	$-\frac{4}{9}$ Đ/U	↘	-1 CT	↗	$-\frac{4}{9}$ Đ/U	↗	0 CĐ	↘	$-\infty$



Đồ thị có hai điểm uốn

$$I_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{-4}{9}\right), I_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{-4}{9}\right).$$

b) Xét phương trình $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ (1)

Đặt $X=x^2$ $(X\ge 0)$

$$(1)\Leftrightarrow X^2-2(m+1)X+2m+1=0 \qquad (2)$$

Trước hết để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt, tức là

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)^2-2m-1>0\\ 2m+1>0\\ m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m\ne 0$$

Giả sử (2) có hai nghiệm thoả $0<x_1<x_2$, khi đó (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{x_2}$, $-\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$. Bốn nghiệm này lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$$\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\sqrt{x_1}-\left(-\sqrt{x_1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x_2}=3\sqrt{x_1}\Leftrightarrow x_2=9x_1$$

Kết hợp với Định lí Viét ta có :

$$\begin{cases}x_2=9x_1 & (3)\\ x_1+x_2=2(m+1) & (4)\\ x_1x_2=2m+1 & (5)\end{cases}$$

Từ (3) và (4) suy ra : $x_1=\dfrac{m+1}{5}$, $x_2=\dfrac{9(m+1)}{5}$

Thay vào (5) thì được :

$$9m^2-32m-16=0\Leftrightarrow m=4,\ m=-\frac{4}{9}$$

(thoả mãn điều kiện $-\dfrac{1}{2}<m\ne 0$)

Vậy $m=4$, $m=-\dfrac{4}{9}$

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y=x^4+ax^2+b$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $a=\dfrac{3}{10}$, $b=1$.

b) Giả sử đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng :

$$9a^2 - 100b = 0.$$

Hướng dẫn giải

a) Với $a = \frac{3}{10}$, $b = 1$ ta có $y = x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 1$.

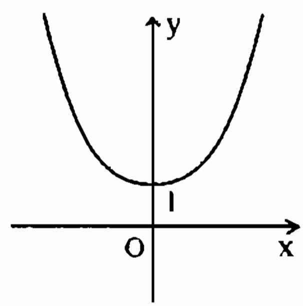
Miền xác định D = **R**,

$$y' = 4x^3 + \frac{3}{5}x = x\left(4x^2 + \frac{3}{5}\right)\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 0\ \left(y(0) = 1\right)$$

$$y'' = 12x^2 + \frac{3}{5} > 0,\ \forall x \in R \Rightarrow \text{Đồ thị luôn lõm.}$$

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		+	|	+	
y'		−	0	+	
y	$+\infty$	↘	1 CT	↗	$+\infty$



b) Lập luận tương tự Ví dụ 2, ta được :

$$\begin{cases} x_2 = 9x_1 \\ x_1 + x_2 = -a \\ x_1x_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{a}{10} \\ 9x_1^2 = b \end{cases} \Rightarrow 9\left(-\frac{a}{10}\right)^2 = b \Rightarrow 9a^2 - 100b = 0$$

Ví dụ 4 : Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{3}$$

Hướng dẫn giải

Miền xác định D = **R**

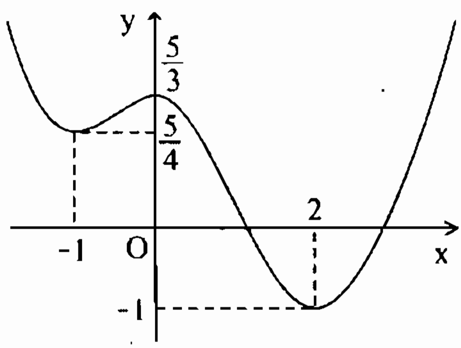
$$y' = x^3 - x^2 - 2x = x\left(x^2 - x - 2\right)\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$y(0) = \frac{5}{3},\ y(-1) = \frac{5}{4},\ y(2) = -1$$

$$y'' = 3x^2 - 2x - 2\ ;\ y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{7}}{3}$		0		$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$		2		$+\infty$
y''		+		+	0	-		-	0	+		+	
y'		-	0	+		+	0	-		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	$\frac{5}{4}$ CT	↗	Đ/U	↗	$\frac{5}{3}$ CĐ	↘	Đ/U	↘	-1 CT	↗	$+\infty$



- Đồ thị có hai điểm uốn có hoành độ $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$.

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y = x^4 - \frac{4}{3}mx^3 - 2x^2$

1) Chứng minh rằng mọi m hàm số luôn có một cực đại và hai cực tiểu.

2) Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm cực tiểu. Xác định m để $x_1^3 + x_2^3 < 4$.

(Trích đề thi Đại học Tổng hợp, năm 1995)

Hướng dẫn giải

1) Miền xác định D = **R**, $y' = 4x^3 - 4mx^2 - 4x = 4x(x^2 - mx - 1)$

Đặt $g(x) = x^2 - mx - 1$, ta có $1 . g(0) = -1 < 0, \forall m$ nên $g(x)$ có hai nghiệm trái dấu $x_1x_2 < 0$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số có một cực đại và hai cực tiểu với mọi m.

2) Theo Định lí Viét ta có $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = -1$ do đó

$$x_1^3 + x_2^3 < 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) < 4$$

$$\Leftrightarrow m^3 + 3m - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^2 + m + 4) < 0 \Leftrightarrow m < 1$$

(Vì $m^2 + m + 4 > 0, \forall m$)

Vậy $m < 1$.

C. LUYỆN TẬP

22.1 Cho hàm số $y = x^4 - (3m+4)x^2 + m^2$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với $m = -2$.

b) Xác định m để đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

22.2 Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số ứng với $m = 0$.

b) Với giá trị nào của m thì hàm số chỉ có một cực tiểu và không có cực đại.

22.3 Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$ có đồ thị (C_m).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 1$.

b) Tìm m để đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1996)

22.4 Khao sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 + 3$ viết phương trình tiếp tuyến biết rằng tiếp tuyến đó tiếp xúc với đồ thị tại hai điểm phân biệt.

22.5 Cho hàm số $y = x^4 + 4ax^3 - 2x^2 - 12ax$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $a = 1$.

b) Xác định a để hàm số có trục đối xứng song song với trục tung.

§ 23. HÀM SỐ NHẤT BIẾN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hàm số nhất biến :

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (a \neq 0\ ;\ ad - bc \neq 0)$$

1. Miền xác định $D = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

2. $y' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Đặt $P = ad - bc$

1. Nếu $P > 0$ thì hàm số tăng trên từng khoảng xác định.

2. Nếu $P < 0$ thì hàm số giảm trên từng khoảng xác định.

3. Các đường tiệm cận

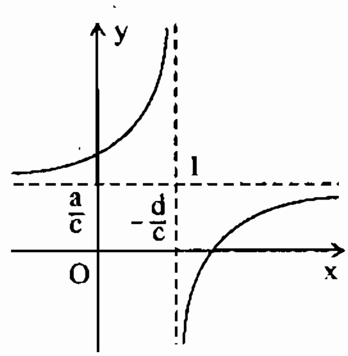
$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}} y = \infty \Rightarrow x = -\frac{d}{c} \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\lim_{x \to \infty} y = \frac{a}{c} \Rightarrow y = \frac{a}{c} \text{ là tiệm cận ngang.}$$

4. Bảng biến thiên và đồ thị :

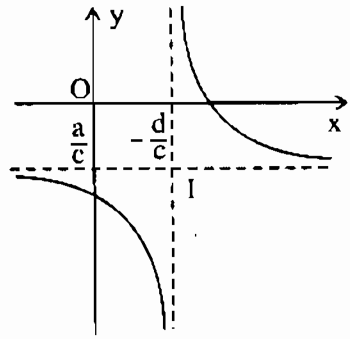
i) $P > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$			$+\infty$
y'		+	‖		+	
y	$\frac{a}{c}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗	$\frac{a}{c}$



ii) $P < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$\frac{a}{c}$	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{a}{c}$



5. Đồ thị hàm số nhất biến được gọi là một hypebol vuông góc có tâm đối xứng $I\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = \frac{x}{1+x}$.

1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

2) Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Chứng minh rằng không có bất cứ đường tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua I.

(Trích đề thi Đại học Nông nghiệp I, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Miền xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

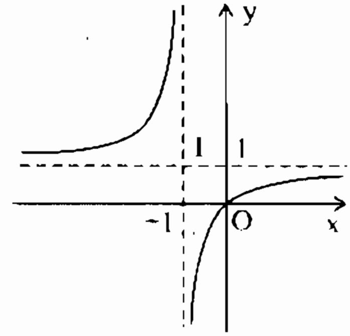
$y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$ suy ra hàm số tăng trên từng khoảng xác định.

$\lim\limits_{x \to -1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng, $\lim\limits_{x \to \infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.

Điểm đặc biệt $(0 ; 0)$, $\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	1



2) Giả sử $M_0\left(x_0\,;\,\dfrac{x_0}{x_0+1}\right)\in(C)$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M_0 là :

$$y-\frac{x_0}{x_0+1}=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0) \qquad (1)$$

Thay $x=-1$, $y=1$ (toạ độ của điểm I) vào (1), ta có :

$$1-\frac{x_0}{x_0+1}=\frac{1}{(x_0+1)^2}(-1-x_0)\Rightarrow\frac{1}{x_0+1}=\frac{-1}{x_0+1}\ \text{(vô lí)}$$

Vậy bất kì tiếp tuyến nào của đồ thị đều không qua I.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-3}$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

2) Tìm trên đồ thị của hàm số điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang.

(Trích đề thi Học viện Quan hệ Quốc tế, năm 2000)

Hướng dẫn giải

1) Miền xác định : $D=\mathbf{R}\setminus\{3\}$

$$y'=\frac{-5}{(x-3)^2}<0,\ \forall x\neq 3$$

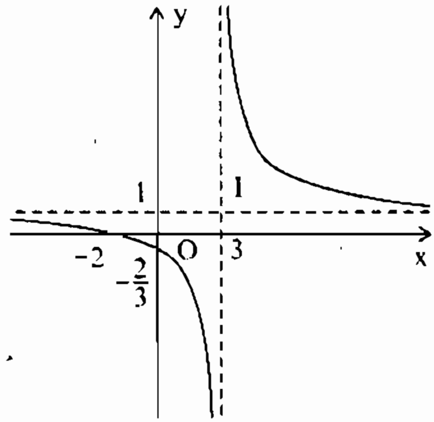
Suy ra hàm số giảm trên từng khoảng xác định.

$\lim\limits_{x\to 3} y=\infty\Rightarrow x=3$ là tiệm cận đứng. $\lim\limits_{x\to\infty} y=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang.

Điểm đặc biệt : $\left(0\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)$, $(-2,\,0)$

Bảng biến thiên và đồ thị

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1



2) Giả sử $M(x_0, y_0)$ thuộc đồ thị. Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $|x_0 - 3|$. Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang là $|y_0 - 1|$ mà $y_0 = \dfrac{x_0 + 2}{x_0 - 3}$ nên

$$|x_0 - 3| = \left|\frac{x_0 + 2}{x_0 - 3} - 1\right| = \frac{5}{|x_0 - 3|}$$

Ta phải có

$$|x_0 - 3| = \frac{5}{|x_0 - 3|} \Leftrightarrow (x_0 - 3)^2 = 5 \Rightarrow x_0 = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Vậy có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán đó là hai điểm trên đồ thị có hoành độ $x_0 = 3 \pm \sqrt{5}$

Chú ý : Ta có thể dùng công thức đổi trục bằng cách tịnh tiến theo $\vec{OI}$ để được phương trình $Y = \dfrac{5}{X}$ rồi tìm giao điểm của đồ thị với đường thẳng $Y = X$.

C. LUYỆN TẬP

23.1 a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$.

b) M là điểm bất kì trên (C) có hoành độ $x_M = m$, tiếp tuyến tại M với (C) cắt các tiệm cận tại A, B. Gọi I là giao điểm các tiệm cận. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB và tam giác IAB có diện tích không đổi khi m thay đổi.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, Khối D, năm 1997)

23.2 Cho hàm số $y = \dfrac{mx + n}{x - 1}$ trong đó m, n là tham số.

a) Tìm giá trị của m, n để đồ thị hàm số qua điểm A(0 ; 1) và tiếp tuyến với đồ thị tại A có hệ số góc bằng –3.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số trong trường hợp m = 1, n = 2.

c) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

(Trích đề thi Đại học Kĩ thuật công nghệ, năm 1997)

23.3 Cho hàm số $y = \dfrac{-2x - 4}{x + 1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Biện luận theo m số giao điểm của đồ thị với đường thẳng 2x – y + m = 0. Trong trường hợp có hai giao điểm M, N tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

(Trích đề thi Đại học Thương mại, năm 1999)

23.4 a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

b) Tìm trên đồ thị của hàm số tất cả những điểm cách đều hai trục toạ độ.

c) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị, biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm A(–6 ; 5).

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1999)

§ 24. HÀM SỐ HỮU TỈ BẬC HAI TRÊN BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. · **Hàm số hữu tỉ** $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{\alpha x + \beta}$ **(a.α ≠ 0) :**

Thực hiện phép chia đa thức ta viết

$$y = Ax + B + \frac{C}{\alpha x + \beta} \ (A\alpha.C \neq 0)$$

Miền xác định $D = \mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{\beta}{\alpha}\right\}$

$$y' = A - \frac{C\alpha}{(\alpha x + \beta)^2} = \frac{A(\alpha x + \beta)^2 - C\alpha}{(\alpha x + \beta)^2};$$

$$y' = 0 \Rightarrow (\alpha x + \beta)^2 = \frac{C\alpha}{A}$$

i) Nếu $\frac{C\alpha}{A} < 0$ thì hàm số không có cực trị, hàm số tăng hoặc giảm trên từng khoảng xác định.

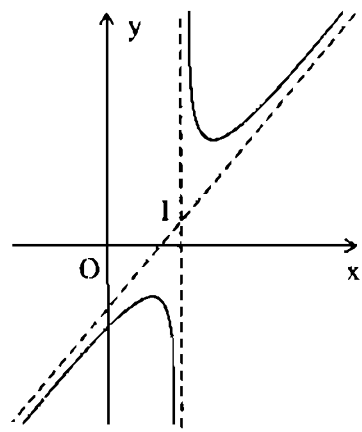
ii) Nếu $\frac{C\alpha}{A} > 0$ thì hàm số có hai cực trị

Tiệm cận đứng : $x = -\frac{\beta}{\alpha}$; tiệm cận xiên : y = Ax + B

Bảng biến thiên và đồ thị :

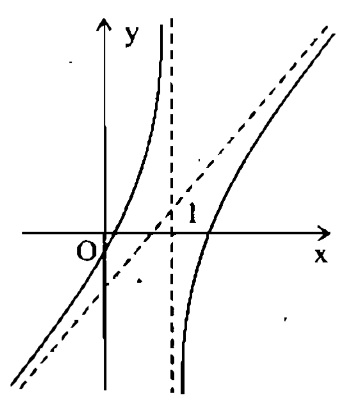
i) A > 0, ACα > 0 : Hàm số có hai cực trị

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{\beta}{\alpha}$		x_2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$



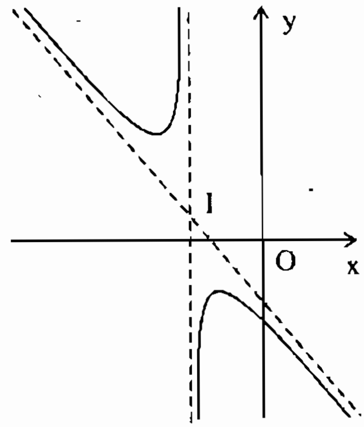
ii) A > 0, ACα < 0 : y không có cực trị

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{\alpha}$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



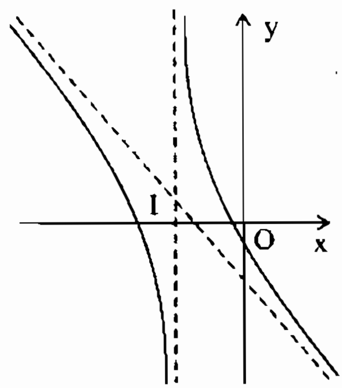
iii) $A < 0$, $AC\alpha > 0$: y có 2 cực trị

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{\beta}{\alpha}$		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	$-\infty$



iv) $A < 0$, $AC\alpha < 0$: y không có cực trị

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{\alpha}$		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	
y	$-\infty$	$\searrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\searrow$	$+\infty$



Đồ thị hàm số là một hypebol xiên nhận giao điểm I của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

2. Một số tính chất của hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất :

Giả sử $y' = \dfrac{g(x)}{(\alpha x + \beta)^2}$ với g(x) là một tam thức bậc hai có biệt số Δ

i) Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi g(x) có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{\alpha}{\beta}$. Điều này xảy ra khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ g\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right) \neq 0 \end{cases}$

ii) Các cực trị là $y_1 = \dfrac{ax_1 + b}{\alpha}$; $y_2 = \dfrac{ax_2 + b}{\alpha}$

Đường thẳng đi qua hai giao điểm cực trị của đồ thị có phương trình $y = \frac{1}{\alpha}(2ax + b)$.

- iii) Điều kiện để hai cực trị trái dấu là :

$$\begin{cases} g(x) = 0 & \text{có hai nghiệm phân biệt khác } -\frac{\beta}{\alpha} \\ ax^2 + bx + c = 0 & \text{có hai nghiệm phân biệt.} \end{cases}$$

iv) Giả sử M là điểm thuộc đồ thị hàm số. Nếu tiếp tuyến với đồ thị tại M cắt hai tiệm cận A, B thì :

* M là trung điểm của AB và diện tích ΔIAB không đổi (với I là giao điểm hai tiệm cận, cũng là tâm đối xứng của đồ thị).

* Tích các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là một hằng số.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

- ***Ví dụ 1 :*** Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3mx + 3m^2}{x + 2m}$

1) Trong trường hợp đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận, hãy chứng minh rằng giao điểm của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

2) Tìm m để đồ thị hàm số có đường tiệm cận đi qua điểm A(−1 ; 2).

3) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số ứng với m = 1.

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc Hà Nội, năm 1998)

Hướng dẫn giải

1) Miền xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{-2m\}$. Ta có : $y = m + x + \dfrac{m^2}{x + 2m}$ (1)

Với $m \neq 0$ thì đồ thị có tiệm cận đứng $x = -2m$ và tiệm cận xiên $y = x + m$. Do đó giao điểm hai đường tiệm cận là $I(-2m ; -m)$.

Công thức đổi trục bằng cách tịnh tiến theo $\overrightarrow{OI}$:

$$\begin{cases} x = X - 2m \\ y = Y - m \end{cases}$$

Khi đó (1) trở thành

$$Y - m = X - m + \frac{m^2}{X} \Leftrightarrow Y = X + \frac{m^2}{X}$$

Hàm số $Y = X + \frac{m^2}{X}$ là hàm số lẻ nên đồ thị nhận I làm tâm đối xứng.

2) Tiệm cận đứng đi qua A(−1 ; 2) khi và chỉ khi

$$-1 = -2m \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Tiệm cận xiên đi qua A(−1 ; 2) khi và chỉ khi

$$2 = -1 + m \Leftrightarrow m = 3$$

Vậy với $m = \frac{1}{2}$ hay m = 3 thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận đi qua điểm A(−1 ; 2)

3) Với m = 1 ta có $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} = x + 1 + \frac{1}{x + 2}$

Miền xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2};$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$$y(-3) = \frac{2(-3) + 3}{1} = -3 \,;\, y(-1) = \frac{2(-1) + 3}{1} = 1$$

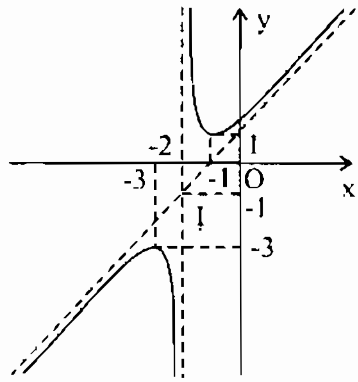
Tiệm cận đứng : x = −2 ; tiệm cận xiên y = x + 1.

Điểm đặc biệt : $\left(0 ; \frac{3}{2}\right)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Đồ thị :



Ví dụ 2 : a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số :

$$y = \frac{x^2 + x - 4}{x - 1}$$

b) Tìm trên đồ thị các điểm có toạ độ là những số nguyên.

Hướng dẫn giải

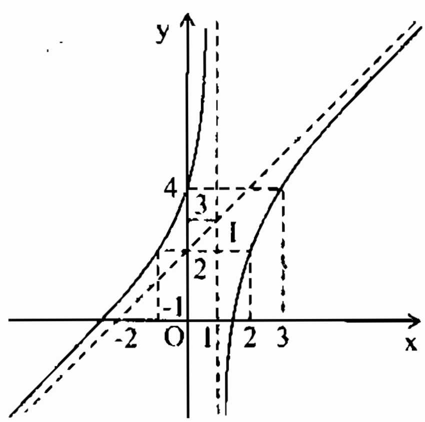
a) Miền xác định : $D : \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y = x + 2 - \frac{2}{x-1}$.

- $y' = 1 + \frac{2}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1$ suy ra hàm số tăng trên từng khoảng xác định.

Tiệm cận đứng : x = 1 ; tiệm cận xiên y = x + 2. Điểm đặc biệt (0 ; 4), (–1 ; 2).
Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Đồ thị :



b) Ta có $y = x + 2 - \dfrac{2}{x-1}$ (1)

Giả sử $M(x_0 ; y_0)$ thuộc đồ thị có $x_0, y_0 \in \mathbf{Z}$.

(1) $\Rightarrow y_0 = x_0 + 2 - \dfrac{2}{x_0 - 1} \Rightarrow \dfrac{2}{x_0 - 1}$ là số nguyên

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - 1 = \pm 1 \\ x_0 - 1 = \pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow x_0 \in \{0, 2, 3, -1\}$$

Vậy có 4 điểm cần tìm là

$$M_1(0 ; 4), M_2(2 ; 2), M_3(3 ; 4), M_4(-1 ; 2)$$

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2}$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

2) Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận, M là một điểm tuỳ ý thuộc (C). Tiếp tuyến với (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận xiên lần lượt tại A và B. Chứng tỏ rằng M là trung điểm của đoạn AB và diện tích tam giác IAB không phụ thuộc vào M.

(Trích đề thi Đại học Luật và Đại học TCKT, năm 1995)

Hướng dẫn giải

Ta có : $y = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} = \dfrac{1}{2}\left(x - 2 + \dfrac{2}{x-1}\right) = \dfrac{1}{2}x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$ (1)

1) Miền xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{2(x-1)^2}; \ y' = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

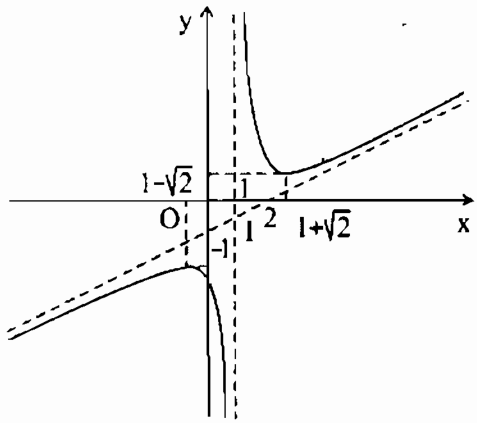
$$y(1 - \sqrt{2}) = \frac{2(1 - \sqrt{2}) - 3}{2} = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2}; \ y(1 + \sqrt{2}) = \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2}$$

Tiệm cận đứng : $x = 1$; tiệm cận xiên $y = \dfrac{1}{2}x - 1$. Điểm đặc biệt $(0 ; -2)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$			1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−		‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$

Đồ thị :



2) Giao điểm hai tiệm cận $I\left(1\,;-\frac{1}{2}\right)$

Công thức đổi trục bằng cách tịnh tiến theo $\overrightarrow{OI}$:

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó (1) trở thành

$$Y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(X+1) - 1 + \frac{1}{X} \Leftrightarrow Y = \frac{X}{2} + \frac{1}{X} \text{ (C)}$$

Lấy $M\left(X_0\,;\frac{X_0}{2}+\frac{1}{X_0}\right) \in$ (C), với trục IXY thì I(0 ; 0)

Phương trình tiếp tuyến trong hệ trục IXY với (C) tại M là :

$$Y - \frac{X_0}{2} - \frac{1}{X_0} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{X_0^2}\right)(X - X_0)$$

Giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng :

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y - \dfrac{X_0}{2} - \dfrac{1}{X_0} = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{X_0^2}\right)(X - X_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = \dfrac{2}{X_0} \end{cases} \Rightarrow A\left(0 ; \dfrac{2}{X_0}\right)$$

Giao điểm B của tiếp tuyến với tiệm cận xiên là

$$\begin{cases} Y = \dfrac{1}{2}X \\ Y - \dfrac{X_0}{2} - \dfrac{1}{X_0} = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{X_0^2}\right)(X - X_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2X_0 \\ Y = X_0 \end{cases} \Rightarrow B(2X_0 ; X_0)$$

Trung điểm của đoạn AB có toạ độ $\left(X_0 ; \dfrac{X_0}{2} + \dfrac{1}{X_0}\right)$ chính là điểm M.

Vậy M là trung điểm của đoạn AB.

Ta có : $\overrightarrow{IA} = \left(0 ; \dfrac{2}{X_0}\right)$; $\overrightarrow{IB} = (2X_0 ; X_0)$

Do đó diện tích ΔIAB là $S = \dfrac{1}{2}|d|$ với $d\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{2}{X_0} \\ 2X_0 & X_0 \end{vmatrix} = -4$.

Vậy S = 2 không phụ thuộc vào M.

C. LUYỆN TẬP

24.1 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2\cos\alpha + 2x\sin\alpha + 1}{x - 1}$ (α là tham số)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $\alpha = \pi$

b) Tìm α để đồ thị hàm số có tiệm cận xiên.

c) Tìm α để hàm số có hai cực trị và hai giá trị cực trị trái dấu.

(Trích đề thi Đại học Tài chính Kế toán, năm 1993)

24.2 Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - 2}$ có đồ thị (C_m)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_0) ứng với m = 0

b) Gọi A là giao điểm của (C_m) với trục Oy. Viết phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại A.

c) Tìm giá trị của k để đường thẳng $y = 2kx - k$ cắt đồ thị (C_o) tại hai điểm thuộc hai nhánh của (C_o).

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1998)

24.3 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}{x + 2\sin\alpha}$

a) Xác định tiệm cận xiên và tâm đối xứng của đồ thị.

b) Tìm α để hàm số có cực đại và cực tiểu.

c) Tìm α để từ gốc toạ độ có thể kẻ đến đồ thị hai tiếp tuyến phân biệt. Gọi $(x_1 ; y_1), (x_2 ; y_2)$ là toạ độ các tiếp điểm. Chứng minh rằng $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

(Trích đề thi Đại học Kinh tế, năm 1995)

§ 25. CÁC HÀM SỐ HỮU TỈ KHÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hàm số hữu tỉ dạng $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ (với a, b, c không đồng thời bằng 0 và $p \neq 0$; tử và mẫu không có nghiệm chung)

Đồ thị hàm số có một số tính chất chung sau đây :

1. Luôn có một tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{p}$

2. Số tiệm cận đứng phụ thuộc vào số nghiệm của mẫu.

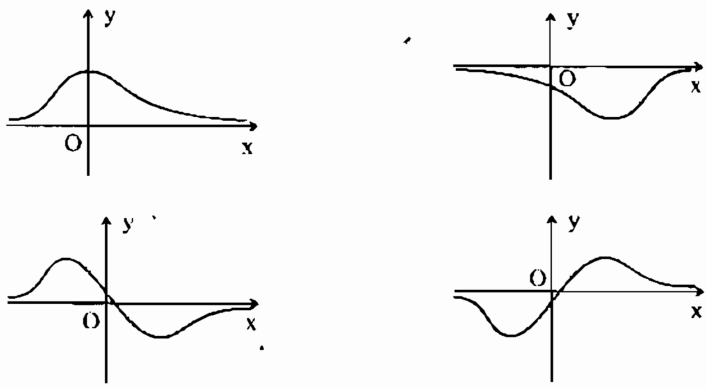
Nếu $\Delta = q^2 - 4pr = 0$: đồ thị có một tiệm cận đứng $x = -\dfrac{q}{2p}$ và đồ thị có hai nhánh nằm về hai phía của tiệm cận đứng.

Nếu $\Delta = q^2 - 4pr > 0$: đồ thị có 2 tiệm cận đứng $x = \dfrac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2p}$ và đồ thị có ba nhánh.

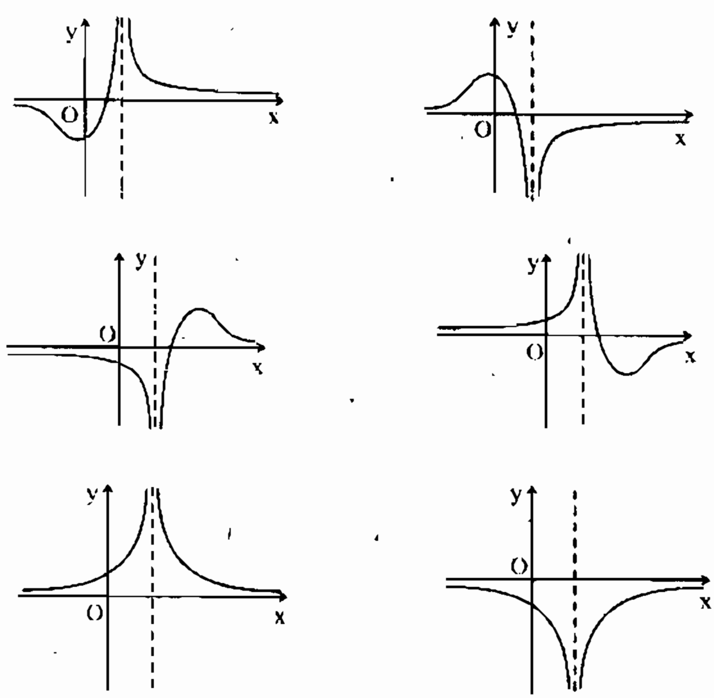
Ta có thể viết $y = A + \dfrac{Bx + C}{px^2 + qx + r}$ (chia đa thức) do đó đồ thị hàm số và đồ thị $y = \dfrac{Bx + C}{px^2 + qx + r}$ có cùng dạng.

3. Các dạng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{Bx + C}{px^2 + qx + r}$; $\Delta = q^2 - 4pr$.

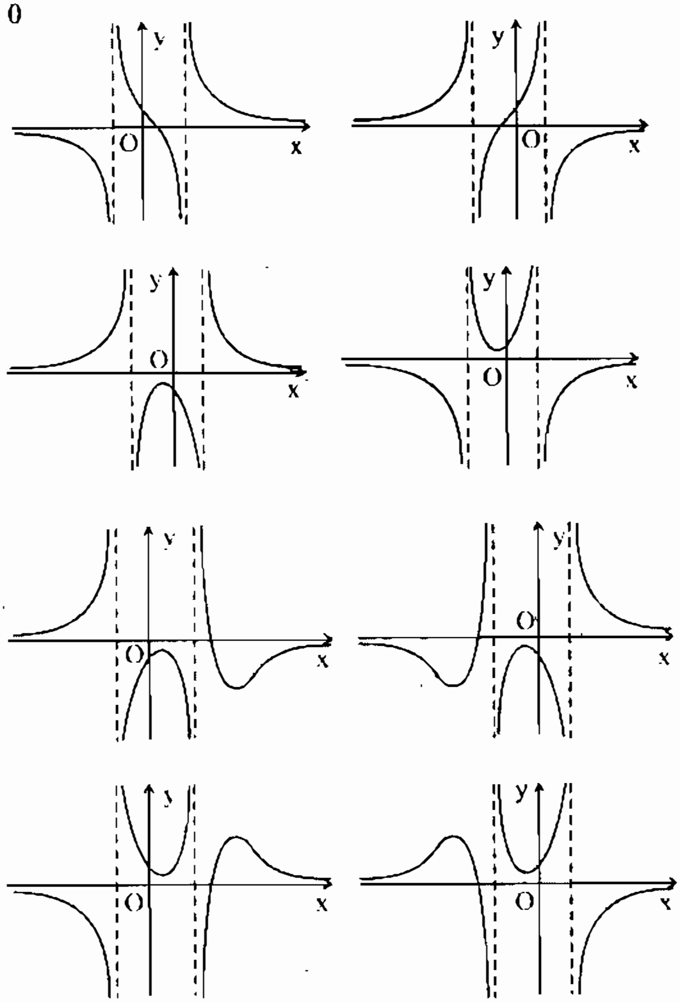
i) $\Delta < 0$



ii) $\Delta = 0$



iii) $\Delta > 0$



Những đồ thị này tịnh tiến lên (hoặc xuống) $|A|$ đơn vị sẽ được đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + px + q}{x^2 + 1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $p = \dfrac{3}{2}$, $q = -1$ (không yêu cầu xét điểm uốn).

Chứng minh rằng tại các giao điểm của đồ thị với trục hoành, các tiếp tuyến với đồ thị là vuông góc với nhau.

b) Trong trường hợp tổng quát, chứng minh rằng nếu đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là a thì tại điểm đó, các tiếp tuyến với đồ thị có hệ số góc là $k = \frac{2a + p}{a^2 + 1}$

c) Tìm điều kiện đối với p, q để đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm khác nhau và tại các điểm đó, các tiếp tuyến với đồ thị vuông góc với nhau.

d) Với điều kiện đã tìm được ở câu c) và với $p \neq 0$, viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị. Chứng minh rằng đường thẳng ấy luôn luôn đi qua một điểm cố định.

(Trích đề thi Đại học, năm 1982)

Hướng dẫn giải

a) Với $p = \frac{3}{2}$, $q = -1$ ta có $y = \frac{2x^2 + 3x - 2}{2(x^2 + 1)}$

Miền xác định : D = **R**. Đạo hàm : $y' = \frac{-3x^2 + 8x + 3}{2(x^2 + 1)^2}$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ hoặc } x = 3$$

$$y(3) = = \frac{4.3 + 3}{4.3} = \frac{5}{4} ; y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\left(-\frac{1}{3}\right) + 3}{4.\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{5}{4}$$

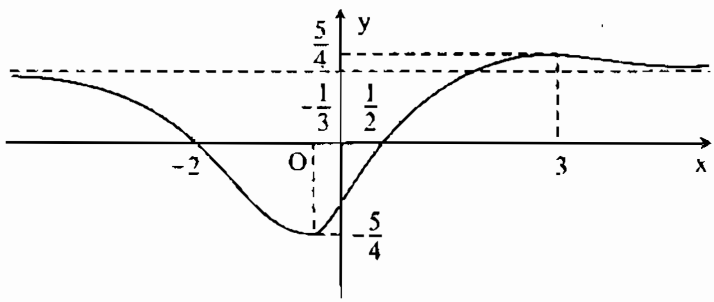
Tiệm cận ngang : y = 1

- Điểm đặc biệt : (0 ; −1)

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	$\frac{5}{4}$	↘	1

Đồ thị :



Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là :

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Giao điểm là $A(-2 ; 0)$; $B\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$

Hệ số góc tiếp tuyến tại A là $y'(-2) = -\frac{1}{2}$, tại B là $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

Tích hệ số góc tiếp tuyến tại A và B bằng $-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$ nên tiếp tuyến tại A và B vuông góc nhau.

b) Giả sử $M(a ; 0)$ là giao điểm của đồ thị với trục hoành, ta có : $a^2 + pa + q = 0$.

Khi đó hệ số góc tiếp tuyến tại M là :

$$k = y'(a) = \frac{(2a+p)(a^2+1) - 2a(a^2+pa+q)}{(a^2+1)^2} = \frac{2a+p}{a^2+1}$$

c) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là : $x^2 + px + q = 0$.

Để có hai giao điểm ta phải có

$$\Delta = p^2 - 4q > 0 \qquad (1)$$

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai giao điểm M, N ta có $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$. Tiếp tuyến tại M và N vuông góc nhau khi và chỉ khi

$$y'(x_1).y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \frac{2x_1+p}{x_1^2+1} \cdot \frac{2x_2+p}{x_2^2+1} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x_1+p)(2x_2+p) + (x_1^2+1)(x_2^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2q - 2p^2 + p^2 + q^2 + p^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (q+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow q = -1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra p, q cần tìm là $q = -1$, p bất kì.

d) Toạ độ (x, y) của hai cực trị của đồ thị thoả hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{2x+p}{2x} = y \\ y = \dfrac{x^2+px+q}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 2x + p & (3) \\ x^2y + y = x^2 + px + q & (4) \end{cases}$$

Nhân (3) cho $\dfrac{x}{2}$ rồi trừ cho (4) thì được $y = \dfrac{p}{2}x + q$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai cực trị là $y = \dfrac{p}{2}x - 1$.

Đường thẳng này qua điểm cố định $(0 ; -1)$.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x^2}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Lấy điểm M(0 ; m) trên trục tung. Biện luận theo m số tiếp tuyến vẽ được từ M đến (C).

c) Giả sử từ M kẻ được hai tiếp tuyến đến (C), lập phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

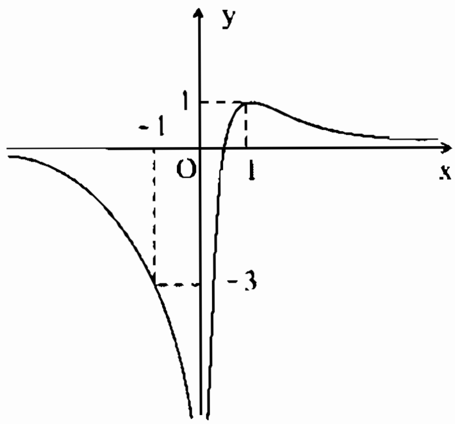
$$y' = \frac{-2x+2}{x^3} \; ; \; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \; (y(1) = 1)$$

Tiệm cận đứng $x = 0$; tiệm cận ngang $y = 0$. Điểm đặc biệt $\left(\dfrac{1}{2} ; 0\right)$; $(-1 ; -3)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
y'		$-$	‖		$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗		1	↘	0

Đồ thị :



b) Gọi $\left(x_0 ; \frac{2x_0-1}{x_0^2}\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C) vẽ từ M. Ta có phương trình tiếp tuyến là :

$$y-\frac{2x_0-1}{x_0^2}=\frac{-2x_0+2}{x_0^3}(x-x_0)$$

Tiếp tuyến này qua M(0 ; m) nên

$$m=\frac{(2-2x_0)(-x_0)}{x_0^3}+\frac{2x_0-1}{x_0^2} \Leftrightarrow m=\frac{4x_0-3}{x_0^2}$$

$$\Leftrightarrow mx_0^2-4x_0+3=0 \qquad (1)$$

$\Delta'=4-3m$.

i) $m=0$: (1) có nghiệm $x_0=\frac{3}{4}$, khi đó có 1 tiếp tuyến kẻ từ O(0 ; 0) đến (C).

ii) $m=\frac{4}{3}$: (1) có nghiệm kép, khi đó có 1 tiếp tuyến kẻ từ $M\left(0 ; \frac{4}{3}\right)$ đến (C).

iii) $m>\frac{4}{3}$: (1) vô nghiệm nên không có tiếp tuyến nào kẻ đến (C)

iv) $m<\frac{4}{3}, m\neq 0$: (1) có hai nghiệm, khi đó từ M kẻ được hai tiếp tuyến tuyến đến (C).

c) Giả sử $0\neq m<\frac{4}{3}$: x_0 là hoành độ tiếp điểm, x_0 là nghiệm của (1) nên

$$mx_0^2-4x_0+3=0 \Rightarrow 1=\frac{4x_0-mx_0^2}{3} \qquad (2)$$

Tung độ tiếp điểm

$$y_0 = \frac{8x_0 - 2mx_0^2}{9x_0} + \frac{m}{3} = -\frac{2m}{9}x_0 + \frac{8+3m}{9}$$

Vậy đường thẳng qua 2 tiếp điểm có phương trình :

$$y = -\frac{2m}{9}x + \frac{8+3m}{9}.$$

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Đồ thị (C) cắt tiệm cận ngang tại A. Đường thẳng OA cắt tại (C) tại B. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) tại A và B.

c) Cho đường thẳng (d) : y = mx. Định m để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M_1 và M_2 khác 0 và 0 là trung điểm của đoạn AB.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$

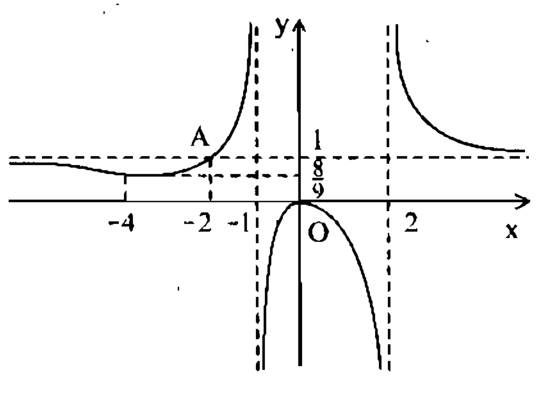
$$y' = \frac{-x^2 - 4x}{(x^2 - x - 2)^2}\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & (y(0) = 0) \\ x = -4 & \left(y(-4) = \dfrac{8}{9}\right) \end{array}\right.$$

Tiệm cận đứng : x = −1 ; x = 2. Tiệm cận ngang : y = 1.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-4		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖		
y	1	↘	$\frac{8}{9}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

Đồ thị :



b) Toạ độ của A

$$y = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1 \Leftrightarrow x = -2. \Rightarrow A(-2\ ;\ 1).$$

Phương trình đường thẳng OA : $y = -\frac{1}{2}x$

Phương trình hoành độ giao điểm của OA với (C) :

$\frac{x^2}{x^2 - x - 2} = -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 0$ (hoành độ của điểm O) hoặc $x^2 + x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \text{ (hoành độ của điểm A)} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy $B\left(1\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại A :

$$y - 1 = \frac{1}{4}(x + 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại B :

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$$

c) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) :

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 2} = mx \Leftrightarrow \left[mx^2 - (m + 1)x - 2m\right] = 0$$

(Vì $x = -1$, $x = 2$ không là nghiệm của phương trình)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ mx^2 - (m + 1)x - 2m = 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M_1, M_2 khác 0 khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (m - 1)^2 + 8m^2 > 0 \\ -2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$$

Hai điểm M_1 và M_2 đối xứng nhau qua O khi và chỉ khi

$$x_1 + x_2 = \frac{m + 1}{m} = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

C. LUYỆN TẬP

25.1 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx - m}{x^2 + 1}$

a) Tìm m để đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng y = 2.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ứng với m = 2.

c) Biện luận theo k số nghiệm của phương trình :

$$(1-k)\sin^2 x - 4\cos x + 2k + 1 = 0$$

(Trích đề thi Đại học, năm 1981)

25.2 a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số

$$y = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$$

b) Xác định m để đường thẳng y = mx cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

c) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$(m-1)t^4 + mt^2 - 2m = 0$$

25.3 Cho hàm số $y = f_m(x) = \dfrac{m(x+1)^2}{x^2 - mx + 1}$ có đồ thị (C_m)

a) Tìm miền xác định. Tìm m để (C_m) có 2 tiệm cận đứng ; nêu vị trí của 2 tiệm cận đó đối với trục tung. Tính đạo hàm y'. Tìm m để y là hàm số đơn điệu (nói rõ tăng hay giảm). Xét trường hợp m = 0 và m = –2.

b) Lấy m = 1. Khảo sát $y = f_m(x)$. Chứng minh (C_1) có tiệm cận xiên. Vẽ đồ thị (C_1) với đầy đủ điểm uốn.

c) (C_1) cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B. Tìm điểm trên (C_1) có tiếp tuyến song song với đường thẳng AB. Viết phương trình hoành độ giao điểm giữa (C_1) và $\Delta : y = ax + 1$.

d) Biện luận theo a số giao điểm giữa (C_1) và Δ. Suy ra rằng từ B có 3 tiếp tuyến với (C_1). Tìm phương trình các tiếp tuyến đó.

(Trích đề thi Đại học, năm 1985)

25.4 Tìm tất cả các giá trị của A để đồ thị hàm số

$$y = x^3 + ax + 2$$

cắt trục hoành chỉ tại một điểm.

25.5 a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số :

$$y = \frac{4 + 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

b) Xác định m để phương trình $m(\sin x - 2)^2 = 2\sin x + 4$ có nghiệm.

25.6 a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$$

b) Biện luận số nghiệm của phương trình sau :

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = \sqrt{a^2 - 4a + 3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

§ 26. HÀM SỐ VÔ TỈ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Xét hàm số dạng

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}\ ;\ \Delta' = b^2 - 4ac$$

Hàm số có tiệm cận xiên khi $a > 0$.

1) $a > 0$: $y = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right| + \varepsilon(x)$, với

$$\lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \to \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}\left|a + \frac{b}{2a}\right| = 0$$

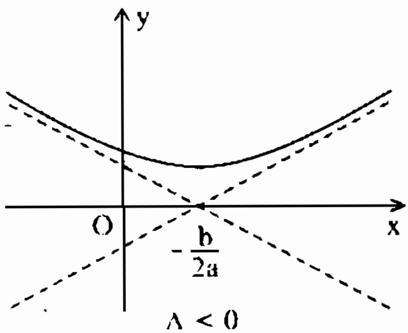
i) Khi $x \to +\infty$ ta có tiệm cận xiên bên phải :

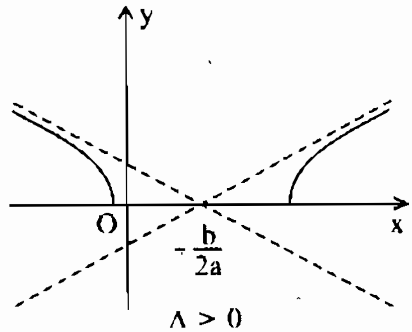
$$y = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$$

ii) Khi $x \to -\infty$ ta có tiệm cận xiên bên trái :

$$y = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \varepsilon(x)$$

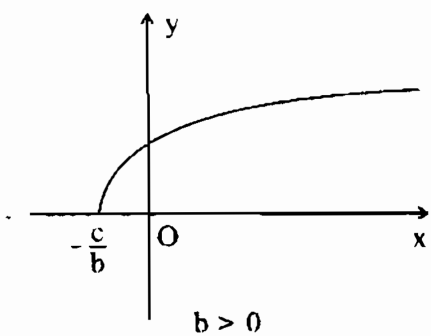
Các dạng đồ thị :

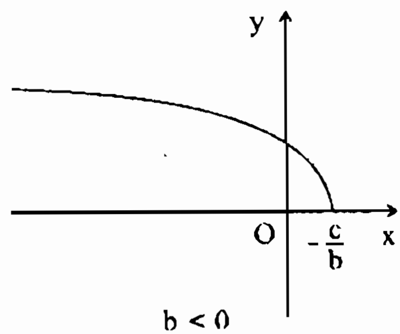




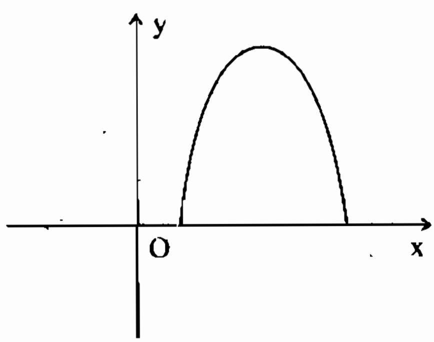
2) $a = 0$: $y = \sqrt{bx + c}$ $(b \neq 0)$

Các dạng đồ thị :





3) $a < 0$; $\Delta > 0$



B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{2x - 4}$; b) $y = \sqrt{1 - x}$; c) $y = 2x - 1 - \sqrt{3x - 5}$.

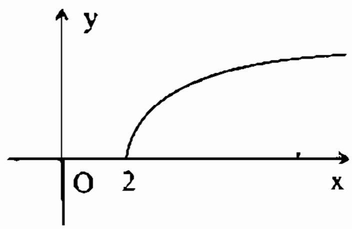
Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : D = [2 ; +∞], $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}} > 0,\ \forall x > 2.$

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$$

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$	2		$+\infty$
y'	//////		+	
y	//////	0	↗	$+\infty$



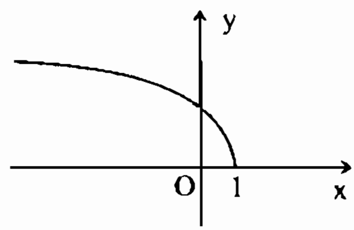
Đồ thị là nửa parabol.

b) Miền xác định : D = (−∞ ; 1), $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} < 0,\ \forall x < 1.$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$$

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		1	$+\infty$
y'		−		//////
y	$+\infty$	↘	0	//////



Đồ thị là nửa parabol.

c) Miền xác định $D = \left[\dfrac{5}{3} ; +\infty\right)$

$$y' = 2 - \frac{3}{2\sqrt{3x-5}} = \frac{4\sqrt{3x-5}-3}{2\sqrt{3x-5}}$$

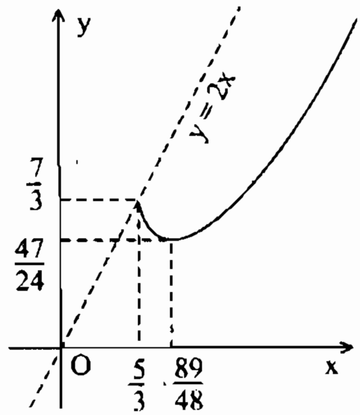
$$y' = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{3x-5} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{89}{48}\ ;\ y\left(\frac{89}{48}\right) = \frac{47}{24}$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty\ ;\ a = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = 2\ ;\ b = \lim_{x \to +\infty} (y - ax) = -\infty$$

Đồ thị có phương tiệm cận : y = 2x.

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$		$\frac{89}{48}$		$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	
y		$\frac{7}{3}$	$\searrow$	$\frac{47}{24}$	$\nearrow$	$+\infty$



Ví dụ 2 : Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; b) $y = \sqrt{-2x^2 + 10x - 8}$;

c) $y = x + 1 + \sqrt[3]{x^2 - 2x + 4}$.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : $D = (-\infty\, ; 1] \cup [3\, ; +\infty)$

$$y' = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}\ ;\ y' = 0 \Rightarrow x = 2.$$

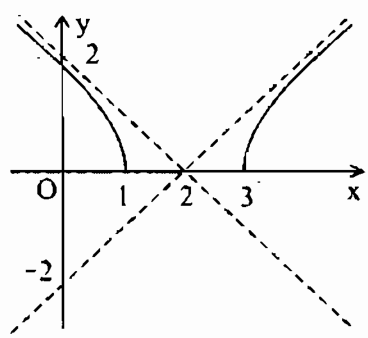
$$y = \sqrt{(x-2)^2 - 1} = |x - 2| + \varepsilon(x) \ \text{(với } \lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0\text{)}$$

Tiệm cận xiên bên phải : $y = x - 2$ (khi $x \to +\infty$)

Tiệm cận xiên bên trái : $y = -x + 2$ (khi $x \to -\infty$)

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$



Đồ thị là nửa parabol.

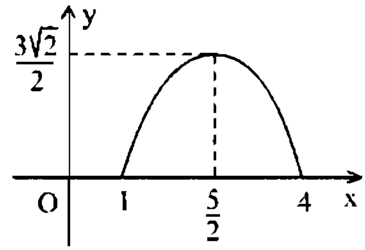
b) Miền xác định : D = [1 ; 4]

$$y' = \frac{-2x+5}{\sqrt{-2x^2+10x-8}} \text{ ; } y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ; } y = \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Bảng biến thiên và đồ thị :

Đồ thị là nửa elip.

x	$-\infty$	1		$\frac{5}{2}$		4	$+\infty$
y'			+	0	-		
y		0	↗	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	↘	0	



c) Miền xác định : D = **R**, vì $x^2 - 2x + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

$$y' = 1 + \frac{2x-2}{\sqrt{x^3-2x+4}} = \frac{\sqrt{x^2-2x+4}+2x-2}{\sqrt{x^3-2x+4}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+4} = 2 - 2x$$

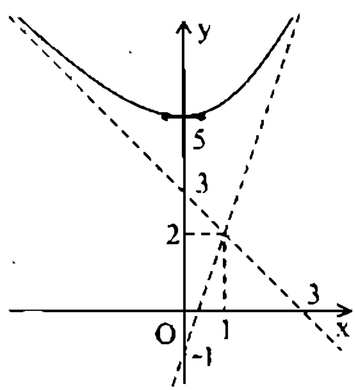
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2x \geq 0 \\ x^2-2x+4 = (2-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 3x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ; } y(0) = 5.$$

$$y = x + 1 + 2\sqrt{(x-1)^2+3} = x + 1 + 2|x-1| + \varepsilon(x), \text{ với } \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Tiệm cận xiên bên phải : y = 3x – 1. Tiệm cận xiên bên trái : y = –x + 3.

Bang biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$



Ví dụ 3 : Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

a) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; b) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định $D = (-1\,;\,1]$

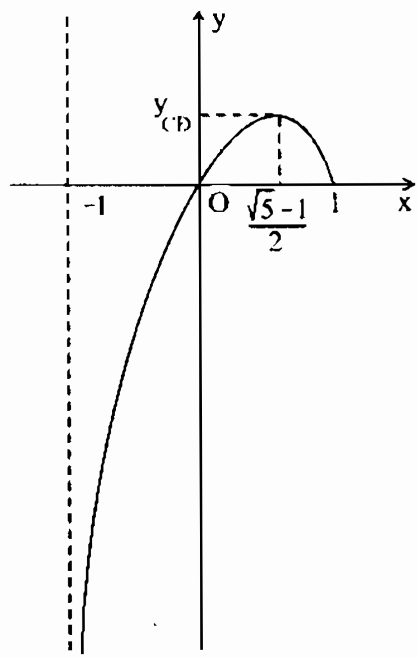
$$y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{x}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{-x}{(1+x)^2} + \frac{1-x}{1+x}\right) = -\frac{x^2+x-1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$$

Tiệm cận đứng $x = -1$.

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$	-1		$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		1	$+\infty$
y'			+	0	-		
y		$-\infty$	↗	CĐ	↘	0	



b) Miền xác định : $D = \mathbf{R}$

$$y' = \frac{1}{3}(3x^2 - 3)\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-3x)^2}} = (x^2 - 1)\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-3x)^2}}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \left(y(-1) = \sqrt[3]{2}\right) \\ x = 1 & \left(y(1) = -\sqrt[3]{2}\right) \end{array}\right.$$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2}} = 1\ ;$$

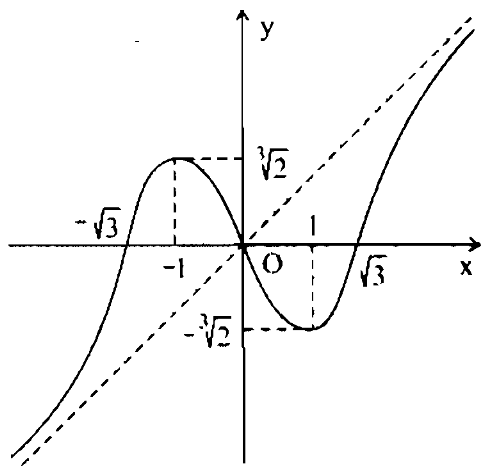
$$b = \lim_{x\to\infty} (y - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 3x} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x}{\sqrt[3]{(x^2 - 3x)^2} + x\sqrt{x^3 - 3x} + x^2} = 0$$

Vậy đồ thị có tiệm cận xiên y = x.

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	||	+	0	−	||	−	0	+	||	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt[3]{2}$	↘	0	↘	$-\sqrt[3]{2}$	↗	0	↗	$+\infty$



y là hàm số lẻ nên đồ thị nhận điểm gốc O làm tâm đối xứng.

Ví dụ 4 : a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$$y = x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$$

b) Xác định tất ca các điểm trên trục tung sao cho từ mỗi điểm ấy ta vẽ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị.

Hướng dẫn giải

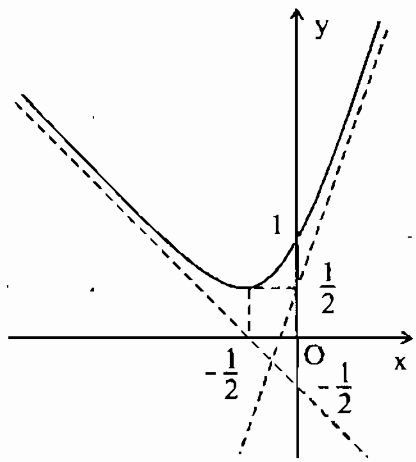
a) Miền xác định D = **R**.

$$y' = \frac{\sqrt{4x^2 2x+1}+4x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}\ ;\ \ y'=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}.$$

Tiệm cận xiên : $y = 3x + \frac{1}{2}$ và $y = -x - \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên và đồ thị

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$	↗ $+\infty$



b) Phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại điểm có hoành độ x_0 là :

$$y = \left(1 + \frac{4x_0+1}{\sqrt{4x_0^2+2x_0+1}}\right)(x - x_0) + x_0 + \sqrt{4x_0^2+2x_0+1}$$

Tiếp tuyến này đi qua điểm M(0 ; a) trên trục tung nên ta có :

$$a = \frac{-x_0(4x_0+1)}{\sqrt{4x_0^2+2x_0+1}} + \sqrt{4x_0^2+2x_0+1} + \frac{x_0+1}{\sqrt{4x_0^2+2x_0+1}}$$

Giá trị a cần tìm thuộc miền giá trị của hàm số

$$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{(4x^2+2x+1)^3}}\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\frac{1}{2}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\frac{1}{2}$ ↗	1	↘ $\frac{1}{2}$

Miền giá trị của g(x) là $T = \left(-\frac{1}{2} ; 1\right]$

Vậy điểm M(0 ; a) cần tìm có $-\frac{1}{2} < a \leq 1$.

C. LUYỆN TẬP

26.1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$; b) $y = x + 2 - 2\sqrt{x + 1}$;

c) $y = 2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x}$; d) $y = \sqrt{2x - x^2}$;

26.2 Cho hàm số $y = -2x + k\sqrt{x^2 + 1}$

a) Khảo sát sự biến thiên, vẽ đồ thị và xác định các tiệm cận của hàm số với $k = 4$.

b) Tìm tất cả giá trị k để hàm số không có cực đại và cực tiểu.

(Trích đề thi Đại học An ninh, năm 1997)

§ 27. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Hàm số mũ $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$:**

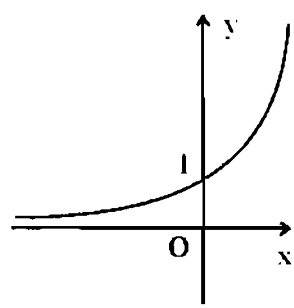
Miền xác định D = **R**

$$y' = a^x \ln a$$

Băng biến thiên và đồ thị :

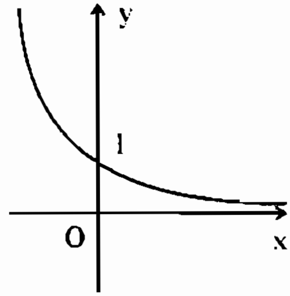
i) $a > 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$



ii) $0 < a < 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0



2. Hàm số lôgarit $y = \log_a x \ (0 < a \neq 1)$:

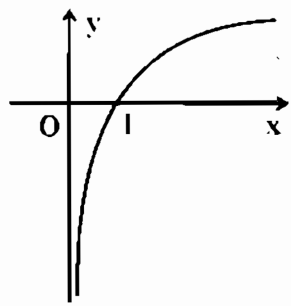
Miền xác định : $D = (0 \, ; +\infty)$

$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

Bảng biến thiên và đồ thị :

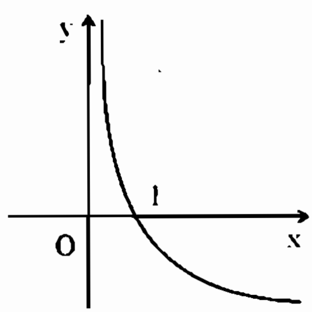
i) $a > 1$

x	$-\infty$	0		∞
y'			$+$	
y		$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



ii) $0 < a < 1$

x	$-\infty$	0		$+\infty$
y'			$-$	
y		$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Một số kết quả cần lưu ý :

a) $a^0 = 1$, $\qquad \log_a 1 = 0 \ (0 < a \neq 1)$

b) $(a^x)' = a^x \ln a$; $\qquad (e^x)' = e^x$;

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; $\qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$; $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2. Quy tắc L'Hospital :

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ hay $\dfrac{\infty}{\infty}$, $u(x)$, $v(x)$ có đạo hàm tại lân cận của x_0 và $v(x_0) \neq 0$ thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y = xe^{-x}$; $\qquad$ b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : $D = \mathbf{R}$

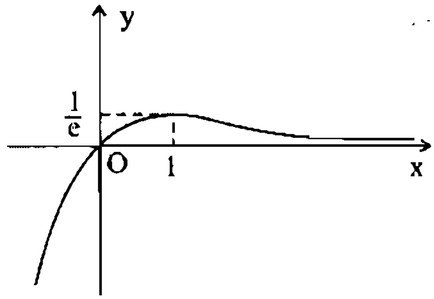
$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x) \ ; \ y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \left(y(1) = \frac{1}{e} \right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \ ;$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$: Đồ thị có tiệm cận ngang $y = 0$.

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



b) Miền xác định : $D = (0\,;+\infty)$

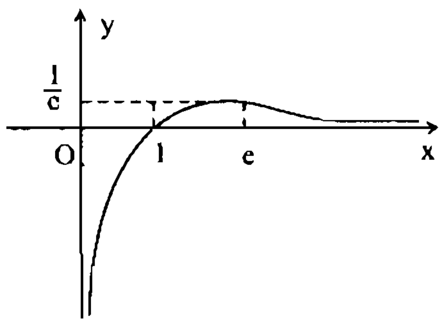
$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} y = -\infty$: Đồ thị có tiệm cận đứng x = 0.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$: Đồ thị có tiệm cận ngang y = 0.

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	0		e		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



Ví dụ 2 : Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = e^x \ln x$.

Hướng dẫn giải

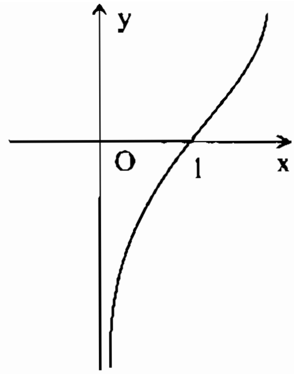
Miền xác định : $D = (0\,;+\infty)$

$$y' = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right).$$

Đặt : $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$

Ta có $g(x) \geq 1 > 0$; do đó $y' > 0, \forall x \in D$. Vì vậy ta có bảng biến thiên và đồ thị hàm số $y = e^x \ln x$ như sau :

x	0		$+\infty$
y'	‖	$+$	
y	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



$\lim\limits_{x \to 0^+} e^x \ln x = -\infty$ nên đồ thị có tiệm cận đứng $x = 0$.

C. LUYỆN TẬP

27.1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số :

a) $(x-1)e^{2x}$; b) $y = \ln x$;

c) $y = \dfrac{e^x}{x}$; d) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$;

27.2 Cho hàm số $y = x - 1 - \ln x$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số, suy ra bất đẳng thức : $\ln x \le x - 1$, với $x > 0$.

b) Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{n}\left[\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n\right] \le \ln\left[\frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)\right]$$

Suy ra : $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \le \dfrac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)$, với $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$.

§ 28. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Chu kì của hàm số tuần hoàn :

Cho hàm số $f : D \to \mathbf{R}$

f được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $L > 0$ sao cho :

$$\begin{cases} x + L \in D, & x \in D \\ f(x \pm L) = f(x), & x \in D \end{cases}$$

Số T nhỏ nhất trong các số L thoả định nghĩa trên được gọi là chu kì của hàm số f.

2. Các kết quả cần nhớ :

– Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ có chu kì là 2π

– Các hàm số $y = tgx$, $y = \cot gx$ có chu kì là π

– Các hàm số $y = \sin(ax + b)$, $y = \cos(ax + b)$ $(a \neq 0)$ có chu kì là $\dfrac{2\pi}{|a|}$

– Nếu f có chu kì T_1, g có chu kì T_2 thì $f \pm g$ có chu kì là bội số chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$$y = \sin x(1 + \cos x)$$

Hướng dẫn giải

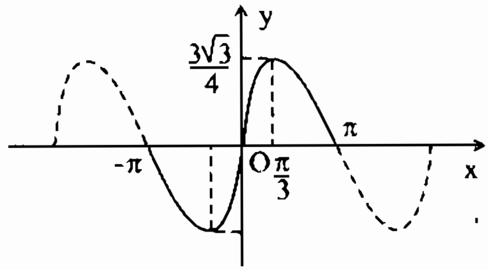
Miền xác định : D = **R** hàm số có chu kì là 2π nên ta chỉ cần xét trên đoạn $[-\pi ; \pi]$, hơn nữa y là hàm số lẻ nên chỉ cần xét trên đoạn $[0 ; \pi]$.

Ta có : $y' = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0



Vẽ đồ thị trên $[0 ; \pi]$ sau đó lấy đối xứng qua gốc O để được đồ thị trên $[-\pi ; \pi]$, cuối cùng dùng phép tịnh tiến theo phương Ox liên tiếp về trái và phải để được toàn bộ đồ thị.

C. LUYỆN TẬP

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau :

a) $y = \sin x + \sin 2x$; b) $y = 4\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

§ 29. ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÓ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI. PHÉP SUY ĐỒ THỊ.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Trường hợp tổng quát :**

– Xét dấu các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối

– Dựa vào định nghĩa

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

để bỏ giá trị tuyệt đối.

– Viết hàm số về dạng được cho bởi nhiều công thức.

– Khảo sát hàm số ứng với từng công thức.

– Lập bảng biến thiên chung rồi vẽ đồ thị hàm số.

2. Trường hợp đặc biệt :

a) Một số lưu ý :

– Hai điểm (x ; y) và (x ; –y) đối xứng nhau qua trục hoành.

– Hai điểm (x ; y) và (–x ; y) đối xứng nhau qua trục tung.

– Hai điểm (x ; y) và (–x ; –y) đối xứng nhau qua gốc O.

– Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đồ thị hàm số $y = -f(x)$ đối xứng nhau qua trục hoành.

b) Giả sử biết được đồ thị (C) của hàm số y = f(x), ta hãy suy ra đồ thị các hàm số :

$$(C_1): y = |f(x)|\,;\,(C_2): y = f(|x|)\,;\,(C_3): y = |f(|x|)|$$

i) Với (C_1) : $y = |f(x)|$

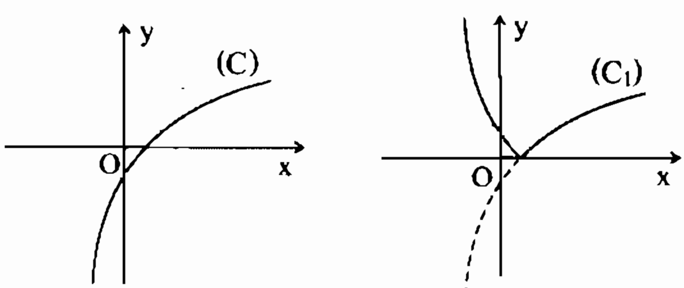
Ta có : $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$

Cách vẽ đồ thị (C_1):

– Giữ nguyên đồ thị (C) của $y = f(x)$ ứng với phần đồ thị phía trên trục hoành.

– Lấy phần đồ thị (C) phía dưới trục hoành đối xứng qua trục hoành (bỏ phần phía dưới).

– Hợp hai đồ thị trên ta được đồ thị $(C_1): y = |f(x)|$



ii) Với (C_2) : $y = f(|x|)$

Đây là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng nhau qua trục tung.

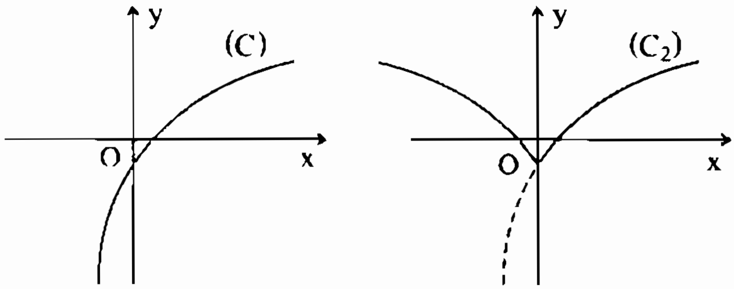
Ta xét x ≥ 0, khi đó y = f(x) chính là đồ thị (C).

Cách vẽ đồ thị (C_2):

– Giữ nguyên đồ thị (C) ứng với phần bên phải trục tung $(x \geq 0)$ (bỏ phần bên trái trục tung).

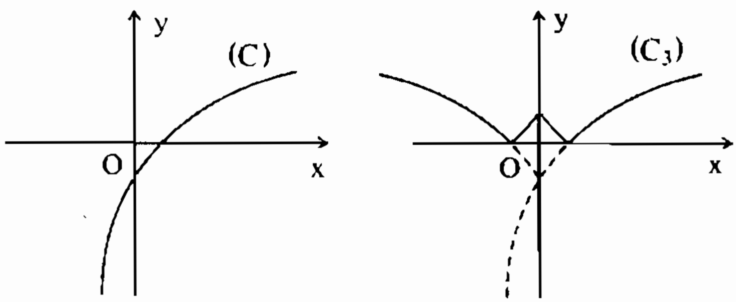
– Lấy phần bên phải Oy của (C) đối xứng qua Oy

– Hợp của hai phần trên ta được đồ thị $(C_2): y = f(|x|)$



iii) Với (C_3) : $y = |f(|x|)|$

Áp dụng cách vẽ (C_1), (C_2) ta vẽ lần lượt $y = f(|x|)$, sau đó vẽ (C_3).



B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Từ đó suy ra đồ thị (C_1) của hàm số $y = \left|\dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}\right|$ (vẽ hình riêng).

(Trích đề thi Đại học Kĩ thuật Công nghệ, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Ta có $y = x + 1 + \dfrac{1}{x+2}$

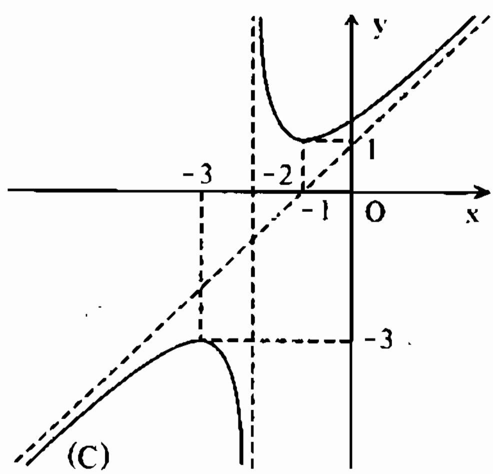
Miền xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

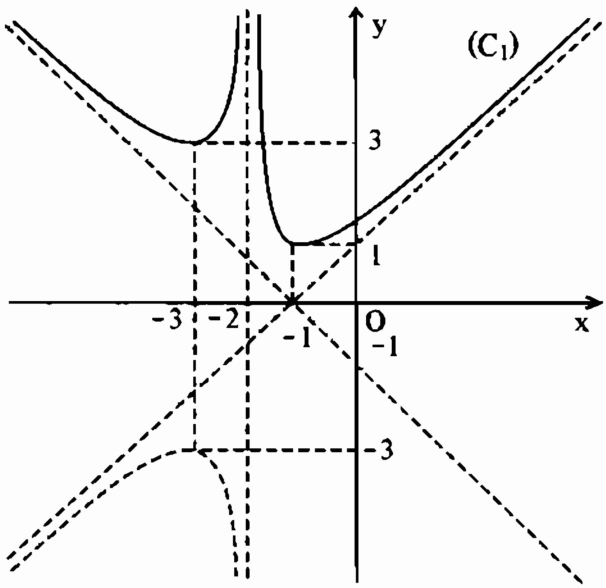
Tiệm cận đứng : $x = -2$; tiệm cận xiên : $y = x + 1$.

Bang biến thiên và đồ thị (C) :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y	$-\infty$ ↗		-3	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$



Suy ra đồ thị (C_1) : $y = \left|\dfrac{x^2 + 3x + 3}{x+2}\right|$



Ví dụ 2 : 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = 3x - x^3$.

Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = 3|x| - |x|^3$ (vẽ hình riêng).

2) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình :

$$x^3 - 3x = \frac{2m}{m^2 + 1}$$

có ba nghiệm phân biệt.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

1) Miền xác định D = **R**.

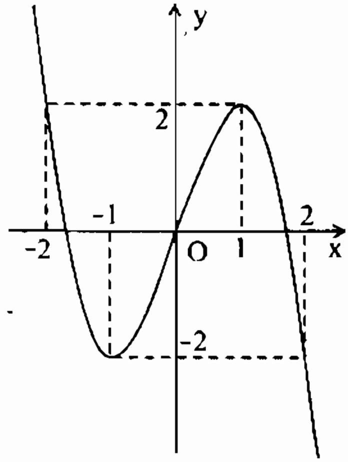
$$y' = 3 - 3x^2 \ ; \ y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$y'' = -6x \ ; \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

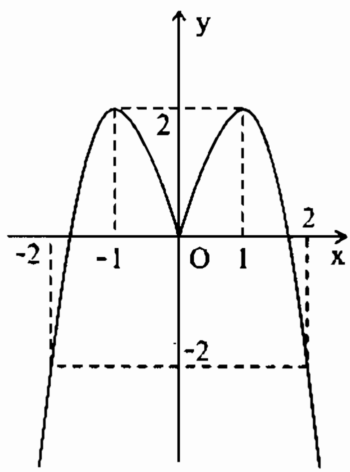
Điểm uốn I(0 ; 0).

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y''		+		+	0	-		-	
y'		-	0	+		+	0	-	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	$-\infty$



Suy ra đồ thị $y = 3|x| - |x|^3$. Hàm số là hàm chẵn nên đồ thị đối xứng qua Oy.



2) Phương trình đã cho tương đương với

$$3x - x^3 = -\frac{2m}{m^2+1} \qquad (1)$$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = -\frac{2m}{m^2+1}$ (cùng phương với Ox).

(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < -\frac{2m}{m^2+1} < 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 2m + 2 > 0 \\ 2m^3 + 2m + 2 > 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(2) thoả mãn với mọi $m \in \mathbf{R}$.

Vậy với mọi m phương trình đã cho luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 3 : 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số :

$$y = -x + 3 + \frac{3}{x-1} \text{ (vẽ hình riêng)}$$

2) Chứng minh rằng đường thẳng $y = 2x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2. Tìm giá trị của m sao cho $d = (x_1 - x_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, năm 1998)

Hướng dẫn giải

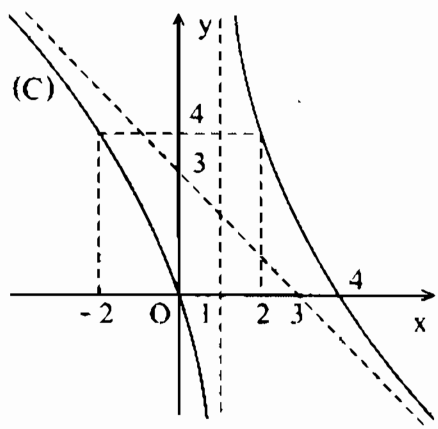
1) Miền xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = -1 - \frac{3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$$

Tiệm cận đứng : $x = 1$; tiệm cận xiên : $y = -x + 3$.

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-	‖	-	
y	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$



Điểm đặc biệt : (0 ; 0), (4 ; 0)

$$\text{Ta có : } y = \frac{-x^2 + 4x}{x-1} = \begin{cases} \dfrac{-x^2+4x}{x-1} & \text{nếu } x > 1 \\ -\dfrac{-x^2+4x}{x-1} & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{và : } y = \frac{-x^2+4x}{x-1} = -x + 3 + \frac{3}{x-1}.$$

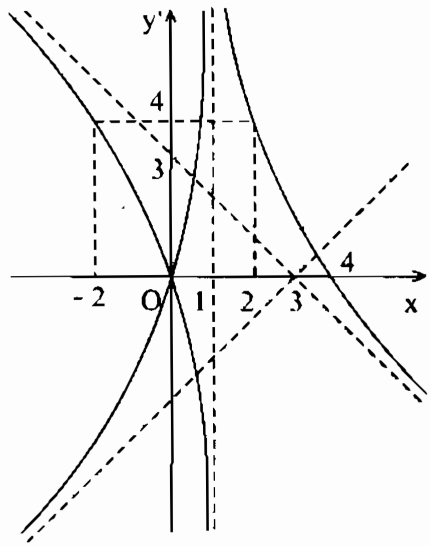
Từ đó suy ra đồ thị $y = \dfrac{-x^2+4x}{|x-1|}$.

Bên phải tiệm cận đứng giữ nguyên phần đồ thị của (C).

Bên trái tiệm cận đứng phần đồ thị (C) ta lấy đối xứng qua trục hoành (Hình vẽ bên).

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng y = 2x + m là :

$$\frac{-x^2 + 4x}{x - 1} = 2x + m \Leftrightarrow -x^2 + 4x = (x - 1)(2x + m)$$



(vì x = 1 không là nghiệm).

$$\Leftrightarrow 3x^2 + (m - 6)x - m = 0 \qquad (1)$$

Ta có $\Delta = (m - 6)^2 + 12m = m^2 + 36 > 0, \forall m$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả

$$x_1 + x_2 = \frac{6 - m}{3} \text{ và } x_1x_2 = -\frac{m}{3}$$

Vậy đường thẳng y = 2x + m luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt. Khi đó

$$d = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 = \frac{1}{9}(6\ m)^2 + \frac{4}{3}m = \frac{1}{9}(m^2 + 36) \geq 4$$

Vậy với m = 0 thì $\min d = 4$.

C. LUYỆN TẬP

29.1 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx - m}{x + m}$ (1)

a) Xác định m để hàm số (1) có cực trị.

b) Vẽ đồ thị hàm số (1) với m = 1.

c) Dựa vào đồ thị câu b), vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 - 2|x| - 1}{|x| + 1}$$

và từ đồ thị hàm số này, biện luận số nghiệm của phương trình $\frac{x^2 - 2|x| - 1}{|x| + 1} = a$ theo tham số a.

(Trích đề thi Đại học Công đoàn, năm 1999)

29.2 Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

b) Dựa vào đồ thị hàm số trên, biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^2 = (4 + m)|x| + 5 + 2m = 0$

(Trích đề thi Đại học Đà Lạt, năm 1999)

29.3 Cho hàm số $y = \frac{(x - 1)^2}{x + 2}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$\frac{(x - 1)^2}{|x + 2|} = m$$

(Trích đề thi Đại học Kinh tế Quốc dân, năm 1999)

29.4 Cho hàm số $y = \frac{2x}{x - 1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số.

b) Suy ra đồ thị (C_1) hàm số $y = \frac{2|x|}{|x| - 1}$ (Vẽ hình riêng). Dùng đồ thị (C_1) để biện luận theo m số nghiệm x $x \in [-1 ; 2]$ của phương trình $(m - 2)|x| - m = 0$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, Khối D, năm 1999)

29.5 Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + mx + m}{x + 1}$. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số ứng với m = −1. Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{|x - 1|(2x + 1)}{x + 1}$.

(Trích đề thi Đại học Y Dược, năm 1993)

Chương 4.

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ

§ 30. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho hai hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = g(x)$ có đồ thị (C_2)

– Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là :

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

– Số giao điểm của (C_1) và (C_2) chính là số nghiệm của phương trình (1).

– Các trường hợp xảy ra :

(1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) không có điểm chung.

(1) có n nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) có n điểm chung.

(1) có nghiệm đơn $x_0 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) cắt nhau tại $M(x_0 ; x_0)$.

(1) có nghiệm kép $x_0 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc nhau tại $M(x_0 ; x_0)$.

– Điều kiện tiếp xúc :

Cách 1 : (C_1) tiếp xúc (C_2) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Nghiệm x_0 của hệ là hoành độ tiếp xúc của (C_1) và (C_2).

Lưu ý : Nếu (C_1) tiếp xúc với (C_2) tại M thì tại đó hai đồ thị có chung tiếp tuyến.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) Để tìm vị trí tương đối của hai đồ thị (C_1) và (C_2) ta lập phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2):

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

– Giải phương trình (1) tìm hoành độ giao điểm, thay vào $y = f(x)$ (hoặc $y = g(x)$) để có tung độ giao điểm.

– Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là số nghiệm của phương trình (1).

– Nếu $x = x_0$ là nghiệm kép của (1) thì (C_1) tiếp xúc (C_2) tại điểm $M\big(x_0 ; f(x_0)\big)$.

2) Chứng minh (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau hoặc tìm điều kiện để (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau.

– Điều kiện (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau là hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số :

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

2) Tìm tất cả các đường thẳng đi qua điểm M(4 ; 4) và cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

(Trích đề thi Đại học Đại cương Tp. HCM, năm 1996)

Hướng dẫn giải

1) Bạn đọc tự giải.

2) Đường thẳng (d) qua (4 ; 4) với hệ số góc k có phương trình :

$$y = k(x - 4) + 4.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là :

$$x^3 - 6x^2 + 9x = k(x-4) + 4$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 - k(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 2x + 1 - k) = 0 \qquad (1)$$

(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 3 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 2x + 1 - k = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 4, nghĩa là ta phải có :

$$\begin{cases} \Delta' = 1 - (1-k) > 0 \\ 4^2 - 2.4 + 1 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \neq 9 \end{cases}$$

Vậy các đường thẳng qua M cần tìm là : y = kx + 4 – 4k với 0 < k, k ≠ 9.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

b) Tìm trên đồ thị những điểm cách đều hai trục toạ độ.

c) Với những giá trị nào của m thì đường thẳng $y = m - x$ cắt đồ thị của hàm số tại hai điểm phân biệt ? Chứng minh rằng khi đó cả hai giao điểm đều thuộc một nhánh của đồ thị.

(Trích đề thi Đại học Hàng hải, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) Bạn đọc tự giải.

b) Các điểm nằm trên đồ thị và cách đều hai trục toạ độ là giao điểm của đồ thị với hai đường thẳng y = ±x.

i) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với đường thẳng y = x là :

$$\frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ta được điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

ii) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với đường thẳng y = –x là :

$$\frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = -x \Rightarrow x^2 + x - 1 = -x^2 + x \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ta được hai điểm $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

c) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $y = m - x$ là :

$$\frac{x^2+x-1}{x-1} = m - x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = (x-1)(m-x)\ (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 2x^2 - mx - 1 + m = 0 \qquad (1)$$

Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = m - x$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1, nghĩa là ta phải có :

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 8m + 8 > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 4 - 2\sqrt{2} \\ m > 4 + 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Mặt khác $2.g(1) = 2 > 0$ nên 1 nằm ngoài khoảng $(x_1 ; x_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của $g(x) = 0$. Vậy x_1, x_2 nằm cùng một phía đối với $x = 1$, do đó hai giao điểm đều thuộc cùng một nhánh của đồ thị.

Ví dụ 3 : Xác định m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m$ tiếp xúc với trục hoành.

(Trích đề thi Đại học Tổng hợp Tp. HCM, năm 1995)

Hướng dẫn giải

Cách 1 : Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là

$$x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

Để đồ thị tiếp xúc với trục hoành thì phương trình (1) có nghiệm kép hoặc có nghiệm bằng 1. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \Delta = 1 + 4m = 0 \\ 1^2 - 1 - m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{4} \\ m = 0 \end{array}\right.$$

Cách 2 : (Điều kiện tiếp xúc)

Đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = 0$ khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2(m-1)x + m = 0 & (2) \\ 3x^2 - 4x - m + 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Từ (3) suy ra $m = 3x^2 - 4x + 1$ thay vào (2) ta được :

$$2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Với x = 1 ta có m = 0 ; với $x = \frac{1}{2}$ ta có $m = -\frac{1}{4}$.

Vậy, với m = 0, $m = -\frac{1}{4}$ thì đồ thị tiếp xúc với trục hoành.

Ví dụ 4 : Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số

$$y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$$

tiếp xúc với đường thẳng y = m.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1995)

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với đường thẳng y = m là :

$$\frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2} = m$$

$$\Leftrightarrow mx^2 + 3mx + 2m + 1 = mx + 2m \; (x \neq -2)$$

$$\Leftrightarrow mx^2 + 2mx + 1 = 0 \; (1) \; (x \neq -2)$$

Đồ thị tiếp xúc với đường thẳng y = m khi và chỉ khi (1) có nghiệm kép khác −2, nghĩa là ta phải có :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m = 0 \\ m.(-2)^2 + 2m(-2) + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m(m-1) = 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m = 1$$

Vậy với m = 1 thì đồ thị tiếp xúc với đường thẳng y = m.

Ví dụ 5 : Chứng minh rằng họ đường cong (C_m) của hàm số $y = x^3 + mx^2 - (2m+1)x + m - 1$ luôn tiếp xúc lẫn nhau.

Hướng dẫn giải

Lấy $m_1 \neq m_2$ thì phương trình hoành độ giao điểm của (C_{m_1}) và (C_{m_2}) là :

$$x^3 + m_1x^2 - (2m_1 + 1)x + m_1 - 1 =$$

$$x^3 + m_2x^2 - (2m_2 + 1)x + m_2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (m_1 - m_2)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \qquad (1)$$

(1) có nghiệm kép nên (C_{m_1}) tiếp xúc (C_{m_2}) tại điểm A(1 ; –1)

Vậy họ đường cong (C_m) luôn tiếp xúc lẫn nhau tại A(1 ; –1) và tại đó họ (C_m) có chung một tiếp tuyến.

D. LUYỆN TẬP

30.1 Cho họ đường cong $(C_m): y = \dfrac{x^2 - mx - 1}{x - 1}$ (m là tham số).

Xét đường thẳng $(L_m): y = mx + 2$. Tìm m sao cho (C_m) cắt (L_m) tại hai điểm phân biệt.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1997)

30.2 Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 1\ (C_m)$. Xác định m để (C_m) cắt đường thẳng y = 1 – x tại ba điểm phân biệt A(0 ; 1), B, C sao cho các tiếp tuyến (C_m) tại B và C vuông góc với nhau.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1996)

30.3 Xác định m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 - 9x - 9m$ tiếp xúc với trục hoành.

(Trích đề thi Đại học Xây dựng Hà Nội, năm 1997)

30.4 Xác định a để đồ thị hàm số :

$$y = x^3 - ax^2 - (2a^2 - 7a + 7)x + 2(a-1)(2a-3)$$

tiếp xúc với trục hoành.

(Trích đề thi Đại học Kinh tế, năm 1997)

30.5 Xác định m để đồ thị hàm số : $y = x^4 - 2mx^2 - m^3 - m^2$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt.

(Trích đề thi Đại học Luật, năm 1995)

30.6 Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + (2a+1)x + a + 3}{x + 2}$ $(a \neq -1)$. Với giá trị nào của a thì đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng y = a + 4.

(Trích đề thi Đại học Y Dược Tp. HCM, năm 1997)

30.7 Xác định m để $(P): y = 2x^3 + m$ tiếp xúc với đồ thị (C) hàm số : $y = (x+1)^2(x-1)^2$

30.8 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 1}{x+1}$ có đồ thị là (C_m) và hàm số y = kx − k − 2 có đồ thị là (D_k).

a) Xác định k để (D_k) cắt mọi (C_m).

b) Xác định m để (C_m) cắt mọi (D_k).

30.9 Xác định k để đường thẳng y = 2kx − k cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{x-2}$ tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1998)

30.10 Xác định a để đồ thị hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$ tiếp xúc với parabol $y = -x^2 + a$.

(Trích đề thi Đại học Quy Nhơn, năm 1999)

§ 31. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho hàm số y = f(x) có đồ thị (C)

1) Hệ số góc tiếp tuyến (Δ) với (C) tại $M(x_0 ; f(x_0)) \in (C)$ là $f'(x_0)$ tức là $k = tg\alpha = f'(x_0)$.

α là góc giữa (Δ) và chiều dương trục Ox.

2) Phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C) tại tiếp điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ là :

$$y = f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

3) Hai đường thẳng song song có cùng hệ số góc, hai đường thẳng vuông góc có tích hệ số góc bằng −1.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M\left(x_0\ ;\ f\left(x_0\right)\right)$:

$$y = f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) \qquad (1)$$

2) Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc k của tiếp tuyến.

Cách 1 :

– Tìm hoành độ tiếp điểm x_0 từ phương trình $f'\left(x_0\right) = k$

– Áp dụng công thức (1).

Cách 2 :

– Tiếp tuyến có dạng y = kx + m.

– Tìm m từ nghiệm kép của phương trình hoành độ giao điểm f(x) = kx + m.

3) Phương trình tiếp tuyến kẻ từ một điểm $A\left(x_1\ ;\ y_1\right)$

Cách 1 : Tìm tiếp điểm $M\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ bằng cách cho tiếp tuyến

$$y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

đi qua $A\left(x_1\ ;\ y_1\right)$.

Cách 2 : (Dùng cho hàm bậc hai, nhất biến, hữu tỉ loại bậc hai chia bậc nhất).

Tìm hệ số góc k từ phương trình hoành độ giao điểm

$$f(x) = k\left(x - x_1\right) + y_1$$

có nghiệm kép.

Cách 3 : (Dùng cho hàm bậc ba, bậc bốn)

Tìm h ; số góc k bằng điều kiện tiếp xúc là điều kiện có nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} f(x) = k\left(x - x_1\right) + y_1 \\ f'(x) = k \end{cases}$$

4) Phương trình tiếp tuyến tại hai điểm phân biệt của đồ thị.

– Giả sử tiếp tuyến có dạng y = ax + b.

– Phương trình hoành độ giao điểm f(x) = ax + b có hai nghiệm kép phân biệt $x_1 \neq x_2$.

– Xác định a, b để $f(x) = ax - b = k\left(x - x_1\right)^2\left(x - x_2\right)^2$ với mọi x

– Đồng nhất hai vế tìm a, b, x_1, x_2..

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - 2}$ có đồ thị (C_m)

Gọi A là giao điểm của đồ thị (C_m) với trục Oy. Viết phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại điểm A.

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1996)

Hướng dẫn giải

Miền xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $y' = \dfrac{2x^2 - 8x + 6 - m}{(x - 2)^2}$

Giao điểm của (C_m) với trục Oy : $A\left(0\,;\,-\dfrac{m}{2}\right)$

Hệ số góc tiếp tuyến tại A là $k = y'(0) = \dfrac{6 - m}{4}$

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại A là :

$$y + \frac{m}{2} = \frac{6 - m}{4}x \text{ hay } y = \frac{6 - m}{4}x - \frac{m}{2}$$

Ví dụ 2 : Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + mx + m}{x + 1}$. Xác định m để (C_m) cắt Ox tại hai điểm phân biệt và hai tiếp tuyến tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

(Trích đề thi Đại học Y Dược, năm 1993)

Hướng dẫn giải

Miền xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Đặt $g(x) = 2x^2 + mx + m$ (C_m) cắt Ox tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi g(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt khác –1, tức là ta phải có :

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 8m > 0 \\ 2.(-1)^2 + m(-1) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 8 \end{array}\right.$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của g(x), ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{m}{2}\ ;\ x_1x_2 = \frac{m}{2}$$

Ta có $y' = \dfrac{g'(x).(x+1) - g(x)}{(x+1)^2}$

Hệ số góc tiếp tuyến tại hai giao điểm của (C_m) với Ox là :

$$y'(x_1) = \frac{g'(x_1)(x_1+1) - g(x_1)}{(x_1+1)^2} = \frac{g'(x_1)}{x_1+1}\ ;$$

$$\Leftrightarrow y'(x_1) = \frac{4x_1 + m}{x_1 + 1}$$

Tương tự : $y'(x_2) = \dfrac{4x_2 + m}{x_2 + m}$

(Vì $g(x_1) = g(x_2)) = 0$)

Do đó : $y'(x_1).y'(x_2) = \dfrac{4x_1 + m}{x_1 + 1} \cdot \dfrac{4x_2 + m}{x_2 + 1}$

$$= \frac{16x_1x_2 + 4m(x_1 + x_2) + m^2}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \frac{16\frac{m}{2} + 4m\left(-\frac{m}{2}\right) + m^2}{\frac{m}{2} + \left(-\frac{m}{2}\right) + 1} = 8m - m^2$$

(C_m) cắt Ox tại hai điểm và tiếp tuyến tại hai điểm đó vuông góc nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 8 \end{array}\right. \\ y'(x_1).y'(x_2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 8 \end{array}\right. \\ m^2 - 8m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4 \pm \sqrt{17}$$

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ có đồ thị (H)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số.

2) Xét ba điểm A, B, C thẳng hàng và thuộc (H). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của (H) với tiếp tuyến của đồ thị (H) tại A, B, C. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 cũng thẳng hàng.

(Trích đề thi Học viện Bưu chính Viễn thông, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Học sinh tự giải.

2) Lấy $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$; $C(x_3 ; y_3)$ thuộc (H) (A, B, C phân biệt).

Ta có : $y_2 - y_1 = x_2^3 - 3x_2 - 2 - (x_1^3 - 3x_1 - 2)$

$$= x_2^3 - x_1^3 - 3(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3)$$

Tương tự : $y_3 - y_1 = (x_3 - x_1)(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 - 3)$

Ta có : $\vec{AB} = (x_2 - x_1 ; y_2 - y_1) = (x_2 - x_1).(1 ; x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3)$

$$\vec{AC} = (x_3 - x_1 ; y_3 - y_1) = (x_3 - x_1).(1 ; x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 - 3)$$

A, B. C thẳng hàng $\Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3 = x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow x_1(x_2 - x_3) + (x_2^2 - x_3^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_3) + (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ (vì } x_2 \neq x_3)$$

Vậy ba điểm phân biệt trên (H) thẳng hàng khi và chỉ khi tổng hoành độ của chúng bằng 0.

Ta tìm hoành độ x_1' của A_1 theo x_1.

Phương trình tiếp tuyến (Δ) với (H) tại $A(x_1, y_1)$ là :

$$y - y_1 = (3x_1^2 - 3)(x - x_1) \Leftrightarrow y = 3(x_1^2 - 1)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 - 2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với (H) là :

$$x^3 - 3x - 2 = 3(x_1^2 - 1)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 - 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x_1^3 - 3(x - x_1) - 3(x_1^2 - 1)(x - x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)(x^2 + x_1x + x_1^2 - 3x_1^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)^2(x + 2x_1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = x_1 & \text{(điểm A)} \\ x = -2x_1 & \text{(điểm } A_1) \end{array}\right.$$

Vậy điểm A_1 có hoành độ là $-2x_1$. Tương tự hoành độ các điểm B_1, C_1 lần lượt có hoành độ là $-2x_2, -2x_3$.

A, B, C thẳng hàng $\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$

$\Rightarrow A_1, B_1, C_1$ thẳng hàng.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$

1) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số biết rằng tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{9}x + 1$.

2) Tìm tất cả các tiếp tuyến với đồ thị biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(1\,;-1)$.

Hướng dẫn giải

1) Đường thẳng $y = -\frac{1}{9}x + 1$ có hệ số góc $k_1 = -\frac{1}{9}$

Gọi $k_2 = 9$. Hoành độ tiếp điểm là nghiệm phương trình

$$y' = 3x^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$. Phương trình tiếp tuyến là :

$$y - 3 = 9(x - 2) \text{ hay } y = 9x - 15$$

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến là :

$$y + 1 = 9(x + 2) \text{ hay } y = 9x + 17$$

2) Phương trình đường thẳng (d) qua A(1 ; –1) có hệ số góc k là :

$$y = k(x - 1) - 1$$

Hoành độ giao điểm của (d) với đồ thị hàm số là :

$$x^3 - 3x + 1 = k(x-1) - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 - k(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) - k(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2 - k) = 0$$

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi và chỉ khi phương trình $x^2 + x - 2 - k = 0$ có nghiệm kép hoặc có nghiệm bằng 1. Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta = 1 + 4(2 + k) = 0 \\ 1^2 + 1 - 2 - k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -\frac{9}{4} \\ k \quad 0 \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là y = –1 và $y = -\frac{9}{4}x + \frac{5}{4}$.

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ có đồ thị (C). Chứng minh rằng có hai tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(1 ; 0) và vuông góc nhau.

(Trích đề thi Đại học Dược Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Đường thẳng (d) qua A(1 ; 0) với hệ số góc k có phương trình là :

$$y = k(x - 1).$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C)

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1} = k(x-1) \Leftrightarrow x^2+2x+2 = k(x^2-1)\ (x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow (k-1)x^2 - 2x - (k+2) = 0 \qquad (1)$$

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k-1 \neq 0 \\ \Delta' = 1 + (k-1)(k+2) = 0 \\ (k-1)(-1)^2 - 2(-1) - (k+2) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ k^2 + k - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vậy qua A(1 ; 0) kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị có tích hệ số góc $k_1.k_2 = -1$ (Viet) nên hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

Ví dụ 6 : Tìm trên đường thẳng y = 2 những điểm từ đó có thể kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, Khối D, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Lấy $M(x_0\ ;\ 2)$ thuộc đường thẳng y = 2.

Phương trình đường thẳng (d) qua M với hệ số góc k là

$$y = k(x - x_0) + 2$$

(d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3 - 3x = k(x - x_0) + 2 & (1) \\ 3x^2 - 3 = k & (2) \end{cases}$$

Thay $k = 3x^2 - 3$ vào (1) ta được

$$x^3 - 3x - 2 - 3(x^2 - 1)(x - x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x_0x^2 + 3x_0 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[2x^2 - (3x_0+2)x + 3x_0 + 2\right] = 0 \qquad (3)$$

Đối với đồ thị hàm số bậc ba điều kiện cần và đủ để hai tiếp tuyến phân biệt là hai tiếp điểm có hoành độ phân biệt.

Để tại M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) thì phương trình (3) có ba nghiệm phân biệt. Điều này tương đương với phương trình $2x^3 - (3x_0+2)x + 3x_0 + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1, nghĩa là ta phải có :

$$\begin{cases} \Delta = (3x_0+2)^2 - 8(3x_0+2) > 0 \\ 2(-1)^2 + (3x_0+2) + 3x_0 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_0 < -\dfrac{2}{3} \\ x_0 > 2 \end{array}\right. \\ x_0 \neq 1 \end{cases}$$

Vậy các điểm cần tìm trên đường thẳng y = 2 là các điểm có hoành độ $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\dfrac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

Ví dụ 7 : Cho hàm số $y = x^4 - 4x^3 + 3$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C) biết rằng (Δ) tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Giả sử tiếp tuyến (Δ) có phương trình là y = ax + b.

Để (Δ) tiếp xúc với (C) tại 2 điểm có hoành độ x_1, x_2 thì phương trình $x^4 - 4x^3 + 3 = ax + b$ có hai nghiệm kép $x = x_1$ và $x = x_2$. Tức là :

$$x^4 - 4x^3 - ax + 3 - b = (x - x_1)^2(x - x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 - ax + 3 - b = \left[x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2\right]^2$$

Đồng nhất hệ số tương ứng ở hai vế ta được :

$$\begin{cases} -4 = -2(x_1+x_2) \\ 0 = 2x_1x_2 + (x_1+x_2)^2 \\ -a = -2(x_1+x_2)x_1x_2 \\ 3b = x_1^2x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -2 \\ a = -8 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy (Δ) : y = –8x – 1.

D. LUYỆN TẬP

31.1 Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ tại giao điểm của đồ thị với trục tung.

(Trích đề thi Đại học Kĩ thuật công nghệ, Khối B, năm 1997)

31.2 Lấy một điểm bất kì thuộc đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị đi qua điểm ấy ?

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1997)

31.3 Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (m-4)x - 2m + 1}{x-2}$

a) Tìm m để đồ thị hàm số nhận điểm (2 ; 1) làm tâm đối xứng

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) ứng với m = –3 và viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết nó song song với đường thẳng y = x + 4.

(Trích đề thi Đại học Luật Hà Nội, năm 1999)

31.4 Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ mà qua đó kẻ được một và chỉ một tiếp tuyến với (C).

(Trích đề thi Học viện Bưu chính Viễn thông Hà Nội, năm 1999)

31.5 a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{x-1}$

b) Tìm điểm A thuộc trục hoành sao cho qua A chỉ vẽ được duy nhất một tiếp tuyến với đồ thị hàm số trên.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1996)

31.6 a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) hàm số $y = \dfrac{2x^2 + x}{x+1}$.

b) Tìm những điểm M trên đường thẳng y = 1 sao cho từ M có thể kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị (H).

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1999)

31.7 Cho hàm số $y = x^3 - 12x + 12$. Tìm trên đường thẳng y = –4 điểm M, từ đó kẻ đến đồ thị hàm số đã cho ba tiếp tuyến phân biệt.

(Trích đề thi Học viện Bưu chính Viễn thông, năm 1998)

31.8 Lập phương trình tiếp tuyến (Δ) với đồ thị (C) hàm số $y = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + \dfrac{5}{4}$, biết rằng (Δ) tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

§ 32. ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA HỌ ĐỒ THỊ. BIỆN LUẬN SỐ ĐỒ THỊ ĐI QUA MỘT ĐIỂM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho họ đồ thị (C_m) có phương trình $y = f(x, m)$ với m là tham số $A(x_0 ; y_0)$ cho trước ta có :

$$A(x_0 ; y_0) \in (C_m) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0 ; m) \qquad (1)$$

Xem phương trình (1) là phương trình theo ẩn m.

– Nếu (1) vô nghiệm thì không có đường nào của họ (C_m) qua điểm M.

– Nếu (1) có n nghiệm thì có n đường của họ (C_m) đi qua.

– Nếu (1) nghiệm đúng với mọi m thì tất cả các đường của họ (C_m) đều đi qua điểm A. Khi đó A là điểm cố định của họ (C_m).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Tìm điểm cố định của họ đồ thị (C_m) :

– Biến đổi phương trình $y = f(x, m)$ về phương trình theo m. Ta tìm (x ; y) để y = f(x, m) nghiệm đúng với mọi m.

– Ta thường gặp các dạng sau :

$$a(x ; y)m + b(x ; y) = 0$$

hoặc : $$a(x ; y)m^2 + b(x ; y)m + c(x ; y) = 0.$$

– Toạ độ các điểm cố định của họ đồ thị (C_m) (nếu có) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} a(x, y) = 0 \\ b(x, y) = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a(x, y) = 0 \\ b(x, y) = 0 \\ c(x, y) = 0 \end{cases}$$

2. Tìm điểm mà có đúng n đồ thị của họ (C_m) đi qua :

– Tìm các điểm M(x ; y) để phương trình ẩn m : y = f(x, m) có đúng n nghiệm.

3. Điểm mà mọi đồ thị của họ đều không đi qua

– Tìm điều kiện x, y (suy ra tập hợp điểm M(x ; y)) để phương trình y = f(x, m) ẩn m vô nghiệm.

– Chú ý :

. $Am + B = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$

$$Am^2 + Bm + C = 0 \text{ vô nghiệm } \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A \neq 0 \\ B^2 - 4AC < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Đối với hàm hữu tỉ có tiệm cận đứng cố định thì những điểm nằm trên tiệm cận đứng là những điểm đồ thị không bao giờ đi qua.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = mx^3 - (m-1)x^2 - (2+m)x + m - 1$ $\qquad (C_m)$

Tìm những điểm cố định mà đồ thị (C_m) luôn đi qua với mọi m.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh, Khối D, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\quad y = mx^3 - (m-1)x^2 - (2+m)x + m - 1$

$$\Leftrightarrow m(x^3 - x^2 - x + 1) + x^2 - 2x - 1 - y = 0.$$

Toạ độ điểm cố định của (C_m) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x - 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(x+1) = 0 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy (C_m) qua hai điểm cố định $A(1 ; -2)$ và $B(-1 ; 2)$.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + x - m}{2x + m}$ (m là tham số).

Chứng minh rằng loại trừ hai giá trị của m, còn với mọi giá trị khác của m đồ thị hàm số luôn đi qua hai điểm cố định.

(Trích đề thi Đại học Thuỷ lợi Hà Nội, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Ta có : $y = \dfrac{-x^2 + x - m}{2x + m} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2x \\ y(2x + m) = -x^2 + x - m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2x \\ m(y+1) + x(x + 2y - 1) = 0 \end{cases}$$

Toạ độ điểm cố định là nghiệm của hệ : $\begin{cases} y + 1 = 0 \\ x(x + 2y - 1) = 0 \end{cases}$, với $m \neq -2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ với $m \neq 0$ hoặc $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ với $m \neq -6$

Vậy với $m \neq 0$ và $m \neq 6$ thì đồ thị hàm số luôn đi qua hai điểm cố định $A(0\,;-1)$, $B(3\,;-1)$.

Chú ý : Với $m = 0$ hàm số suy biến thành $y = \dfrac{1}{2}(1 - x)$ $(x \neq 0)$

Với $m = -6$ hàm số suy biến thành $y = -\dfrac{1}{2}(2 + x)$ $(x \neq 3)$.

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = (m+1)x^3 - (2m+1)x - m + 1$ có đồ thị (C_m)

1) Chứng minh rằng với mọi m, đồ thị hàm số đi qua ba điểm cố định, thẳng hàng.

2) Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng đi qua 3 điểm cố định trên.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Vinh, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Ta có : $y = (m+1)x^3 - (2m+1)x - m + 1$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 2x - 1)m + (x^3 - x + 1 - y) = 0$$

Toạ độ điểm cố định của (C_m) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 - 2x - 1 = 0 & (1) \\ x^3 - x + 1 - y = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \\ y = x^3 - x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y = 1 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, y = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, y = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy đồ thị (C_m) luôn có ba điểm cố định

$$A(-1;1), B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right), C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Lấy (1) trừ (2) ta được y = x + 2, do đó toạ độ A, B, C thoả phương trình đường thẳng y = x + 2. Vậy A, B, C thẳng hàng.

2) Ta có : $y' = 3(m+1)x^2 - (2m+1)$. Đồ thị (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng y = x + 2 khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm $3(m+1)x^2 - (2m+1) = -1 \Leftrightarrow 3(m+1)x^2 = 2m$ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \frac{2m}{3(m+1)} \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty).$$

Ví dụ 4 : Cho họ đường cong $y = \dfrac{-x^2 + mx - m^2}{x - m}$ (C_m).

Tìm các điểm trên mặt phẳng toạ độ đó sao cho có đúng hai đường của họ (C_m) đi qua.

(Trích đề thi Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Xét phương trình ẩn m :

$$y = \frac{-x^2 + mx - m^2}{x - m} \quad (1)$$

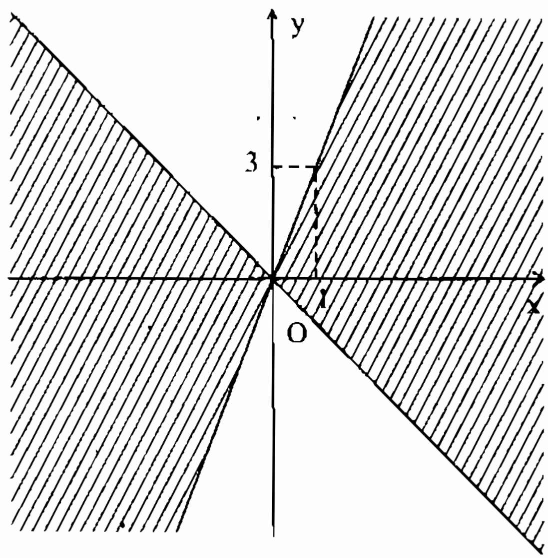
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq x \\ y(x-m) = -x^2 + mx - m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq x \\ m^2 - (x+y)m + x^2 + xy = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(1) có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt $m \neq x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (x+y)^2 - 4x(x+y) > 0 \\ x^2 - (x+y)x + x^2 + xy \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(y-3x) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y>0,\ x\neq 0 \\ y-3x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y<0,\ x\neq 0 \\ y-3x<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy các điểm cần tìm là các điểm trong góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng $y = -x$ và $y = 3x$ (phần không gạch sọc, trừ trục Oy).



Ví dụ 5 : Cho hàm số : $y = \dfrac{(3m+1)x - (m^2 - m)}{x+m}$, $m \neq 0$

1) Chứng minh rằng đồ thị hàm số không có điểm cố định.

2) Tìm tất cả các điểm trên mặt phẳng toạ độ mà đồ thị của hàm số không thể đi qua, khi m thay đổi.

Hướng dẫn giải

1) Ta có : $$y = \frac{(3m+1)x - (m^2 - m)}{x+m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m \\ m^2 + (y - 3x - 1)m + xy - x = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Rõ ràng (1) không thể nghiệm đúng với mọi $m \neq 0$ nên đồ thị không có điểm cố định.

2) $(x_0 ; y_0)$ là điểm mà đồ thị không bao giờ đi qua khi phương trình (1) vô nghiệm hoặc (1) có nghiệm kép $m = -x_0$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

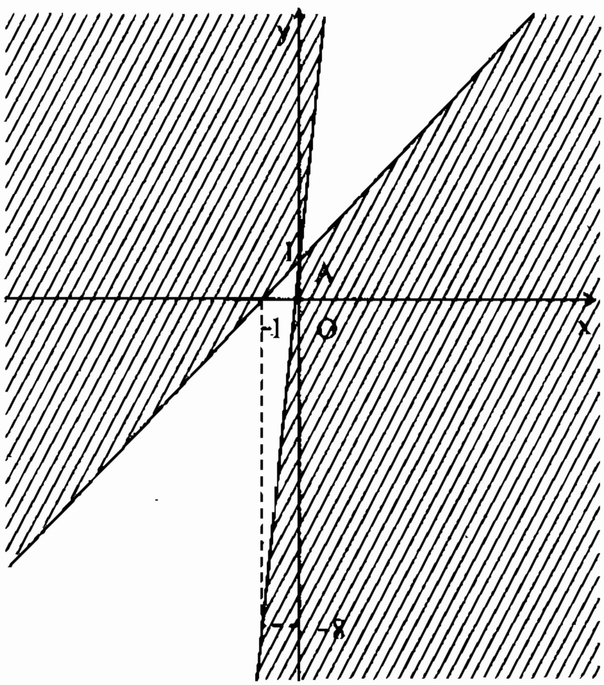
$$\left[\begin{array}{lll} \Delta = (y_0 - 3x_0 - 1)^2 - 4x_0(y_0 - 1) < 0 & & (2) \\ \Delta = 0 \quad \text{và} & \dfrac{3x_0 + 1 - y_0}{2} = -x_0 & (3) \end{array}\right.$$

Ta có : $(2) \Leftrightarrow (y_0 - 1)^2 - 10x_0(y_0 - 1) + 9x_0^2 < 0 \Leftrightarrow (y_0 - 1 - 5x_0)^2 - 16x_0^2 < 0$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 5x_0 + 1 \\ (y_0 - 3x_0 - 1)^2 - 4x_0(y_0 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Ta có điểm A(0 ; 1)

Vậy tập hợp các điểm M(x ; y) thoả điều kiện là các điểm nằm bên trong hai góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng y = 9x + 1 và y = x + 1 hợp với điểm A(0 ; 1).



D. LUYỆN TẬP

32.1 Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị hàm số : $y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$ luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1995)

32.2 Tìm các điểm cố định của họ đường cong :

$$y = -x^3 + (m - |m|)x^2 + 4x - 4(m - |m|)$$

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc, năm 1995)

32.3 Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1)$

a) Tìm điểm cố định của họ đồ thị hàm số.

b) Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1.

32.4 Cho họ đường cong (C_m) có phương trình :

$$y = (m+1)x^3 - 3(m+3)x^2 - (6m+1)x + m + 1$$

Chứng minh rằng (C_m) có ba điểm cố định thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng đi qua ba điểm cố định đó.

32.5 Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ có đồ thị (C_m). Trừ hai giá trị của m, chứng minh rằng (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

32.6 Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + 2mx + m^2$. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ mà chỉ có hai đồ thị của hàm số đi qua.

32.7 Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8$. Chứng minh rằng trên đường cong $y = x^2$ có hai điểm không thuộc đồ thị hàm số dù m lấy giá trị bất kì nào.

(Trích đề thi Đại học Pháp lí, năm 1990)

32.8 Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (m-2)x}{x - 1}$. Tìm tất cả các điểm mà đồ thị không thể đi qua dù m lấy bất kì giá trị nào.

32.9 Cho hàm số $y = \dfrac{(m-2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x - m}$. Tìm các điểm trên mặt phẳng toạ độ mà đồ thị không thể đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào.

§ 33. HỌ ĐỒ THỊ TIẾP XÚC VỚI MỘT ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Cho họ đồ thị $(C_m): y = f(x, m)$ với m là tham số. Tìm phương trình đường cố định (L) tiếp xúc với họ (C_m) với mọi m.

***Dạng 1.* Tiếp tuyến cố định với họ (C_m) tại điểm cố định**

– Giả sử họ (C_m) có điểm cố định $A(x_0 ; y_0)$

– Hệ số góc tiếp tuyến với (C_m) tại A (tức là $y'(x_0)$) không phụ thuộc vào m.

– Họ (C_m) có chung một tiếp tuyến có phương trình là :

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

***Dạng 2.* Cho biết dạng của đường cố định (L) : y = g(x)**

– Nếu (L) là đường thẳng thì y = ax + b, nếu (L) là parabol thì :

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0).$$

– Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (L) :

$$f(x, m) = g(x) \qquad (1)$$

– (C_m) tiếp xúc với (L), ∀m ⇔ (1) có nghiệm kép, ∀m.

Chú ý : Đưa $\Delta = 0$ về đa thức theo m rồi đồng nhất cho các hệ số bằng 0, từ đó tìm được a, b, c.

***Dạng 3.* Chưa biết dạng của đường cố định (L)**

– Phân tích $f(x, m) = [a(m)x + b(m)]^2 + g(x)$ trong đó g(x) không chứa m.

– Đường cố định (L) : y = g(x) là đường cần tìm vì phương trình hoành độ của (C_m) và (L) là :

$$[a(m)x + b(m)]^2 + g(x) = g(x) \Leftrightarrow [a(m)x + b(m)]^2 = 0$$

luôn có nghiệm kép với mọi m.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{-x+m}$. Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$ đồ thì hàm số luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1996)

Hướng dẫn giải

Trước hết ta tìm điểm cố định của họ đường cong.

Ta có : $y = \dfrac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{-x+m} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ y(-x+m) = 2x^2 + (1-m)x + 1 + m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-1)m - (2x^2 + x + 1 + xy) = 0 \\ x \neq m \end{cases}$$

Toạ độ điểm cố định của họ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x^2 + x + 1 + xy = 0 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(-1\,;\,2), \forall m \neq -1$.

Ta có : $$y' = \frac{-2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1}{(-x+m)^2}$$

Hệ số tiếp tuyến tại $A(-1\,;\,2)$ là :

$$y'(-1) = \frac{-2 - 4m - m^2 + 2m + 1}{(1+m)^2} = \frac{-(1+m)^2}{(1+m)^2} = -1$$

Phương trình tiếp tuyến tại $A(-1\,;\,2)$:

$$y - 2 = -1(x+1) \text{ hay } y = -x + 1$$

Vậy với mọi $m \neq -1$ đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = -x + 1$ tại điểm cố định $A(-1\,;\,2)$.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = \dfrac{4(m+1)x^2 - 4mx - (m^3 - m^2 + 2)}{2x - m}$ (C_m)

Chứng minh rằng tiệm cận xiên của (C_m) luôn luôn tiếp xúc với một parabol cố định khi m thay đổi.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Ta có : $y=\dfrac{2(m+1)x^2-2mx-\dfrac{m^3-m^2+2}{2}}{x-\dfrac{m}{2}}=2(m+1)x+m^2-m-\dfrac{1}{x-\dfrac{m}{2}}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-\dfrac{m}{2}}=0$ nên đồ thị có tiệm cận xiên $(D_m): y=2(m+1)x+m^2-m$

Cách 1 : Giả sử parabol cố định cần tìm có phương trình

$$(P): y=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

(P) tiếp xúc với (D_m) với mọi m khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D_m) có nghiệm kép với mọi m.

Ta có : $$ax^2+bx+c=2(m+1)x+m^2-m$$

$$\Leftrightarrow ax^2+(b-2m-2)x+c-m^2+m=0 \qquad (1)$$

(1) có nghiệm kép với mọi m khi và chỉ khi :

$$\Delta=(b-2m-2)^2-4a(c-m^2+m)=0,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow 4(1+a)m^2+4m(2-b-a)+(2-b)^2-4ac=0,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+a=0\\2-b-a=0\\(2-b)^2-4ac=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=3\\c=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Vậy parabol cần tìm là (P) : $y=-x^2+3x-\dfrac{1}{4}$.

Cách 2 : Ta biến đổi phương trình tiệm cận xiên như sau :

$$y=2(m+1)x+m^2-m=m^2+m(2x-1)+2x$$

$$=m^2+2m\frac{2x+1}{2}+\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2+2x-\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2$$

$$=\left(m+\frac{2x-1}{2}\right)^2-x^2+3x-\frac{1}{4}.$$

Xét (P) : $y = -x^2 + 3x - \frac{1}{4}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D_m) là : $\left(m + \frac{2x-1}{2}\right)^2 = 0$.

Phương trình này luôn có nghiệm kép $x = \frac{1-2m}{2}$ với mọi m. Vậy parabol cần tìm là (P) : $y = -x^2 + 3x - \frac{1}{4}$.

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m}$ $(m \neq 0)$ có đồ thị (C_m).

- Chứng minh rằng họ đường cong (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

Hướng dẫn giải

Giả sử đường thẳng (d) : y = ax + b

(d) tiếp xúc (C_m) với mọi $m \neq 0$ khi và chỉ khi phương trình :

$$\frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m} = ax + b \qquad (1)$$

có nghiệm kép $x \neq -m$ với mọi $m \neq 0$.

Ta có : $(1) \Leftrightarrow ax^2 + [(a-3)m + (b-1)]x + m^2 + (b-1)m = 0$ có nghiệm kép $x \neq -m$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = [(a-3)m + (b-1)]^2 - 4a[m^2 + (b-1)m] = 0, \ \forall m \neq 0 \\ a(-m)^2 + [(a-3)m + (b-1)](-m) + m^2 + (b-1)m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ (a^2 - 10a + 9)m^2 + 2[(a-3)(b-1) - 2a(b-1)]m + (b-1)^2 = 0 \end{cases}, \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 10a + 9 = 0 \\ (a-3)(b-1) - 2a(b-1) = 0 \\ (b-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 9 \\ b = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy với mọi $m \neq 0$ thì (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định là :

y = x + 1 và y = 9x + 1.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx + \frac{1-m^2}{4}$ có đồ thị (C_m). Chứng minh rằng (C_m) luôn luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y = -\frac{1}{4}(m^2 - 4mx + 4x^2) + x^3 - x^2 + \frac{1}{4}$

$$= -\frac{1}{4}(m - 2x)^2 + x^3 - x^2 + \frac{1}{4}$$

Xét đường cong cố định (L) có phương trình $y = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}$

Phương trình hoành độ giao điểm của (L) và (C_m) là :

$$-\frac{1}{4}(m-2x)^2 + x^3 - x^2 + \frac{1}{4} = x^3 - x^2 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow (m-2x)^2 = 0 \quad (1)$$

(1) luôn có nghiệm kép $x_0 = \frac{m}{2}$ với mọi m.

Vậy (C_m) luôn tiếp xúc với đường (L) cố định có phương trình là : $y = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}$.

C. LUYỆN TẬP

33.1 Cho hàm số $y = \frac{-m(x+1) + x + 2}{m(x+1) - 1}$ (C_m). Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$ (Cm) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

33.2 Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$ đồ thị hàm số luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

33.3 Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị hàm số :

$$y = \frac{x^2\cos\alpha + x + \sin^2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha}{x + \cos\alpha} \qquad (\alpha \neq k\pi, k \in Z)$$

luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

33.4 Cho hàm số $y = \dfrac{(m-2)x - m^2 + 2m - 4}{x - m}$. Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

33.5 Chứng minh rằng parabol $y = x^2 + (2m+1) + m^2 - 1$ luôn tiếp xúc với một đường cố định. Viết phương trình đường cố định đó.

§ 34. BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

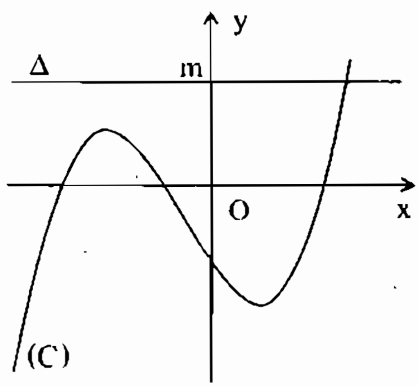
Giả sử cần biện luận số nghiệm của phương trình F(x, m) = 0 (1), trong đó đồ thị (C) hàm số y = f(x) đã vẽ hoặc đã có bảng biến thiên của hàm số này.

– Biến đổi F(x, m) = 0 ⇔ f(x) = g(x, m) trong đó y = g(x, m) là đường thẳng Δ.

– Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng Δ.

– Các dạng của Δ : g(x, m) thường gặp.

Dạng 1 : g(x, m) = m : Δ vuông góc với Oy tại điểm M(0 ; m).

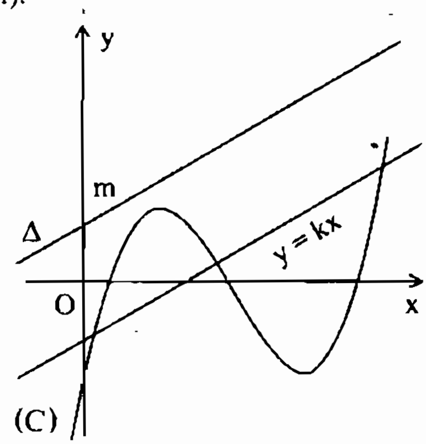


Dạng 2 : g(x, m) = h(m) : Δ là đường thẳng cùng phương Ox. Đặc biệt : h(m) = f(m).

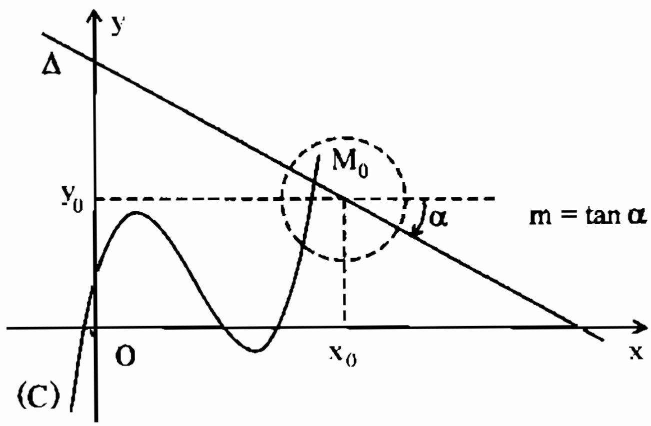
– Đặt M = f(m)

– Tuỳ theo M biện luận số nghiệm của phương trình f(x) = M sau đó dựa vào đồ thị (C) : y = f(x) để tìm m từ đẳng thức f(m) = M.

Dạng 3 : g(x, m) = kx + m : Δ cùng phương với đường thẳng y = kx và cắt Oy tại điểm M(0 ; m).



Dạng 4 : $g(x, m) = m(x - x_0) + y_0$: Δ quay quanh $M_0(x_0 ; y_0)$ và có hệ số góc m.



B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

2) Biện luận theo k số nghiệm của phương trình sau :

$$(x+1)^3 - k(x-1)^2 = 0 \quad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1997)

Hướng dẫn giải

1) Miền xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{3(x+1)^2 - 2(x-1)(x+1)^3}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

Dấu của y' cùng dấu với $(x-1)(x-5)$

$\lim\limits_{x \to 1} y = \infty$: Đồ thị có tiệm cận đứng $x = 1$.

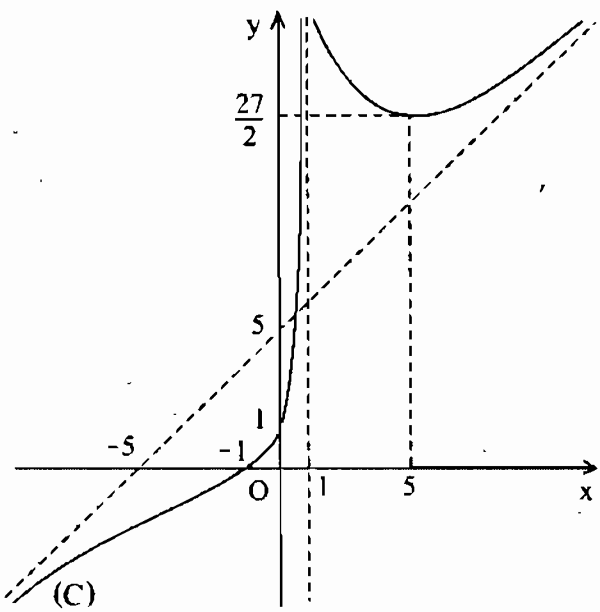
Ta có : $y = x + 5 + \dfrac{12x - 4}{(x-1)^2}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{12x-4}{(x-1)^2} = 0$: Đồ thị có tiệm cận xiên $y = x + 5$.

Điểm đặc biệt $(0 ; 1)$, $(-1 ; 0)$.

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		-1		1		5		$+\infty$
y'		+	0	+	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗		$+\infty$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{27}{2}$	↗	$+\infty$



2) $x = 1$ không là nghiệm của phương trình (1) nên :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = k$$

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ với đường thẳng y = k.

Dựa vào đồ thị ta có kết quả sau :

i) $k < \dfrac{27}{2}$: (1) có 1 nghiệm, ii) $k = \dfrac{27}{2}$: (1) có 2 nghiệm, iii) $k > \dfrac{27}{2}$: (1) có 3 nghiệm.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số. Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{|x - 1|}$ (vẽ hình riêng).

2) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình : $x^2 - (m+1)x + m + 1 = 0$ có nghiệm.

3) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình sau đây có ba nghiệm phân biệt nằm trong đoạn [–3 ; 0] : $(t^2 + 2t)^2 - (m+1)(t^2 + 2t) + m + 1 = 0$

(Trích đề thi Đại học Bách khoa, năm 1995)

Hướng dẫn giải

1) Miền xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

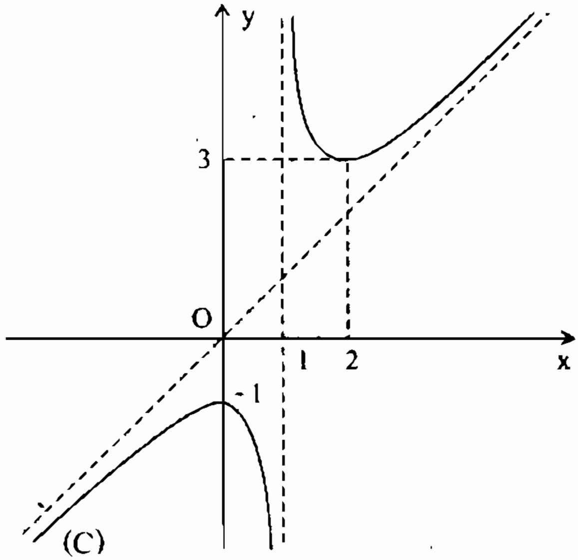
$$y = x + \frac{1}{x-1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Tiệm cận đứng : x = 1 ; Tiệm cận xiên : y = x.

Điểm đặc biệt (0 ; –1)

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	–	‖	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	–1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

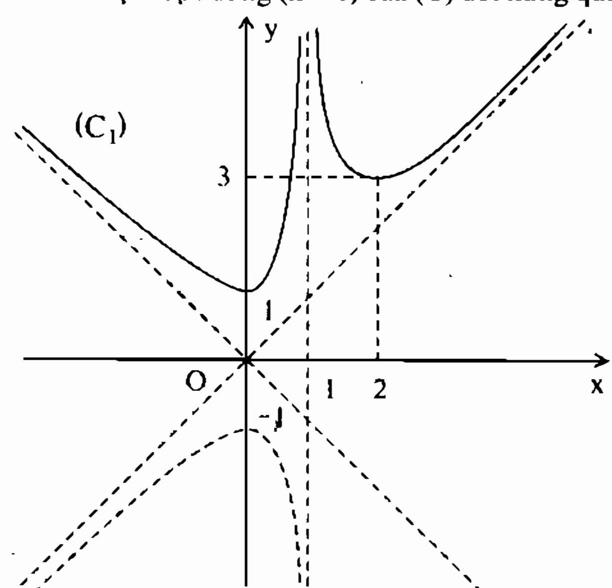


Suy ra đồ thị (C_1) hàm số :

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{|x - 1|} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} & \text{nếu } x > 1 \\ -\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$

Cách vẽ đồ thị (C_1) :

- Giữ nguyên đồ thị (C) ở bên phải tiệm cận đứng (x > 1).
- Lấy phần bên trái tiệm cận đứng (x < 1) của (C) đối xứng qua trục hoành.



2) Ta có : $x^2-(m+1)x+m+1=0 \Leftrightarrow x^2-x+1=m(x-1)$

$x = 1$ không là nghiệm của phương trình nên :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2-x+1}{x-1}=m.$$

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi : $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$

Chú ý : Câu này có thể giải bằng đại số.

3) Đặt $x=g(t)=t^2+2t$ với $t \in [-3\,;0]$

Ta tìm miền giá trị của x khi $t \in [-3\,;0]$

Ta có : $f'(t)=2t+2\,;\ g'(t)=0 \Leftrightarrow t=-1$

Bảng biến thiên :

t	-3		-1		0
g'(t)		-	0	+	
x = g(t)	3	↘	-1	↗	0

Với $-3t \le t \le 0$ ta có $-1 \le x \le 3$.

Nhận xét :

Với $-1 < x \le 0$ phương trình $x=t^2+2t$ có hai nghiệm phân biệt t.

Với $x=-1$ hay $0 < x \le 3$ phương trình $x=t^2+2t$ có một nghiệm.

Với $x=t^2+2t$ thì phương trình :

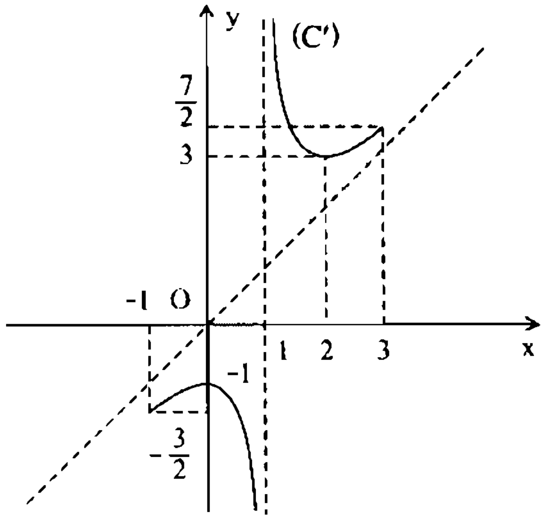
$\left(t^2+2t\right)^2-(m+1)\left(t^2+2t\right)+m+1=0$ (1), $t \in [-3\,;0]$ được viết

$x^2=(m+1)x+m+1=0,\ x \in [-1\,;3]$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+1}{x-1}=m$ (2), $x \in [-1\,;3]\backslash\{1\}$

Vẽ đồ thị (C') : $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$, với $x \in [-1\,;3]\backslash\{1\}$

Ta có : $f(-1) = -\frac{3}{2}$; $f(3) = \frac{7}{2}$



Bảng biện luận số nghiệm :

m	Số nghiệm của (2) trên [−1 ; 3]	Số nghiệm của (1) trên [−3 ; 0]
$+\infty$	1	1
$\frac{7}{2}$	2	2
	2	2
3	1	1
	0	0
-1	1	1
	2	3
$-\frac{3}{2}$	2	2
$-\infty$	1	1

Vậy (1) có 3 nghiệm phân biệt trong đoạn [−3 ; 0] khi và chỉ khi $-\frac{3}{2} < m < -1$.

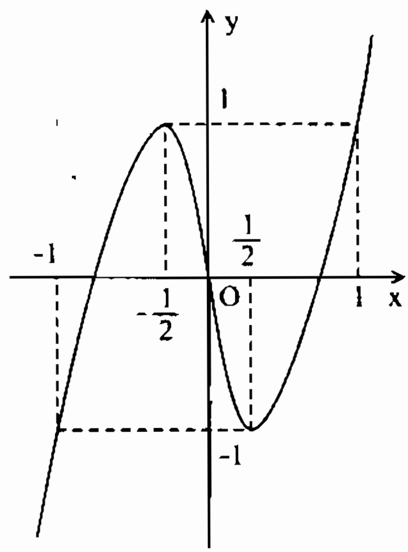
Ví dụ 3 : 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 3x$

2) Bằng đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình $4x^3 - 3x = 4m^3 - 3m$.

Hướng dẫn giải

1) Bạn đọc tự giải

Đồ thị :



2) Đặt $M = 4m^3 - 3m$

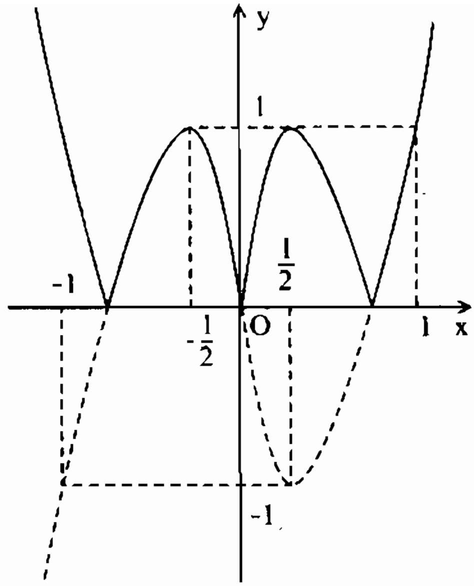
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 3x$ và đường thẳng y = M.

Dựa vào đồ thị ta có :

* $|M| > 1$: phương trình có 1 nghiệm.
* $|M| = 1$: phương trình có 2 nghiệm.
* $|M| < 1$: phương trình có 3 nghiệm.

Dựa vào đồ thị để suy ra kết quả theo m :

$M = 4m^3 - 3m$ là hoành độ giao điểm của $(C'): y|f(m)|$ và (d) : y = M trong hệ trục Oxy.



Dựa vào đồ thị ta có kết quả :

* $|M| > 1 \Leftrightarrow |4m^3 - 3m| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$: Phương trình có 1 nghiệm.

* $|M| = 1 \Leftrightarrow |4m^3 - 3m| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m = \pm\frac{1}{2} \end{array}\right.$: Phương trình có 2 nghiệm.

* $|M| < 1 \Leftrightarrow |4m^3 - 3m| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq \pm\frac{1}{2} \end{cases}$: Phương trình có 3 nghiệm.

Ví dụ 4 : a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (H)

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (H) biết rằng tiếp tuyến ấy song song với đường thẳng (d) : $2x + y - 1 = 0$.

c) Dùng đồ thị (H) biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$2x^2 - (m+1)x + 1 + m = 0 \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

a) Học sinh tự giải.

b) Hệ số góc của (d) là -2. Vì tiếp tuyến song song với d nên ta có :

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$, ta có tiếp tuyến : $y = -2x - 1$.

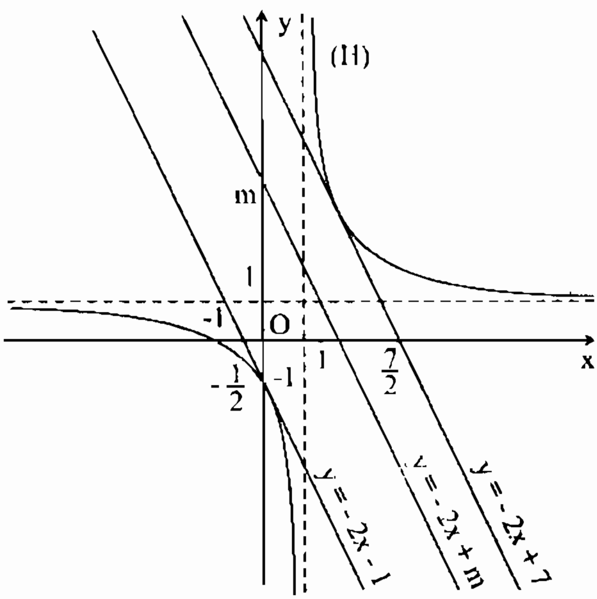
Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$, ta có tiếp tuyến : $y = -2x + 7$.

c) Ta có : $(1) \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = m(x - 1)$ (2)

$x = 1$ không là nghiệm của (2) nên :

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = m \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} + \frac{x + 1}{x - 1} = m \Leftrightarrow \frac{x + 1}{x - 1} = m - 2x$$

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của (H) với đường thẳng $\Delta : y = -2x + m$; Δ song song với hai tiếp tuyến trong câu b).



Dựa vào đồ thị ta có kết quả sau :

m	Số nghiệm của phương trình
$+\infty$	2
7	1
	0
-1	1
$-\infty$	2

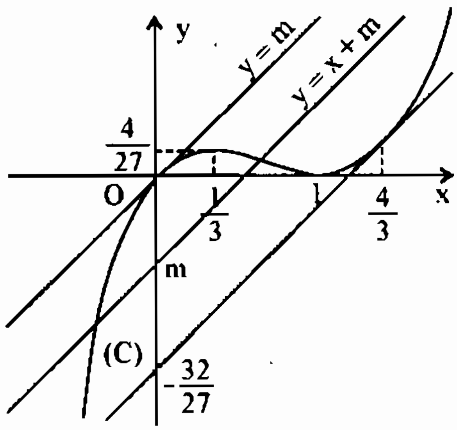
Ví dụ 5 : a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số :

$$y = x^3 - 2x^2 + x$$

b) Dùng đồ thị (C) để biện luận số nghiệm và xét dấu nghiệm của phương trình : $x^3 - 2x^2 - m = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Bạn đọc tự giải, đồ thị như sau :



b) Ta có : $x^3 - 2x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x = x + m$ (1)

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của (C) với đường thẳng y = x + m song song với đường thẳng y = x có tung độ gốc m.

Để biện luận số giao điểm ta cần tìm m để y = x + m tiếp xúc với (C).

(C) tiếp xúc với đường thẳng y = x + m khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm : $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + x = x + m & (2) \\ 3x^2 - 4x + 1 = 1 & (3) \end{cases}$

Ta có : $(3) \Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

Với x = 0, từ (2) ta có m = 0. Với $x = \dfrac{4}{3}$, từ (2) ta có $m = -\dfrac{32}{27}$

Dựa vào đồ thị ta có kết quả sau :

m	Số nghiệm của (1)	Dấu các nghiệm số
$+\infty$	1	1 nghiệm dương
0	2	1 nghiệm dương và 1 nghiệm kép $x = 0$
	3	2 nghiệm dương và 1 nghiệm âm
$-\frac{32}{27}$	2	1 nghiệm âm và 1 nghiệm kép $x = \frac{4}{3} > 0$
$-\infty$	1	1 nghiệm âm

Ví dụ 6 : a) Vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$

b) Tìm điểm cố định mà họ đường thẳng $d_m : mx - y + 3 - 4m = 0$ luôn đi qua với mọi m.

c) Dùng đồ thị biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{9 - x^2} - mx + 4m - 3 = 0 \qquad (1)$$

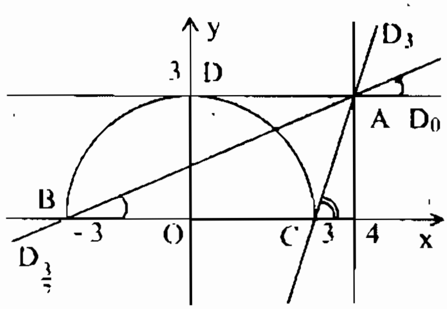
Hướng dẫn giải

a) Ta có : $\sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 9 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

Vậy (C) là nửa đường tròn tâm O bán kính R = 3 ở phía trên trục hoành.

b) d_m có phương trình là : $(x - 4)m + 3 - y = 0$ luôn đi qua điểm A(4 ; 3) với mọi m.

Nhận xét : Họ đường thẳng $y = mx + 3 - 4m$ có hệ số góc là m. Gọi B(–3 ; 0), C(3 ; 0), D(0 ; 3). Đường thẳng AB có phương trình $y = \frac{3}{7}x + \frac{9}{7}$ có hệ số góc $m = \frac{3}{7}$. Đường thẳng AC có phương trình $y = 3x - 9$ có hệ số góc $m = 3$. Đường thẳng AD có phương trình $y = 3$ có hệ số góc $m = 0$.



Dựa vào đồ thị ta có kết quả :

Do $(1) \Leftrightarrow y = \sqrt{9 - x^2} = mx + 3 - 4m$

m	Số nghiệm của phương trình (1)
$+\infty$	0
3	1 nghiệm $x = 3$
	1
$\frac{3}{7}$	2
	2
0	1 nghiệm kép $x = 0$
$-\infty$	0

Ví dụ 7 : a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x + 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

b) Bằng đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình sau theo m :

$$x + 1 + \frac{1}{x - 1} = mx - m + 2$$

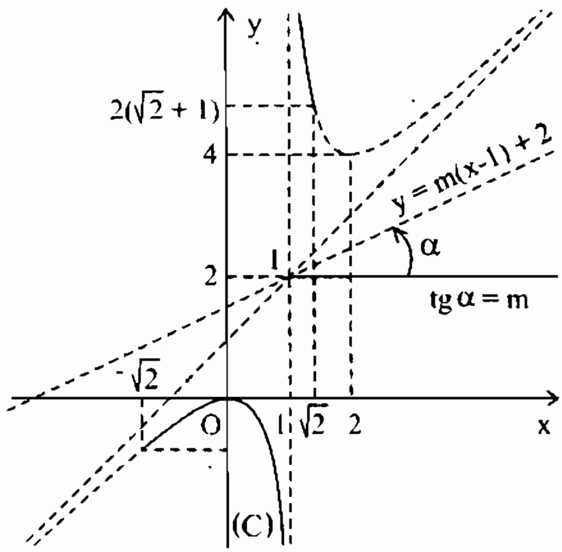
c) Xác định m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sin x + \cos x + \frac{1}{2}\left(\tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = m - 1$$

Hướng dẫn giải

a) Bạn đọc tự giải.

b) Đường thẳng d: $y = m(x - 1) + 2$ qua điểm $I(1 ; 2)$ cố định và có hệ số góc $m = \tan\alpha$ (α là góc giữa chiều dương trục Ox và d, $-90^0 < \alpha < 90^0$). Cho d quay quanh I và dựa vào đồ thị ta có kết quả :



* $\alpha \in \left(-90^0 ; 45^0\right] \Leftrightarrow \tan\alpha = m \le 1$: Phương trình vô nghiệm.

* $\alpha \in \left(45^0 ; 90^0\right] \Leftrightarrow \tan\alpha = m > 1$: Phương trình có hai nghiệm.

c) Đặt $t = \sin x + \cos x$; $|t| \le \sqrt{2}$

$$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{2}\left(t^2 - 1\right)$$

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \sin x + \cos x + \dfrac{\sin x + \cos x + 1}{2\sin x\cos x} = m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \ne |t| \le \sqrt{2} \\ t + \dfrac{1}{t-1} = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \ne |t| \le \sqrt{2} \\ t + 1 + \dfrac{1}{t-1} = m \quad (2) \end{cases}$$

Ta có : $f\left(\sqrt{2}\right) = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

Dựa vào đồ thị (2) có nghiệm $t \in \left[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\right] \setminus \{-1 ; 1\}$ khi : $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 2\left(\sqrt{2}+1\right) \end{array}\right.$

C. LUYỆN TẬP

34.1 Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (6m-5)x - 3 \qquad (1)$

a) Chứng minh rằng đường cong (1) luôn đi qua hai điểm cố định với mọi m.

b) Xác định m để đường cong (1) tiếp xúc với trục Ox.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 2.

d) Biện luận theo a số nghiệm của phương trình : $\left(\frac{1}{3}|x|-1\right)(|x|-1)^2 = a$.

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc, năm 1997)

34.2 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+2mx-m}{x+m}$ (1)

a) Xác định m để hàm số (1) với m = 1.

b) Vẽ đồ thị của hàm số (1) với m = 1.

c) Dựa vào đồ thị của hàm số ở câu b), vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}$ và từ đồ thị của hàm số này, biện luận số nghiệm của phương trình : $\dfrac{x^2+2|x|-1}{|x|+1} = a$ theo các giá trị của tham số a.

(Trích đề thi Đại học Công đoàn, năm 1999)

34.3 Cho hàm số $y = 2x + \dfrac{1}{|x-1|}$

a) Vẽ đồ thị (C) hàm số.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $2x|x-1| - m|x-1| + 1 = 0$

c) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$2\cos x|\cos x - 1| - m|\cos x - 1| + 1 = 0$$

34.4 a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = (x+1)^2(2-x)$

b) Dựa vào đồ thị biện luận theo m số nghiệm của phương trình $(x+1)^2(2-x) = (m+1)^2(2-m)$.

34.5 Xác định m để phương trình $x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

34.6 Cho hàm số $y = \dfrac{-x+3}{2x-1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Lập phương trình tiếp tuyến với (C) và song song với đường thẳng y + x = 0.

c) Dùng đồ thị (C) biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$2x^2 - 2mx - 2x + m + 3 = 0.$$

34.7 Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

Dùng đồ thị, giải thích tại sao phương trình $\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = m(x + 1)$ với tham số m > 1 có hai nghiệm phân biệt và tổng của chúng là một số không đổi.

b) Chứng minh với hai tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(1 ; 0) và vuông góc với nhau.

(Trích đề thi Đại học Dược Hà Nội, năm 1999)

34.8 a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = \frac{x^2 - |x| + 2}{|x| - 1}$

b) Biện luận theo a số nghiệm x < 0 của phương trình :

$$\frac{x^2 - |x| + 2}{|x| - 1} = ax - a + 1.$$

34.9 Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(-1 ; -2).

c) Tìm tất cả giá trị của tham số a để phương trình $x^3 - 3x^2 - a = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, Khối D, năm 1998)

§ 35. TẬP HỢP ĐIỂM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cho đường cong (C) có phương trình f(x, y) = 0.

Nếu điểm M(x ; y) di động khắp trên (C) ta nói tập hợp các điểm M là đường cong (C) hay quỹ tích các điểm M là đường cong (C).

2. Tìm tập hợp điểm M (hay quỹ tích điểm M) trong mặt phẳng toạ độ tương đương với việc tìm phương trình của quỹ tích đó.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Biểu thị được toạ độ điểm M theo tham số :

– Tìm toạ độ điểm M theo tham số m, giả sử : $M\begin{cases} x = g(m) \\ y = h(m) \end{cases}$

– Khử tham số m ta được hệ thức độc lập giữa x và y đối với m : f(x, y) = 0.

– Từ điều kiện tồn tại điểm M (thường được biểu diễn bằng điều kiện của m) ta tìm giới hạn cho đường cong f(x, y) = 0.

– Kết luận tập hợp các điểm M là một phần của đường có phương trình f(x, y) = 0 thoả một điều kiện.

Đặc biệt :

i) Nếu toạ độ của M là : $\begin{cases} x = C \quad (\text{hằng số}) & (1) \\ y = h(m) & (2) \end{cases}$

thì M thuộc đường thẳng x = C và từ (2) giới hạn để tìm tập hợp điểm M.

ii) Nếu toạ độ của M là : $\begin{cases} x = g(m) & (3) \\ y = C \quad (\text{hằng số}) \end{cases}$

thì M thuộc đường thẳng y = C và từ (3) giới hạn để tìm tập hợp điểm M.

iii) Tập hợp trung điểm dây cung M_1M_2 tạo bởi (C) : y =f(x) và (d) : y = ax + b có hoành độ x_1, x_2 của M_1M_2 là nghiệm của phương trình f(x) = ax + b.

M là trung điểm M_1M_2 thì $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = ax_M + b \end{cases}$

2. Không biểu thị được toạ độ điểm M theo tham số :

– Gọi $M(x_0 ; y_0)$ là điểm thuộc tập hợp cần tìm.

– Từ yêu cầu bài toán tìm hệ thức liên hệ giữa x_0, y_0 : $f(x_0 ; y_0) = 0$.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = \dfrac{-2x - 4}{x + 1}$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

2) Biện luận theo m số giao điểm của đồ thị trên với đường thẳng $2x - y + m = 0$. Trong trường hợp có hai điểm M, N hãy tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN.

(Trích đề thi Đại học Thương mại, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Bạn đọc tự giải.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị đường thẳng (d) : y = 2x + m là :

$$\frac{-2x-4}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + (m+4)x + m + 4 = 0 \quad (1) \qquad (x \neq -1)$$

$\Delta = (m+4)^2 - 8(m+4) = m^2 - 16$

i) $\Delta < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$: Không có giao điểm.

ii) $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$: Có 1 giao điểm.

iii) $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < -4$ hoặc $m > 4$: có 2 giao điểm.

Trong trường hợp $m < -4$ hoặc $m > 4$, giao điểm M, N của đồ thị với đường thẳng (d) có hoành độ x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Toạ độ trung điểm I của MN là :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{m+4}{4} \\ y_I = 2x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4x_I - 4 \\ y_I = 2x_I - 4x_I - 4 = -2x_I - 4 \end{cases}$$

Vậy I thuộc đường thẳng $y = -2x - 4$.

Với $m < -4$ hoặc $m > 4$ ta có : $\left[\begin{array}{l} -4x_I - 4 < -4 \\ -4x_I - 4 > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_I > 0 \\ x_I < -2 \end{array}\right.$

Vậy tập hợp điểm I là : $\begin{cases} y = -2x - 4 \\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 0 \end{array}\right. \end{cases}$

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - mx + 2m - 2}{x - 1}$ có đồ thị (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu. Chứng minh rằng các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị (C_m) luôn luôn nằm trên một parabol cố định khi m thay đổi.

(Trích đề thi Đại học Thủy sản, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Bạn đọc tự giải.

2) Miền xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Ta có : $y' = \dfrac{x^2 - 2x - m + 2}{(x-1)^2}$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 2x - m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1, nghĩa là ta phải có :

$$\begin{cases} \Delta' = 1 - (-m+2) > 0 \\ 1^2 - 2.1 - m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Giả sử x_1, x_2 là hoành độ các điểm cực trị của (C_m). Khi đó tung độ tương ứng là : $y_1 = 2x_1 - m$; $y_2 = 2x_2 - m$.

Với điểm cực trị $M_1(x_1 ; y_1)$, ta có : $\begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{m-1} & (1) \\ y_1 = 2x_1 - m & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có : $\sqrt{m-1} = 1 - x_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 1 \\ m = (1-x_1)^2 + 1 \end{cases}$

Thay $m = (1-x_1)^2 + 1$ vào (2) ta được :

$$y_1 = 2x_1 - (1-x_1)^2 - 1 \Leftrightarrow y_1 = -x_1^2 + 4x_1 - 2$$

Vậy điểm cực trị $M_1(x_1 ; y_1)$ thuộc parabol có phương trình :

$$y = -x^2 + 4x - 2 \qquad (x < 1)$$

Tương tự, điểm cực trị $M_2(x_2 ; y_2)$ thuộc parabol :

$$y = x^2 + 4x - 2 \quad (x > 1)$$

Vậy các điểm cực đại và cực tiểu của (C_m) luôn nằm trên một parabol cố định khi m thay đổi.

Ví dụ 3 : Cho hàm số : $y = -x^3 + (m - |m|)x^2 + 4x - 4(m - |m|)$ (1) (C_m)

1) Tìm các điểm cố định của họ (C_m).

2) Tìm m để (C_m) tiếp xúc với trục hoành.

3) Tìm quỹ tích điểm uốn I_m của (C_m) khi m thay đổi.

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc, năm 1995)

Hướng dẫn giải

1) Ta có : $(1) \Leftrightarrow (m-|m|)(x^2-4)+(-x^3+4x-y)=0$

Điểm cố định của (C_m) có toạ độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2-4=0 \\ -x^3+4x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy (C_m) qua hai điểm cố định A(2 ; 0), B(–2 ; 0).

2) Ta có : $(1) \Leftrightarrow y=(m-|m|)(x^2-4)-x(x^2-4)$

$$\Leftrightarrow y=(x^2-4)(m-|m|-x)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox là :

$$(x^2-4)(x-m+|m|)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \\ x=m-|m| \qquad (\leq 0) \end{cases}$$

(C_m) tiếp xúc với Ox $\Leftrightarrow m-|m|=-2 \Leftrightarrow m=-1$.

3) Ta có : $y'=-3x^2+2(m-|m|)x+4$

$y''=-6x+2(m-|m|) \Rightarrow y''=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}(m-|m|)$ (hoành độ điểm uốn)

Thay $m-|m|=3x$ vào (1) ta được :

$$y=-x^3+3x^3+4x-12x \Leftrightarrow y=2x^3-8x$$

Do $3x=m-|m|\leq 0$ nên $x\leq 0$

Vậy quỹ tích điểm uốn I_m là phần đồ thị hàm số $y=2x^3-8x$ với $x\leq 0$.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(m-2)x}{x-1}$

Tìm quỹ tích các điểm cực đại và quỹ tích các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Hướng dẫn giải

Miền xác định $D=\mathbf{R}\setminus\{1\}$

$$y'=\frac{2x^2-4x-m+2}{(x-1)^2}$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $2x^2 - 4x - m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta' = 4 - 2(2 - m) > 0 \\ 2.1^2 - 4.1 - m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Vậy với m > 0 thì hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu.

Khi đó : $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2m}}{2}$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{2m}}{2}$		1		$\frac{2+\sqrt{2m}}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$

Hoành độ điểm cực đại : $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{2m}}{2} < 1$ (vì m > 0)

$\Leftrightarrow m = 2(1 - x_1)2 = 2x_1^2 - 4x_1 + 2$ (1)

Tung độ điểm cực đại : $y_1 = 4x_1 + m - 2$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được : $y_1 = 2x_1^2$, với $x_1 < 0$.

Vậy quỹ tích điểm cực đại là một phần của parabol $y = 2x^2$ với x <1.

Tương tự quỹ tích điểm cực tiểu là một phần parabol $y = 2x^2$ với x > 1.

Ví dụ 5 : 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

2) Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ để từ điểm đó có thể kẻ đến đồ thị (C) hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

(Trích đề thi Đại học Y Dược Tp. HCM, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Bạn đọc tự giải.

2) Giả sử $M(x_0 ; y_0)$ là điểm thuộc tập hợp cần tìm.

Đường thẳng d qua M với hệ số góc m có phương trình $y = m(x - x_0) + y_0$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d với (C) là :

$$\frac{x^2+1}{x} = m(x - x_0) + y_0 \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (m-1)x_0^2 + (y_0 - mx_0)x - 1 = 0 \qquad (1)$$

(Vì x = 0 không là nghiệm của (1)).

d tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta = (y_0 - mx_0)^2 + 4(m-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ x_0^2 m^2 + 2(2 - x_0 y_0)m + y_0^2 - 4 = 0 \qquad (2) \end{cases}$$

Để từ M có thể kẻ đến đồ thị hai tiếp tuyến vuông góc nhau thì (2) phải có hai nghiệm m_1, m_2 khác 1 và tích $m_1 m_2 = -1$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} x_0 \neq 0 \\ \dfrac{y_0 - 4}{x_0^2} = -1 \\ x_0^2 + 2(2 - x_0 y_0) + y_0^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 4 \\ (x_0 - y_0)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 4 \\ x_0 \neq 0 \\ x_0 \neq y_0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường tròn tâm O bán kính R = 2 bỏ đi bốn điểm $M_1(0\,;2)$, $M_2(0\,;-2)$, $M_3(\sqrt{2}\,;\sqrt{2})$ và $M_4(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{2})$.

Ví dụ 6 : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + m}{x^2 + 1}$

a) Chứng minh rằng hàm số luôn có hai cực trị.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.

c) Tìm quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị.

Hướng dẫn giải

a) D = **R**.

$$y' = \frac{-x^2 + 2(1-m)x + 1}{(x^2+1)^2}.$$

Tam thức $f(x) = -x^2 + 2(1-m)x + 1$ có biệt thức :

$$\Delta' = (1-m)^2 + 1 > 0,\ \forall m$$

suy ra y' = 0 luôn có hai nghiệm phân biệt, do đó hàm số luôn có hai cực trị.

b) Toạ độ hai điểm cực trị M, N của đồ thị thoả :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+x+m}{x^2+1} \\ y = \dfrac{2x+1}{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = x^2 + x + m & (1) \\ 2xy = 2x + 1 & (2) \end{cases}$$

Nhân (2) cho $\dfrac{x}{2}$ rồi trừ cho (1) ta được : $y = \dfrac{x}{2} + m$ nên phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = \dfrac{x}{2} + m$.

c) Hoành độ x_M, x_N của M, N là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 2(1-m)x - 1 = 0$$

nên : $$x_M + x_N = 2(1-m)$$

Toạ độ trung điểm I của MN là : $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = 1 - m \\ y_I = \dfrac{x_I}{2} + m \end{cases}$

Từ đó suy ra : $x_I + y_I = \dfrac{x_I}{2} + 1$ hay $y_I = -\dfrac{x_I}{2} + 1$

Vậy quỹ tích điểm I là đường thẳng $y = -\dfrac{x}{2} + 1$

D. LUYỆN TẬP

35.1 Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (4\ 1)x - 3}{x+a}$ (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1) với a = 2.

b) Xác định a để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 5$.

c) Tìm quỹ tích giao điểm của hai đường tiệm cận đứng và xiên của đồ thị hàm số (1) khi a thay đổi.

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1999)

35.2 Cho hàm số $y = (4 - x)(x - 1)^2$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và đồ thị (C) hàm số.

b) Gọi A là giao điểm của đồ thị (C) và trục Oy, d là đường thẳng đi qua A có hệ số góc là k, xác định k để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C.

c) Tìm tập hợp trung điểm I của BC khi k thay đổi.

(Trích đề thi Đại học Ngoại ngữ, năm 1997)

35.3 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thì (C) hàm số.

b) Xác định k để đường thẳng y = kx + 1 cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm quỹ tích trung điểm I của AB khi k thay đổi.

(Trích đề thi Đại học Thương mại, năm 1997)

35.4 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Chứng tỏ rằng (C) có một tâm đối xứng.

b) Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy để từ đó ta có thể vẽ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1998)

35.5 Gọi (C_α) là đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2 - 1)\cos\alpha + x\cos\alpha}{x - \cos\alpha}$ trong đó α là tham số với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

a) Tìm giá trị của α để (C_α) suy biến thành đường thẳng. Tìm tất cả những điểm cố định của họ đường cong (C_α).

b) Với giá trị nào của α thì hàm số đạt cực đại và cực tiểu trên [0 ; 2]. Cho α thoả điều kiện này. Tìm quỹ tích của điểm cực tiểu và điểm cực đại. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị này lớn nhất là bao nhiêu ?

c) Tìm những giá trị của α để từ A(0 ; 2) có thể kẻ được hai tiếp tuyến với (C_α). Gọi θ là góc nhọn tạo bởi hai tiếp tuyến này. Tính tgθ theo α. Tính α để hai tiếp tuyến đó vuông góc.

§ 36. TÌM CÁC ĐIỂM ĐỐI XỨNG NHAU TRÊN ĐỒ THỊ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Cho đồ thị (C) : y = f(x). Tìm hai điểm M, N thuộc (C) sao cho M, N đối xứng nhau qua điểm A hoặc qua đường thẳng d cho trước.

– Giả sử $M(x_0 ; y_0) \in (C)$ ta có :

$$y_0 = f(x_0) \qquad (1)$$

– Tìm toạ độ điểm N theo x_0, y_0 sao cho N là điểm đối xứng của M qua A (hoặc qua d). Vì $N(x_N ; y_N) \in (C)$ nên :

$$y_N = f(x_N) \qquad (2)$$

– Từ (1) và (2) ta tìm được toạ độ điểm M, N.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 9x + 4$. Xác định m để trên đồ thị của hàm số có một cặp điểm đối xứng nhau qua gốc toạ độ.

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Giả sử $M(x_0 ; y_0)$ và $N(-x_0 ; -y_0)$ là cặp điểm đối xứng nhau qua O nằm trên đồ thị hàm số, ta có hệ :

$$\begin{cases} y_0 = x_0^3 + mx_0^2 + 9x_0 + 4 & (1) \\ -y_0 = -x_0^3 + mx_0^2 - 9x_0 + 4 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) cộng (2) vế với vế ta có : $mx_0^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow mx_0^2 = -4 \qquad (3)$

(3) có nghiệm khi và chỉ khi m < 0. Khi đó : $x_0 = \sqrt{-\frac{4}{m}}$

Thay vào (1) ta tìm được y_0. Vậy giá trị cần tìm là m < 0.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các cặp điểm $I\left(0 ; \frac{5}{2}\right)$.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Giả sử $M_1(x_1 ; y_1)$ và $M_2(x_2 ; y_2)$ thuộc (C) và I là trung điểm của đoạn M_1, M_2.

Ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_1 = 0 \\ y_1 + y_2 = 2y_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ y_2 = 5 - y_1 \end{cases} \Rightarrow M_2(-x_1 ; 5 - y_1)$.

$M_1, M_2 \in (C)$ nên ta có hệ : $\begin{cases} y_1 = \dfrac{x_1^2 + x_1 + 2}{x_1 - 1} & (1) \\ 5 - y_1 = \dfrac{x_1^2 - x_1 + 2}{-x_1 - 1} & (2) \end{cases}$

Lấy (1) cộng (2) vế với vế ta được : $5 = \frac{x_1^2 + x_1 + 2}{x_1 - 1} - \frac{x_1^2 - x_1 + 2}{x_1 + 1}$

$$\Leftrightarrow 5(x_1^2 - 1) = (x_1 + 1)(x_1^2 + x_1 + 2) - (x_1 - 1)(x_1^2 - x_1 + 2)$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = 9 \Leftrightarrow x_1 = \pm 3$$

* Với $x_1 = 3$ ta có $y_1 = 7$ khi đó ta được các điểm $M_1(3 ; 7), M_2(-3 ; -2)$.

* Với $x_1 = -3$ ta có $y_1 = -2$ khi đó $M_1(-3 ; -2), M_2(3 ; 7)$.

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = \frac{x^2}{x - 1}$ có đồ thị (C). Tìm hai điểm A, B nằm trên (C) và đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x - 1$.

(Trích đề thi Đại học Hàng hải, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Cách 1 : Giả sử $A(x_1 ; y_1) \in (C)$, ta tìm B đối xứng với A qua đường thẳng (d) : y = x – 1. Đường thẳng Δ qua A vuông góc với (d) có phương trình là : $x + y = x_1 + y_1$.

Toạ độ giao điểm H của (d) và Δ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = x_1 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + y_1 + 1}{2} \\ y = \dfrac{x_1 + y_1 - 1}{2} \end{cases}$$

Vậy $H\left(\dfrac{x_1 + y_1 + 1}{2} ; \dfrac{x_1 + y_1 - 1}{2}\right)$.

Vì H là trung điểm của AB nên toạ độ của B là : $B(y_1 + 1 ; x_1 - 1)$.

A, B $\in$ (C) nên : $\begin{cases} y_1 = \dfrac{x_1^2}{x_1 - 1} \\ x_1 - 1 = \dfrac{(y_1 + 1)^2}{y_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x_1 - 1) = x_1^2 \\ y_1(x_1 - 1) = (y_1 + 1)^2 \end{cases}$ (*)

$$\Rightarrow x_1^2 = (y_1 + 1)^2 \Rightarrow y_1 + 1 = -x_1 (\text{vì } B \neq A) \Rightarrow y_1 = -x_1 - 1.$$

Thay vào (*) ta được : $-(x_1^2 - 1) = x_1^2 \Leftrightarrow x_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy hai điểm cần tìm là : $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; \dfrac{-(2 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right)$; $B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; \dfrac{-(2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right)$.

Cách 2 : Gọi $\Delta : y = -x + m$ là đường thẳng vuông góc với $d : y = x - 1$.

Ta tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho trung điểm H của AB nằm trên đường thăng d.

$\dfrac{x^2}{x - 1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 = (x - 1)(-x + m)$ (vì $x = 1$ không là nghiệm).

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (m + 1)x + m = 0 \quad (1)$$

(1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 6m > 0$.

Giao điểm A, B của Δ với (C) có hoành độ x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Toạ độ trung điểm H cua AB : $\begin{cases} x_H = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{m + 1}{4} \\ y_H = -x_H + m = -\dfrac{m + 1}{4} + m = \dfrac{3m - 1}{4} \end{cases}$

Vậy $H\left(\dfrac{m + 1}{4} ; \dfrac{3m - 1}{4}\right)$; $H \in d$ nên : $\dfrac{3m - 1}{4} = \dfrac{m + 1}{4} - 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Với m = –1 thì (1) có hai nghiệm $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ta có hai điểm cần tìm : $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right)$; $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right)$

Cách 3 : Đường thẳng AB cắt (d) : y = x – 1 tại trung điểm H của đoạn AB. Ta tìm H(h ; h – 1) ∈ (d) sao cho đường thẳng Δ vuông góc với (d) tại H cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho $\frac{x_A + x_B}{2} = x_H$.

Δ qua H và vuông góc với (d) có phương trình :

$$1.(x - h) + 1.(y - h + 1) = 0 \Leftrightarrow y = -x + 2h - 1$$

Phương trình hoành độ giao điểm cua Δ với (C) là :

$$\frac{x^2}{x-1} = -x + 2h - 1 \Leftrightarrow x^2 = (x-1)(-x+2h-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2hx + 2h - 1 = 0 \qquad (2)$$

Ta có : $\frac{x_A + x_B}{2} = x_H \Leftrightarrow \frac{h}{2} = h \Leftrightarrow h = 0$.

Với h = 0 phương trình (2) có hai nghiệm $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Hai điểm cần tìm là : $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right)$; $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

C. LUYỆN TẬP

36.1 Với giá trị nào của m thì trên đồ thị hàm số : $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ có một cặp điểm đối xứng nhau qua gốc toạ độ.

(Trích đề thi Đại học Tài chính Kế toán, năm 1997)

36.2 Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$ có đồ thị (C_m) với m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_m) khi m = 2.

b) Tìm điều kiện của m để đồ thị (C_m) chứa hai điểm phân biệt, đối xứng nhau qua gốc toạ độ.

(Trích đề thi Đại học Thuỷ lợi, năm 1999)

36.3 . Tìm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2}$ hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

(Trích đề thi Đại học Tài chính, năm 1995)

36.4 Tìm phương trình đường cong đối xứng với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2}$ qua đường thẳng $y = 2$.

(Trích đề thi Học viện Kĩ thuật quân sự, năm 1999)

§ 37. KHOẢNG CÁCH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ là

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2. Khoảng cách từ điểm $M(x_0 ; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ là :

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

3. Trường hợp đặc biệt :

$$\Delta : x = a \Rightarrow d(M,\Delta) = |x_0 - a|$$

$$\Delta : y = b \Rightarrow d(M,\Delta) = |y_0 - b|$$

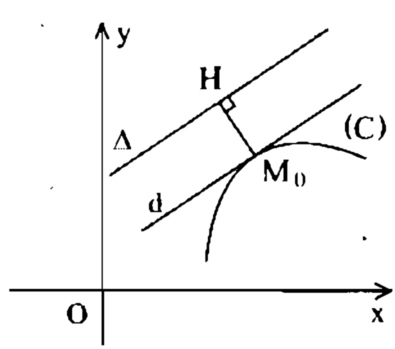
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. **Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và đường cong (C) :**

$$d(\Delta, (C)) = \min_{\substack{M \in (C) \\ N \in \Delta}} MN$$

2. **Để tính khoảng cách giữa Δ và (C) ta làm như sau :**

– Lập phương trình tiếp tuyến d của (C) và song song với Δ.



– Tìm tiếp điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ giữa d và (C).

– $d(\Delta, (C)) = d(M_0, \Delta)$.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 1$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $(\Delta) : y = 2x - 1$.

a) Chứng minh đường thẳng Δ không cắt (C).

b) Tìm trên đồ thị (C) điểm A có khoảng cách đến (Δ) là nhỏ nhất.

(Trích đề thi Đại học Mỏ - Địa chất, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (Δ) là :

$2x^4 - 3x^2 + 2x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^2 + 2 = 0$: Vô nghiệm.

Vậy (Δ) không cắt (C).

b) Giả sử $A(x_0\ ;\ y_0) \in (C)$, ta có : $y_0 = 2x_0^4 - 3x_0^2 + 2x_0 + 1$.

Khoảng cách từ A đến (Δ) là :

$$d(A, \Delta) = \frac{\left|2x_0^4 - 3x_0^2 + 2x_0 + 1 - 2x_0 + 1\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|2x_0^4 - 3x_0^2 + 2\right|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2x_0^4 - 3x_0^2 + 2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(x_0^4 - 2.x_0^2.\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(x_0^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right] \geq \frac{7}{8\sqrt{5}}$$

Suy ra : $\min d = \frac{7}{8\sqrt{5}}$ khi $x_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy có hai điểm cần tìm : $A_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{1}{8} - \sqrt{3}\right)$; $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{1}{8} + \sqrt{3}\right)$

Ví dụ 2 : a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

b) Tìm điểm A, B thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị để khoảng cách giữa chúng là nhỏ nhất.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) Bạn đọc tự giải.

b) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \dfrac{1}{x - 1}$

Giả sử $A\left(1 + \alpha ; 1 + \alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)$ với $\alpha > 0$ là điểm thuộc nhánh bên phải tiệm cận đứng và $B\left(1 - \beta ; 1 - \beta - \dfrac{1}{\beta}\right)$ với $\beta > 0$ là điểm thuộc nhánh bên trái tiệm cận của đồ thị. Ta có :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (yx_B - yx_A)^2 = (\alpha + \beta)^2 + \left(\alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta)^2\left(1 + \frac{1}{\alpha\beta}\right)^2 = (\alpha + \beta)^2\left[1 + \left(1 + \frac{1}{\alpha\beta}\right)^2\right]$$

$$= (\alpha + \beta)^2\left[2 + \frac{2}{\alpha\beta} + \frac{1}{(\alpha\beta)^2}\right] \geq 4\alpha\beta\left[2 + \frac{2}{\alpha\beta} + \frac{2}{(\alpha\beta)^2}\right] \text{ (BĐT Côsi).}$$

Suy ra : $AB^2 \geq 8\alpha\beta + 8 + \dfrac{4}{\alpha\beta} \geq 8 + 2\sqrt{8.4}$ (BĐT Côsi).

Do đó : $AB \geq \sqrt{8 + 8\sqrt{2}}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} \alpha = \beta > 0 \\ 8\alpha\beta = \dfrac{4}{\alpha\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Vậy hai điểm cần tìm trên đồ thị :

$$A\left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} ; 1 + \sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) ; B\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} ; 1 - \sqrt[4]{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

Ví dụ 3 : a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = \dfrac{x + 2}{x - 3}$ (C)

b) Tìm trên đồ thị của hàm số điểm M sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang.

(Học viện Quan hệ Quốc tế, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) Bạn đọc tự giải.

b) Giả sử $M(x_0 ; y_0) \in (C)$, ta có : $y_0 = \dfrac{x_0 + 2}{x_0 - 3}$

Tiệm cận đứng : $x - 3 = 0$; tiệm cận ngang : $y - 1 = 0$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là ; $|x_0 - 3|$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang là : $|y_0 - 1| = \dfrac{5}{|x_0 - 3|}$

Ta phải có : $|x_0 - 1| = \dfrac{5}{|x_0 - 3|} \Rightarrow x_0 = 3 \pm \sqrt{5}$

Vậy có hai điểm thoả mãn yêu cầu nằm trên (C) có hoành độ là $x_0 = \pm\sqrt{5}$.

Ví dụ 4 : a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ (C).

b) Tìm trên đồ thị hàm số điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai trục toạ độ là nhỏ nhất.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1997)

Hướng dẫn giải

a) Bạn đọc tự giải.

b) Giả sử $M_0(x_0 ; y_0) \in (C)$; $d = |x_0| + |y_0|$

Ta có : $M\left(0 ; -\dfrac{1}{2}\right) \in (C)$ và $d_M = \dfrac{1}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có :

i) $|x_0| > \dfrac{1}{2}$ thì $d > \dfrac{1}{2}$

ii) $0 < x_0 < \dfrac{1}{2}$ thì $y_0 < -\dfrac{1}{2} \Rightarrow d > \dfrac{1}{2}$

$$d = -x_0 - y_0 = -x_0 - \frac{x_0 + 1}{x_0 - 2} = \frac{-x_0^2 + x_0 - 1}{x_0 - 2}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $d = \dfrac{-x^2 + x - 1}{x - 2}$ trên $\left[-\dfrac{1}{2} ; 0\right]$

Ta có : $d' = \dfrac{-x^2 + 4x - 1}{(x - 2)^2} < 0, \forall x \in \left[-\dfrac{1}{2} ; 0\right]$.

Suy ra d giảm trên $\left[-\frac{1}{2} ; 0\right]$.

Vậy $\min d = d(0) = \frac{1}{2}$ và điểm M cần tìm là $M\left(0 ; -\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 5 : Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2}{x - 2}$ điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai trục toạ độ là nhỏ nhất.

(Trích đề thi Học viện Kĩ thuật quân sự, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Gọi d là tổng khoảng cách từ M(x ; y) ∈ (C) đến các trục toạ độ, ta có $|x| + |y|$ với $|x| = \sqrt{2}$ do đó ta chỉ cần xét những điểm M có hoành độ thoa $|x| \le \sqrt{2}$.

i) Với $0 \le x \le \sqrt{2}$ ta có :

$$d = x + \frac{x^2 - 2}{x - 2} = 2x + 2 + \frac{2}{x - 2} \Rightarrow d' = 2 - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{2(x^2 - 4x + 3)}{(x-2)^2}$$

$$d' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		1		$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	//////		+	0	−		//////
y	//////	1	↗	2	↘	$\sqrt{2}$	//////

Suy ra : min d = 1 khi x = 0.

ii) Với $-\sqrt{2} \le x \le 0$ ta có :

$$d = -x + \frac{x^2 - 2}{x - 2} = 2 + \frac{2}{x - 2} \Rightarrow d' = -\frac{2}{x - 2} < 0 \quad (x \ne 2)$$

Suy ra : $d \ge d(0) = 1 \Rightarrow \min d = 1$ khi x = 0.

Vậy điểm M cần tìm là M(0 ; 1).

D. LUYỆN TẬP

37.1 Cho parabol (P) : $y = x^2 - 2x + 3$ và (d) là đường thẳng cùng phương với đường thẳng y = 2x sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm A và B.

a) Viết phương trình của (d) khi hai tiếp tuyến với (P) tại A và B vuông góc với nhau.

b) Viết phương trình của (d) khi độ dài đoạn AB bằng 10.

(Trích đề thi Đại học Đại cương, năm 1996)

37.2 Cho parabol (P) : $y = x^2$ và điểm A(0 ; 2). Xác định điểm M trên (P) sao cho AM ngắn nhất. Chứng tỏ rằng AM vuông góc với tiếp tuyến của parabol (P) tại M.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, Khối D, năm 1997)

37.3 Cho hàm số $y = x^2 - 3x + 1$, chứng minh rằng với mọi m đường thẳng y = m luôn cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A và B. Xác định m để đoạn AB nhỏ nhất.

37.4 Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

a) Tìm hai điểm A, B thuộc hai nhánh đồ thị sao cho khoảng cách AB là ngắn nhất.

b) Xác định m để đường thẳng y = m cắt đồ thị hai điểm có khoảng cách bằng $\sqrt{5}$.

37.5 Xác định m để đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tại 4 điểm phân biệt A, B, C sao cho AB = BC = CD.

37.6 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2\cos\alpha + 2x\sin\alpha + 1}{x - 2}$. Xác định α để đường tròn có tâm O và tiếp xúc với tiệm cận xiên của đồ thị có diện tích lớn nhất.

37.7 Tìm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$ những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận nhỏ nhất.

37.8 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 5x + 15}{x + 3}$

a) Tìm điểm thuộc đồ thị sao cho toạ độ của điểm đó là các số nguyên.

b) Tìm điểm M thuộc đồ thị sao cho khoảng cách từ M tới trục hoành gấp hai lần khoảng cách từ M đến trục tung.

Phần II.

ÔN TẬP – HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

I. ÔN TẬP TỔNG HỢP

1. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3mx - 2$ với m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 1.

b) Xác định các giá trị của m để bất phương trình $f(x) \le -\frac{1}{x^3}$ được thoả mãn với mọi $x \ge 1$.

(Trích đề thi Đại học Bách khoa Hà Nội, năm 1997)

Hướng dẫn giải

a) Học sinh tự giải.

b) Với $x \ge 1$ ta có :

$$f(x) \le -\frac{1}{x^3} \Leftrightarrow -x^3 + 3mx - 2 \le -\frac{1}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow x^6 - 3mx^4 + 2x^3 \ge 1 \Leftrightarrow \frac{x^6 + 2x^3 - 1}{x^4} \ge 3m, \quad (\forall x \ge 1)$$

Xét hàm số : $F(x) = \frac{x^6 + 2x^3 - 1}{x^4}$ với $x \ge 1$

Ta có : $F(x) \ge 3m, \forall x \ge 1 \Rightarrow \min\limits_{x \ge 1} F(x) \ge 3m$

$$F'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^5} > 0, \forall x \ge 1$$

Suy ra F đồng biến trong $[1 ; \infty)$, do đó $\min\limits_{x \ge 1} F(x) = F(1) = 2$

Vậy : $2 \ge 3m \Leftrightarrow m \le \frac{2}{3}$.

Bài 2. Cho hàm số : $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$.

a) Với những giá trị nào của m thì hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và cực tiểu lập thành một tam giác đều.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số ứng với $m = 1$.

(Trích đề thi Học viện Quan hệ Quốc tế, năm 1997)

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : $D = \mathbf{R}$.

$$y' = 4x\left(x^2 - m\right).$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $m > 0$.

Khi đó : $$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{array}\right.$$

Đồ thị có điểm cực đại $A\left(0\ ;\ 2m + m^4\right)$ và hai điểm cực tiểu :

$$B\left(-\sqrt{m}\ ;\ m^4 - m^2 + 2m\right), C\left(\sqrt{m}\ ;\ m^4 - m^2 + 2m\right)$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Vì ABC là một tam giác cân tại A, nên ABC là một tam giác đều khi và chỉ khi :

$$AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m^3 = 3 \text{ (vì } m > 0)$$

Vậy : $m = \sqrt[3]{3}$.

b) Học sinh tự giải.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x + m^3 - 3m$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số ứng với $m = 0$.

b) Chứng minh rằng với mọi m hàm số đã cho luôn luôn có cực đại và cực tiểu, đồng thời chứng minh rằng khi m thay đổi các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số luôn luôn chạy trên hai đường thẳng cố định.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1998)

Hướng dẫn giải

a) Học sinh tự giải.

b) $y' = 3x^2 + 6mx + 3(m^2 - 1) = 3\left[(x+m)^2 - 1\right]$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m - 1 \\ x = -m + 1 \end{array}\right.$$

Vậy hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

Giá trị cực đại là : $y(-m - 1) = 2$. Giá trị cực tiểu là : $y(-m + 1) = -2$.

Suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số luôn chạy trên đường thẳng $y = 2$ và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số luôn chạy trên đường thẳng $y = -2$.

Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (2 - m^2)x - 2m - 1}{x - m}$ (1), m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = -1$. Từ đó hãy suy ra đồ thị hàm số $y_1 = \left|\dfrac{-x^2 - x + 1}{-x + 1}\right|$.

b) Tìm giá trị của m để hàm số (1) có cực trị. Chứng minh rằng với mọi m tìm được, trên đồ thị hàm số (1) luôn tìm được hai điểm mà tiếp tuyến với đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

(Trích đề thi Đại học Xây dựng, năm 1997)

Hướng dẫn giải

a) Hàm số y_1 có dạng $y_1 = |f(-x)|$, với $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 1}{-x + 1}$

Trước hết vẽ đồ thị $y_2 = f(-x)$ bằng cách lấy đối xứng đồ thị $y = f(x)$ qua trục Oy. Đồ thị $y_1 = |y_2|$ gồm hai phần :

– Phần đồ thị $y_2 = f(-x)$ từ trục Ox trở lên.

– Đối xứng phần đồ thị $y_2 = f(-x)$ ở phía dưới trục Ox qua Ox.

b) * Với $m = 0$: $y = \dfrac{2x - 1}{x}$, hàm số không có cực trị.

* Với $m \neq 0$: $y' = \dfrac{mx^2 - 2m^2x + m^3 + 1}{(x - m)^2}$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình : $mx^2 - 2m^2 + m^3 + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác m, tức là :

$$\begin{cases} \Delta' = -m > 0 \\ m.m^2 - 2m^2.m + m^3 + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

Khi m < 0 phương trình y' = 0 có hai nghiệm $x_1 < x_2$.

Xét tiếp tuyến bất kì với đồ thị hàm số (1) tại điểm có hoành độ x_0 nằm ngoài đoạn $[x_1 ; x_2]$, ta có : $y'(x_0) < 0$ (cùng dấu với m).

Ta có : $y' = m + \dfrac{1}{(x-m)^2}$

Ta cần chứng minh phương trình $y'(x_0).y'(x) = -1$ (2) có nghiệm. Thật vậy ta có :

$$(2) \Leftrightarrow m + \frac{1}{(x-m)^2} = -\frac{1}{y'(x_0)} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-m)^2} = -m - \frac{1}{y'(x_0)} \qquad (3)$$

(3) luôn có nghiệm vì $-m - \dfrac{1}{y'(x_0)} > 0$ (đpcm).

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a) Tìm tập xác định và tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của f(x).

b) Tìm các đường tiệm cận của đồ thị y = f(x).

(Trích đề thi Đại học Xây dựng, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) Tập xác định : $D = (-\infty ; -1) \cup (1 ; +\infty)$

$$y' = \frac{x(x^2 - 2)}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	‖	//////	‖	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$	//////	$+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$

b) Đồ thị có hai tiệm cận đứng là $x = -1$ và $x = 1$.

Hai tiệm cận là $y = -x$ và $y = x$.

Bài 6. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx - m + 8}{x - 1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số ứng với $m = -1$. Gọi là đồ thị (C).

b) Viết phương trình parabol đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị (C) và tiếp xúc với đường thẳng $2x - y - 10 = 0$.

c) Trong trường hợp tổng quát, hãy xác định tất cả các giá trị của m để điểm cực đại và cực tiểu cua đồ thị hàm số đã cho ở về hai phía của đường thẳng $9x - 7y - 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Học sinh tự giải.

b) (C) có điểm cực tiểu $A(4 ; 7)$ và điểm cực đại $B(-2 ; -5)$.

Xét parabol (P) có phương trình : $y = a(x - 4)(x + 2) + bx + c$

(P) đi qua A và B $\Leftrightarrow \begin{cases} 4b + c = 7 \\ -2b + c = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$

Khi đó (P) : $y = a(x - 4)(x + 2) + 2x - 1 = ax^2 - 2(a - 1)x - (8a + 1)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng d : $y = 2x - 10$ là :

$$ax^2 - 2(a - 1)x - (8a + 1) = 2x - 10 \Leftrightarrow ax^2 - 2ax - 8a + 9 = 0$$

d tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = a^2 - a(-8a + 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$

Vậy parabol (P) có phương trình $y = x^2 - 9$.

c) Ta có : $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$m - 4$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	$m + 8$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị có điểm cực đại M(−2 ; m − 4) và điểm cực tiểu N(4 ; m + 8). M, N ở hai phía của đường thẳng 9x − 7y − 1 = 0 khi và chỉ khi :

$$(9x_M - 7y_M - 1)(9x_N - 7y_N) < 0 \Leftrightarrow (9 - 7m)(-21 - 7m) < 0$$

$$\Leftrightarrow -3 < m < \frac{9}{7}.$$

Bài 7. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (a+1)x - 3}{x + a}$ (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1) với a = 2.

b) Xác định a để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 5$.

c) Tìm quỹ tích giao điểm của hai đường tiệm cận đứng và xiên của đồ thị hàm số (1) khi a thay đổi.

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) Học sinh tự giải.

b) Ta có : $y = 2x + 1 - a + \dfrac{a^2 - a - 3}{x + a}$

Đồ thị có tiệm cận xiên là y = 2x + 1 − a (với $a \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$)

Tiệm cận xiên tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 5$ khi và chỉ khi phương trình $x^2 + 5 = 2x + 1 - a$ (2) có nghiệm kép.

Ta có : (2) có nghiệm kép $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 + a = 0$ có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \Delta = -3 - a = 0 \Leftrightarrow a = -3.$$

c) Giao điểm của hai đường tiệm cận là I(−a ; 1 − 3a)

Khử a từ hệ $\begin{cases} x = -a \\ y = 1 - 3a \end{cases}$ ta được $y = 3x + 1$.

Vậy quỹ tích cần tìm có phương trình là y = 3x + 1 với $x \neq -\dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Bài 8. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

b) Với mỗi giá trị của tham số a, tìm toạ độ của điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C_a) của hàm số : $y = -x^3 + ax^2 - 4$.

c) Xác định a để mọi đường thẳng có phương trình y = m với $-4 < m < 0$ cắt (C_a) tại 3 điểm phân biệt.

(Trích đề thi Học viện Ngân hàng, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) Học sinh tự giải.

b) Ta có : $y' = -3x^2 + 2ax$.

i) Nếu a = 0 thì $y' = -3x^2 \le 0, \forall x \in \mathbf{R}$. Hàm số không có cực trị.

ii) Nếu $a \ne 0$ thì y' = 0 có hai nghiệm phân biệt $x = 0,\ x = \dfrac{2a}{3}$.

* Với a > 0 ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$\frac{2a}{3}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	$\frac{4a^3}{27} - 4$	↘	$-\infty$

Đồ thị có điểm cực tiểu A(0 ; −4) và điểm cực đại $B\left(\dfrac{2a}{3} ; \dfrac{4a^3}{27} - 4\right)$.

* Với a < 0 ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$\frac{2a}{3}$		0		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	$\frac{4a^3}{27} - 4$	↗	-4	↘	$-\infty$

Đồ thị có điểm cực tiểu $C\left(\dfrac{2a}{3} ; \dfrac{4a^3}{27} - 4\right)$ và điểm cực đại D(0 ; −4).

c) Để mọi đường thẳng y = m với $m \in (-4 ;\ 0)$ cắt (C_a) tại ba điểm phân biệt thì ta phải có :

$$\begin{cases} a > 0 \\ -4 < m < \dfrac{4a^3}{27} - 4 \end{cases}, \forall m \in (-4\,;\,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 7 \\ \dfrac{4a^3}{27} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 3.$$

Bài 9. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Gọi Δ là đường thẳng có phương trình y = m. Xác định m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

c) A, B, C có ba điểm khác nhau trên (C). Khi A, B, C thẳng hàng chứng minh rằng : $x_A + x_B + x_C = x_A x_B x_C + 2$.

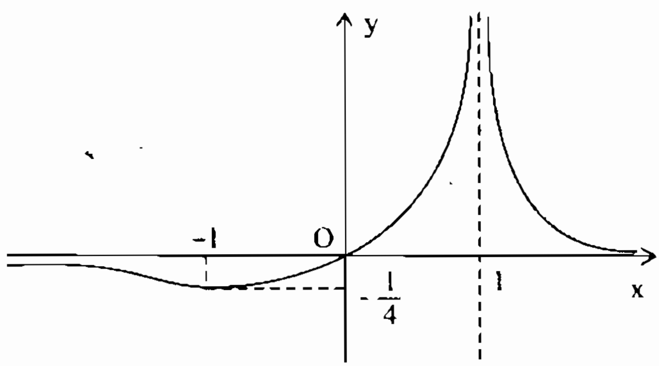
Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $y' = \dfrac{1-x^2}{(x-1)^4}$

x = 1 là tiệm cận đứng ; y = 0 là tiệm cận ngang.

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		−	0	+	‖	−	
y	0 ↘		$-\frac{1}{4}$	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0



b) Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $m > -\dfrac{1}{4}$ và m ≠ 0, khi đó

x_M, x_N là nghiệm phương trình :

$$\frac{x}{(x-1)^2} = m \Leftrightarrow mx^2 - (2m+1)x + m = 0.$$

Toạ độ trung điểm I của MN là : $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{2m+1}{2m} \\ y_I = m \end{cases}$

Khử m ta được : $y_I = \dfrac{1}{2(x_I - 1)}$ với $|x_I| > 1$

Vậy quỹ tích I là (H) : $y = \dfrac{1}{2(x-1)}$ với $|x| > 1$.

c) Giả sử phương trình d : y = ax + b (a ≠ 0) qua 3 điểm A, B, C thẳng hàng. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là :

$$ax + b = \frac{x}{(x-1)^2} \Leftrightarrow ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-1-2b)x + b = 0 \qquad (1)$$

x_A, x_B, x_C là ba nghiệm của (1) nên theo định lí Viet ta có :

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = \dfrac{2a-b}{a} = 2 - \dfrac{b}{a} & (2) \\ x_A x_B x_C = -\dfrac{b}{a} & (3) \end{cases}$$

Từ (2) và (3) suy ra : $x_A + x_B + x_C = x_A x_B x_C + 2$.

Bài 10. Cho hàm số $y = mx + m^2 + \sqrt{x^2 + 1}$

a) Chứng minh rằng tiệm cận xiên bên phải của đồ thị luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

b) Khi m = 1, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

c) Tìm quỹ tích các điểm trên trục tung mà từ đó có thể kẻ được ít nhất một tiếp tuyến với đồ thị (C).

d) Với giá trị nào của a thì phương trình sau có nghiệm :

$$x + 1 + \sqrt{x^2 + 1} = a.$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y = mx + m^2 + |x|.\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$

Tiệm cận xiên bên phải : $y = (m+1)x + m^2$

Ta có : $y = m^2 + mx + x = m^2 + 2m\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} + x = \left(m + \frac{x}{2}\right)^2 + x - \frac{x^2}{4}.$

Xét parabol (P) : $y = x - \frac{x^2}{4}$

Với mọi m, phương trình $\left(m + \frac{x}{2}\right)^2 + x - \frac{x^2}{4} = x - \frac{x^2}{4}$ luôn có nghiệm kép nên tiệm cận xiên luôn tiếp xúc với parabol (P) : $y = x - \frac{x^2}{4}$

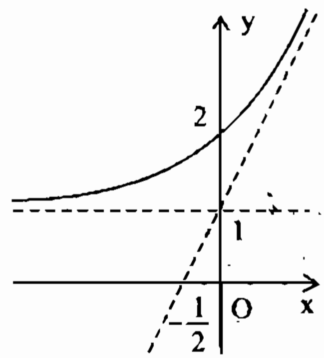
b) $m = 1$: $y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}$ (C)

$D = \mathbf{R}$, $y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ (vì $\sqrt{x^2 + 1} > -x$)

$y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên bên phải ; $y = 1$ là tiệm cận ngang.

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$



c) Giả sử M(0 ; b) ∈ Oy, đường thẳng Δ qua M với hệ số góc k có phương trình : $y = kx + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ với (C) là :

$$\sqrt{x^2 + 1} = (k - 1)x + b - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (k - 1)x + b \geq 0 \\ x^2 + 1 = [(k - 1)x + b - 1]^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k - 1)x + b \geq 0 & (1) \\ \left[(k - 1)^2 - 1\right]x^2 + 2(k - 1)(b - 1)x + (b - 1)^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Δ tiếp xúc với (C) ⇔ (2) có nghiệm thoả (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)^2 - 1 \neq 0 \\ \Delta' = (k-1)^2 + (b-1)^2 - 1 = 0 \\ (k-1).\left[-\dfrac{(k-1)(b-1)}{(k-1)^2 - 1}\right] + b - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 1 \\ (k-1)^2 = -(b-1)^2 - 1 \\ (k-1).\dfrac{(k-1)(b-1)}{(b-1)^2} + b - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 1 \\ (k-1)^2 = -(b-1)^2 - 1 \\ \dfrac{1}{b-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 1 \\ (k-1)^2 = -(b-1)^2 + 1 \quad (3) \end{cases}$$

Hệ (3) có nghiệm k khi và chỉ khi : $\begin{cases} b > 1 \\ (b-1)^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < b \leq 2.$

Vậy M(0 ; b) với $1 < b \leq 2$ thoả yêu cầu bài toán.

d) $a > 1$.

Bài 11. Cho hàm số $y = x + 1 + \dfrac{4}{(x+m)^2}$ có đồ thị (C_m)

a) Có bao nhiêu đồ thị (C_m) qua điểm A(1 ; 3) ?

b) Chứng minh rằng tiếp tuyến với (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 2 - m$ thì song song với Ox.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị khi $m = 1$.

Hướng dẫn giải

a) (C_m) qua A(1 ; 3) $\Leftrightarrow 3 = 1 + 1 + \dfrac{4}{(1+m)^2} \Leftrightarrow (m+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$

Vậy có hai đồ thị (C_m) qua điểm A(1 ; 3).

b) Ta có : $y' = 1 - \dfrac{8(x+m)}{(x+m)^4} = 1 - \dfrac{8}{(x+m)^3} = \dfrac{(x+m)^3 - 8}{(x+m)^3}$

Tại $x = 2 - m$: $y'(2-m) = 0$.

Vậy tiếp tuyến với (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 2 - m$ thì song song với Ox.

c) Học sinh tự giải.

Bài 12. Cho hàm số $y = \sqrt{2x(4-x)}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Dùng đồ thị biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{2x(4-x)} = mx + 2\sqrt{2} - 5m.$$

c) Gọi (C') là hình đối xứng của (C) qua Ox. Chứng minh rằng (C) và (C') hợp thành đường (E) mà ta viết được phương trình.

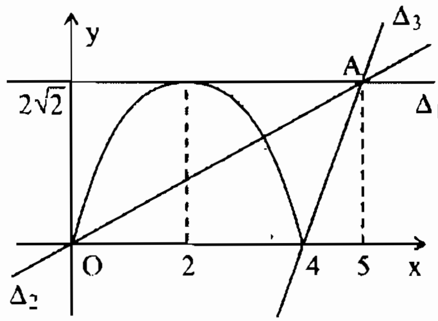
Hướng dẫn giải

a) Tập xác định D = [0 ; 4].

$$y' = \frac{-2x+4}{\sqrt{2x(4-x)}} \text{ ; } y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$	-0		2		4	$+\infty$
y'			+	0	−		
y		0	↗	$2\sqrt{2}$	↘	$\sqrt{2}$	



b) Xét đường thẳng Δ_m : $y = mx + 2\sqrt{2} - 5m = m(x-5) + 2\sqrt{2}$

Δ_m qua điểm cố định $A\left(5 ; 2\sqrt{2}\right)$.

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng Δ_m.

Ta có : $\Delta_1 : y = 2\sqrt{2}$ có hệ số góc $k_1 = 0$

$\Delta_2 : y = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}x$ có hệ số góc $k_2 = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

$\Delta_3 : y = 2\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$ có hệ số góc $k_3 = 2\sqrt{2}$.

- Bảng biện luận :

m	Số nghiệm của phương trình
$+\infty$	0
$\sqrt{2}$	1
	1
$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	2
	2
0	1
$-\infty$	0

c) $M(x, y) \in (C) \cup (C') \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2x(4-x)} \Leftrightarrow y^2 = 8x - 2x^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1 \qquad (E)$$

(E) là một elip tâm I(2 ; 0) có trục lớn $4\sqrt{2}$ và trục nhỏ 4.

Bài 13. 1) Cho hàm số $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$. Khảo sát sự biến thiên của g(x).

Suy ra dấu của g(x) trong một khoảng (0 ; 1) và (1 ; +∞)

2) Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - \ln^2 x$

a) Chứng minh rằng $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ với mọi $x > 0$.

b) Chứng tỏ rằng $f'(x) = \frac{1}{2x}g(x)$, $\forall x > 0$.

Dùng câu 1) để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số f(x).

c) Chứng minh rằng phương trình f(x) = x có một nghiệm duy nhất trong khoảng (0 ; 1). Gọi α là nghiệm này.

d) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = \frac{1}{x}$ có một nghiệm duy nhất $\beta > 1$ và $\alpha\beta = 1$.

Hướng dẫn giải

1) Tập xác định D = (0 ; + ∞)

$$g'(x) = 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x} = \frac{2(x^2-1)^2}{x^3} \geq 0,\ \forall x > 0$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
g'(x)	//////	‖	+	0	−	
g(x)	//////	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Vậy $g(x) < 0$ khi $x \in (0 ; 1)$

$g(x) > 0$ khi $x \in (1 ; +\infty)$

2) a) $D = (0 ; +\infty)$

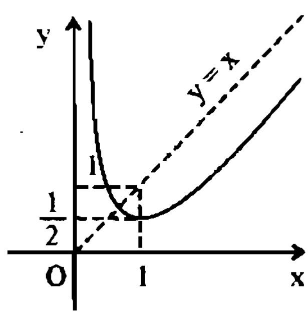
Ta có : $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2}-\ln^2\frac{1}{x}=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-\ln^2 x=f(x)$

b) $f'(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x^3}-\frac{2}{x}\ln x=\frac{1}{2x}\left(x^2-\frac{1}{x^2}-4\ln x\right)=\frac{1}{2x}g(x)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
f'(x)	//////	‖	−	0	+	
f(x)	//////	‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

Đồ thị :



c) Xét hàm số $h(x) = f(x) - x$ với $x \in (0 ; 1)$

Ta có : $h'(x) = f'(x) - 1 < 0$ vì $f'(x) < 0$ khi $x \in (0 ; 1)$

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$h'(x)$	//////		$-$		//////
$h(x)$	//////	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	//////

Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình $h(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $\alpha \in (0\,;\,1)$.

d) Xét phương trình $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x > 1$. Đặt $t = \frac{1}{x}$, ta có $f\left(\frac{1}{t}\right) = t$ với $t \in (0\,;1)$.

Vì $f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t),\ \forall t > 0$ nên $f\left(\frac{1}{t}\right) = t$

$\Leftrightarrow f(t) = t$ có nghiệm duy nhất $t = \alpha \in (0\,;\,1) \Rightarrow \frac{1}{x} = \alpha \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha} > 1$

Vậy $f(x) = \frac{1}{x}$ có nghiệm duy nhất $\beta = \frac{1}{\alpha} > 1$ và $\alpha\beta = 1$.

Bài 14. a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số : $y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{3 + x^2}}$

b) Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\sqrt{1 - x^2}.\sin x + \sqrt{3 + x^2}.\cos x = 2.$$

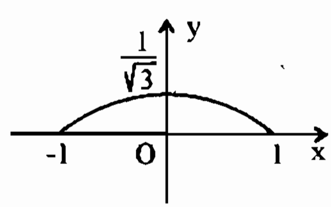
Hướng dẫn giải

a) Tập xác định : $D = [-1\,;\,1]$

$$y' = \frac{-8x}{2(3 + x^2)^2\sqrt{\frac{1 - x^2}{3 + x^2}}}\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y'	//////	‖	$+$	0	$-$	‖	//////
y	//////	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	//////



b) Áp dụng BĐT Bunhicôpxki ta có phương trình : $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{3+x^2}}=\tan x$

Đồ thị $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{3+x^2}}$ và $y=\tan x$ cắt nhau tại một điểm duy nhất có hoành độ thuộc $(-1\ ;\ 1)$.

Bài 15. a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$\sin t+\cos t=m\sin t\cos t\,(0\le t\le 2\pi)$$

Hướng dẫn giải

a) Học sinh tự giải.

b) Đặt $x=\sin t+\cos t,\ x\in\left[-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\right]$, ta được $\dfrac{2x}{x^2-1}=m$.

Bài 16. Cho hàm số $y=2x+\dfrac{1}{|x-1|}$ (C)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$2x|x-1|-m|x-1|+1=0$$

c) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$2\cos x|\cos x-1|-m|\cos x-1|+1=0 \text{ với } \frac{\pi}{3}\le n\le\frac{2\pi}{3}$$

Bài 17. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ (C)

b) Biện luận số giao điểm của (C) với đường thẳng y = mx. Trong trường hợp y = mx cắt (C) tại 3 điểm phân biệt O, M, N hãy tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

c) Giả sử A, B là hai điểm trên (C) có cùng tung độ là k. Tìm quỹ tích trung điểm P của AB khi k thay đổi.

d) Cho M_0 và M là hai điểm có hoành độ tương ứng là x_0 và x. Hãy biểu diễn x theo x_0 khi M_0M tiếp xúc với (C) tại M_0.

e) Giả sử M_0, M_1, M, M' là 4 điểm trên (C) sao cho M_0M_1 song song với Ox còn M_0M và M_1M' lần lượt tiếp xúc với (C) tại M_0, M_1. Chứng minh M, O, M' thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a) Học sinh tự giải.

b) Phương trình hoành độ giao điểm là : $x(mx^2 - 3mx + 2m - 1) = 0$.

Quỹ tích có phương trình là : $x = \frac{3}{2}\left(y < -6 \vee y > 0,\ y \neq \frac{3}{4}\right)$

c) $y = \frac{1}{2x - 3}$ với $y < -3 - 2\sqrt{2} \vee y > -3 + 2\sqrt{2}$.

d) $x = \frac{4x_0 - 6}{x_0^2 - 2}$.

Bài 18. Cho hàm số $y = x + \sqrt{x^2 - x}$

a) Tìm tất cả các tiệm cận xiên của đồ thị hàm số trên.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

c) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $x + \sqrt{x^2 - x} = mx$.

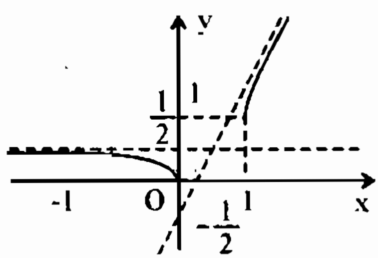
Hướng dẫn giải

a) Tiệm cận xiên (bên phải) : $y = 2x - \frac{1}{2}$;

Tiệm cận ngang (bên trái) : $y = \frac{1}{2}$.

b) Bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		–		//////		+	
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	//////	1	$\nearrow$	$+\infty$



c) Biện luận : $m < 0$: 2 nghiệm, $0 \leq m < 1$: 1 nghiệm,

$1 < m < 2$: 2 nghiệm, $m \geq 2$: 1 nghiệm.

2. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Tìm giá trị của hàm số $y = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$ là :

a) $[0 ; 9]$ b) $\left[3 ; 3\sqrt{2}\right]$

c) $[0 ; 3]$ d) Một kết quả khác.

2. Tập giá trị của hàm số $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ là :

a) $\left[\dfrac{1}{3} ; 1\right]$ b) $[0 ; 1]$

c) $\left[\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{2}\right]$ d) Một kết quả khác.

3. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2\cos x + 2}{\sin x + \cos x + 2}$ là :

a) 0 b) 1

c) 2 d) Một kết quả khác.

4. Giá trị của a để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \le 1 \\ 3 - ax^2 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ liên tục trên **R** là :

a) 0 b) 1

c) 2 d) Một kết quả khác.

5. Hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 3 \\ ax+b & \text{nếu } 3 \le x \le 5 \\ 3 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ liên tục trên **R** khi cặp (a ; b) là :

a) (1 ; 2) b) (2 ; 1) c) (–1 ; 2) d) (1 ; –2).

6. Hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \le 1 \\ ax+b & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại x = 1 khi cặp (a ; b) là :

a) (2 ; –1) b) (1 ; –2)

c) (2 ; 1) d) Một kết quả khác.

7. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \cos 2x$ là :

a) $y^{(n)} = \sin\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ b) $y^{(n)} = \cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

c) $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ d) Một kết quả khác.

8. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sin^2 x$ là :

a) $y^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$ b) $y^{(n)} = 2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$

c) $y^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$ d) Một kết quả khác.

9. Hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 5x + 2$ đạt cực đại tại $x = 2$ khi :

a) $m = 1$ b) $m = -2$

c) $m = 3$ d) Một kết quả khác.

10. Hàm số $y = \frac{1}{3}\sin 3x + m\sin x$ đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{3}$ khi

a) $m = 2$ b) $m = 0$

c) $m = -1$ d) Một kết quả khác.

11. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + x - 4$ nhận điểm I(2 ; –6) làm điểm uốn khi cặp (a ; b) là :

a) $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$ b) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$

c) $\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{2}\right)$ d) Một kết quả khác.

12. Phương trình đường thẳng qua 3 điểm uốn của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ là :

a) $y = 2x + 1$ b) $y = \frac{1}{3}(2x+1)$

c) Một kết quả khác d) Ba điểm uốn không thẳng hàng.

13. Xác định m để hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{x^2 - x + 1}$ có cực trị :

a) $m > 1$ b) $-1 < m < 1$ c) $0 < m < 1$ d) m tuỳ ý.

14. Phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 - 3x + 1$ là :

a) $y = -\frac{2}{9}(7x+6)$ b) $y = \frac{1}{9}(3x-1)$

c) $y = -\frac{1}{9}(20x-6)$ d) Một kết quả khác.

15. Giá trị m để hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + m - 2$ nghịch biến trong khoảng (1 ; 3) là :

a) $-\frac{9}{4} < m < 0$ b) $m \le -\frac{9}{4}$

c) $m \ge -\frac{9}{4}$ d) Một kết quả khác.

16. Cho hàm số $y = e^{2x}\cos 4x$. Mệnh đề nào sau đây đúng

a) $3y - 2y' + 4y'' = 0$ b) $y + 2y' - 4y'' = 0$

c) $10y'' + 2y' - 5y = 0$ d) $20y - 4y' + y'' = 0$.

17. Tại $x = \frac{2\pi}{3}$ hàm số $y = \cos x + \cos 2x$ đạt :

a) Cực đại b) Cực tiểu

c) Không đạt cực trị d) Giá trị bằng $-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. Tiệm cận ngang hoặc tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$y = \frac{mx^2 - (m^2 - m + 1)x - (m^2 - 1)}{x + 1}$ luôn tiếp xúc với đường cong có phương trình :

a) $y = x^2 - 1$ b) $y = -x^2 + 1$ c) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ d) $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

19. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + ax + 5}{x^2 + b}$ nhận điểm $I\left(\frac{1}{2} ; 6\right)$ làm điểm cực trị khi cặp (a ; b) là :

a) (4 ; 1) b) (1 ; 4)

c) (– 4 ; 1) d) Một kết quả khác.

20. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng khi :

a) m = –1 b) m = 1

c) m = 2 d) Một kết quả khác.

21. Bảng biến thiên của hàm số $y = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$ là :

a)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		–	0	+	
y	$+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

b)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	$\sqrt{2}$	↘	$+\infty$ 1

c)

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	-1	↗	$\sqrt{10}$	↘	1

d) Một bảng biến thiên khác.

22. Hàm số $y = \dfrac{2x^2 - mx + m}{x + 2}$ có hai giá trị cực trị cùng dấu khi :

a) $0 < m < 8$ b) $-8 < m < 0$

c) $m < 0 \vee m > 8$ d) Một kết quả khác.

23. Cho hàm số $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Hàm số không có cực trị b) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận

c) Đồ thị hàm số có ba điểm uốn d) Đồ thị hàm số có 1 điểm uốn.

24. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = mx^3 + 2mx^2 - (m+3)x - 2(m-2)$.

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) (C) chỉ có một điểm cực trị b) (C) chỉ có hai điểm cực đại

c) (C) có ba điểm cố định thẳng hàng d) (C) luôn có hai điểm cực trị.

25. Cho (C) là đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 8$. Gọi M là giao điểm của (C) với trục tung. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại M' (M' ≠ M) thì M' có toạ độ là :

a) $(2 ; -5)$ b) $(-1 ; 1)$

c) $(1 ; -3)$ d) Một kết quả khác.

26. Cho điểm uốn của đồ thị hàm số $y = e^{x-x^2}$ là :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

27. Đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$ có bao nhiêu tiệm cận xiên ?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

28. Bảng biến thiên của hàm số $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ là :

a)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	2	↗	6	↘	1	↗	2

b)

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	2	↘	1	↗	6	↘	2

c)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	6	↘	1	↗	$+\infty$

d) Một bảng biến thiên khác.

29. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 4(2m+1)x^3 - 6mx^2 + x - m$ có hai điểm uốn khi :

a) $\dfrac{1}{4} < m < 1$ b) $0 < m < \dfrac{1}{4}$

c) $-\dfrac{1}{4} < m < 0$ d) $m < -1 \vee m > -\dfrac{1}{4}$.

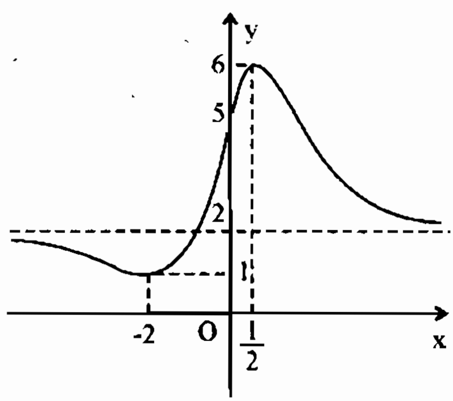
30. Đồ thị sau đây của hàm số nào ?

a) $y = \dfrac{2x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$

b) $y = \dfrac{2x^2 + 5}{x^2 + 1}$

c) $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 5}{x^2 - 1}$.



31. Cho hàm số $y = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖ 0	$-$		$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Khi đó bộ (a ; b ; c) bằng :

a) $(1 ; 1 ; -1)$ b) $(-1 ; 1 ; 1)$ c) $(1 ; 1 ; 1)$ d) $(1 ; -1 ; 1)$.

32. Cho hàm số $y = \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1}$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại A là :

a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = -x + 1$ d) $y = -x - 1$.

33. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$. Xét các mệnh đề sau :

(i) Hàm số có một cực đại và một cực tiểu nếu $m \neq 1$.

(ii) Nếu $m > 1$ thì giá trị cực tiểu của hàm số là $3m - 1$.

(iii) Nếu $m < 1$ thì giá trị cực đại của hàm số là $3m - 1$.

Mệnh đề nào đúng ?

a) Chỉ (i) đúng b) Chỉ (i) và (ii) đúng

c) Chỉ (i) và (iii) đúng d) Cả (i), (ii), (iii) đều đúng.

34. Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 + x - 2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M \in (C)$ có hệ số góc lớn nhất thì M có toạ độ là :

a) $(0 ; 2)$ b) $(-1 ; 5)$

c) $(1 ; 3)$ d) Một kết quả khác.

35. Giá trị m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + m$ có ba cực trị là :

a) $m > 0$ b) $m < 1$

c) $0 < m < 1$ d) $m < 0 \vee m > 1$.

36. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \dfrac{1}{1-x}$ là :

a) $y^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^n}$ b) $y^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

c) $y^{(n)} = (-1)^n.\dfrac{n!}{(1-x)^n}$ d) $y^{(n)} = (-1)^{n+1}.\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

37. Đồ thị hàm số $y = e^{4x-2x^2}$ có bao nhiêu điểm uốn ?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

38. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{|x|-1}{|x|+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) f là hàm số lẻ

b) Tập giá trị của f là $T = [-1 ; 1]$

c) Tập xác định của f là $D = \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$

d) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

39. Cho hàm số $f(x) = -2x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) f là hàm số lẻ b) f là hàm số chẵn

c) Tập xác định hàm số là $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

d) Đồ thị đi qua điểm A(–1 ; 1).

40. Giá trị m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt là :

a) $-2 < m < 0$ b) $-2 < m < 1$ c) $-2 < m < 2$ d) $-1 < m < 2$.

41. Đồ thị hàm số $y = mx^3 - (m-1)x^2 - (2+m)x + m - 1$ đi qua bao nhiêu điểm cố định ?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

42. Trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 5x + 15}{x + 3}$ có bao nhiêu điểm có toạ độ là cặp số nguyên âm ?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4.

43. Cho đồ thị (C_m) của hàm số $y = -x^4 - 2(m-1)x^2 + 2m - 1$. Giá trị m để hai tiếp tuyến của (C_m) tại hai điểm cố định của (C_m) vuông góc nhau là :

a) $m = \pm\dfrac{1}{4}$ b) $m = \pm 1$

c) $m = \dfrac{1}{2}$ d) Một kết quả khác.

44. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - mx + 3m^2}{x - 2m}$ $(m \neq 0)$ có tâm đối xứng I(– 2 ; – 2) khi :

a) $m = 1$ b) $m = -\dfrac{1}{2}$ c) $m = -1$ d) $m = \dfrac{1}{2}$.

45. Đồ thị hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận ?

a) $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$ b) $y = \dfrac{x^2+x+2}{2x+1}$

c) $y = x + \sqrt{2x^2+1}$ d) $y = \dfrac{2x+1}{x^2+2x-3}$.

46. Hàm số $y = x - 2\sqrt{x-1}$ giảm trong khoảng nào ?

a) Luôn luôn tăng b) $(2 ; +\infty)$ c) $(-\infty ; 1)$ d) $[1 ; 2]$.

47. Hàm số $y = x + 2 + \sqrt{x^2+2x+2}$ có :

a) 1 cực đại b) 1 cực tiểu

c) Không có cực trị d) 1 cực tiểu và 1 cực đại.

48. Đồ thị hàm số $y = x + 2 + \sqrt{x^2+2x+2}$ có :

a) Chỉ có 1 tiệm cận xiên

b) Chỉ có 1 tiệm cận ngang

c) Có 1 tiệm cận xiên và 1 tiệm cận ngang

d) Có 2 tiệm cận xiên.

49. Cho hàm số $y = \dfrac{|x|}{1+x^2}$. Xét các mệnh đề :

(i) Hàm số xác định với mọi $x \in R$

(ii) Hàm số liên tục tại $x = 0$

(iii) Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Chỉ (i) sai b) Chỉ (ii) sai

c) Chỉ (iii) sai d) Cả (i), (ii), (iii) đều đúng.

50. Cho hàm số $y = xe^x$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau :

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}$.

b) Hàm số giảm trong khoảng $(-\infty ; -1)$

c) Hàm số tăng trong khoảng $(-1 ; +\infty)$

d) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $\left(-1 ; -\dfrac{1}{e}\right)$.

51. Tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}$ là :

a) $[-1\,;\,7]$ b) $\left[2\sqrt{2}\,;\,4\right]$

c) $[0\,;\,4]$ d) Một kết quả khác.

52. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{b^2-a^2}{2} & \text{nếu } x=0\\ \dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2} & \text{nếu } x>0\\ \dfrac{1-\sqrt{\cos(a+b)x}}{x^2} & \text{nếu } x<0\end{cases}$

Xét các mệnh đề sau :

(i) f liên tục tại x = 0

(ii) f liên tục trái tại x = 0

(iii) f liên tục phải tại x = 0

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Chỉ (i) đúng b) Chỉ (ii) đúng

c) Chỉ (iii) đúng d) Cả (i), (ii), (iii) đều đúng.

53. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=2x^2-x^4$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) (C) có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại

b) (C) có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu

c) (C) có 1 tâm đối xứng

d) (C) có 3 điểm uốn.

54. Nếu đồ thị hàm số $y=-x^4+2mx^2-2m+1$ cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì

a) $m=\dfrac{1}{5}$ b) $m=1,\ m=9$

c) $m=5,\ m=\dfrac{5}{9}$ d) Một kết quả khác.

55. (C) là đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+2$. Đường thẳng y = m cắt (C) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ a, b, c thì $a^2+b^2+c^2$ bằng :

a) 0 b) 1

c) 2 d) Một kết quả khác.

56. Giá trị m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m^2}{x - 2m}$ tăng trên từng khoảng xác định là :

a) 0　　　b) 1

c) – 1　　　d) Một kết quả khác.

57. Phương trình $x + \sqrt{2x^2 + 1} = m$ có nghiệm khi :

a) $m \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　b) $m < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　d) Một kết quả khác.

58. Giá trị m để phương trình $x + 3 = m\sqrt{x^3 + 1}$ có 2 nghiệm phân biệt là :

a) $m \leq 1 \vee m > \sqrt{10}$　　　b) $-1 < m \leq 1$

c) $1 < m \leq \sqrt{10}$　　　d) Một kết quả khác.

59. Xác định m để phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{9 - x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$ có nghiệm

a) $m > -\dfrac{9}{4}$　　　b) $-\dfrac{9}{4} \leq m \leq 10$

c) $m \geq 10$　　　d) Một kết quả khác.

60. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$ có tâm đối xứng là :

a) I(2 ; 4)　　　b) I(1 ; 2)

c) I(0 ; –1)　　　d) Một điểm khác.

61. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 4$ có trục đối xứng có phương trình là :

a) x = 0　　　b) x = 1

c) x = 2　　　d) Một phương trình khác.

62. Đồ thị hàm số $y = x^4 + 4x^3 + mx^2$ có trục đối xứng song song với trục tung khi :

a) m = 2　　　b) m = 3

c) m = 4　　　d) Một giá trị khác.

63. Bảng biến thiên sau ứng với hàm số nào ?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	
y		↘		↗		↘	

a) $y = \dfrac{1}{x}$ b) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$

c) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ d) $y = 2x^2 - x^4$.

64. Hàm số $y = xe^{4x^2}$ tăng trên khoảng :

a) $\left(-\infty ; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; +\infty\right)$

c) Luôn luôn tăng d) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; +\infty\right)$.

65. Giá trị cực đại của hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}$ là :

a) $\dfrac{1}{3}$ b) 3

c) 7 d) Một kết quả khác.

66. Cho hàm số $y = x^x$ $(x > 0)$. Mệnh đề nào sau đâu đúng

a) Hàm số tăng trên khoảng $\left(0 ; \dfrac{1}{e}\right)$ b) Hàm số tăng trên khoảng $(0 ; +\infty)$

c) Hàm số có cực đại tại $x = \dfrac{1}{e}$ d) Hàm số có cực tiểu tại $x = \dfrac{1}{e}$.

67. Hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$ thì giá trị m là :

a) $m = 1$ b) $m = 3$

c) $m = -3$, $m = -1$ d) $m = -3$.

68. Với $x \geq 1$ giá trị nhỏ nhất của $y = \dfrac{4x^2 + 8x + 13}{6(1+x)}$ là :

a) 1 b) 2 c) $\dfrac{25}{12}$ d) $\dfrac{13}{6}$.

69. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin x - \cos^2 x - \dfrac{1}{2}$ là :

a) $\begin{cases} \min y = -\dfrac{3}{4} \\ \max y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \min y = -\dfrac{4}{3} \\ \max y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \min y = -\dfrac{3}{4} \\ \max y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ d) Một kết quả khác.

70. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin x \cos x$ là :

a) 1 b) $\dfrac{9}{8}$

c) $\dfrac{3}{2}$ d) Một kết quả khác.

71. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ là :

a) $\begin{cases} \min y = 0 \\ \max y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \min y = 1 \\ \max y = \sqrt[4]{8} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \min y = 0 \\ \max y = -2 \end{cases}$ d) Một kết quả khác.

72. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{7 + 3\cos x - \sin^2 x}{2 + \cos x}$ là :

a) 3 b) $\dfrac{10}{3}$

c) 4 d) Một kết quả khác.

73. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ là :

a) 5 b) 6

c) 4 d) Một kết quả khác.

74. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 1}{|x| - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

a) 1 b) 2 c) 4 d) Một giá trị khác.

75. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = x\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$ là :

a) $y = -x - \dfrac{1}{2}$ b) $y = x - \dfrac{1}{2}$

c) $y = x + 1$ d) Một kết quả khác.

76. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - (1-m)x + m - 2}{x-2} (m \neq 0)$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng d : x + 2y – 1 = 0 thì giá trị của m là :

a) 2   b) $\frac{1}{3}$ c) $2 + \sqrt{5}$ d) Một số khác

77. Hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2(1 - \sin\alpha)x^2 - (1 + \sin 2\alpha)x + 1$ đồng biến thì giá trị của α là $(k \in Z)$:

a) $k2\pi$ b) $\frac{\pi}{6} + k2\pi$

c) $\frac{\pi}{3} + k\pi$ d) Một kết quả khác.

78. Hàm số $y = (1+x)^\alpha - \alpha x - 1 (0 < \alpha < 1, x > 0)$. Xét các mệnh đề sau :

(i) Hàm số giảm trong khoảng $(0 ; +\infty)$

(ii) Hàm số tăng trong khoảng $(0 ; +\infty)$

(iii) Trong khoảng $(0 ; +\infty)$ hàm số có cực trị

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Chỉ (i) đúng   b) Chỉ (ii) đúng

c) Chỉ (iii) đúng   d) Cả (i), (ii), (iii) đều sai.

79. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ là :

a) y = x   b) y = x – 1

c) y = – x + 1   d) Một phương trình khác.

80. Giá trị của a để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ có ít nhất một điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng y = ax (a ≠ 0) là :

a) a > 0   b) a < 0

c) $a \leq 1$ d) Một kết quả khác.

81. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1 thì giá trị của m thoả :

a) $\frac{1}{2} < m \neq 1$ b) $m > \frac{1}{2}$

c) $-1 \neq m < \frac{1}{2}$ d) Một kết quả khác.

82. Xác định m để hàm số $y = x^4 - \frac{4}{3}mx^3 - 2x^2$ có một cực đại và một cực tiểu.

a) $m \geq 1$ b) $m < 1$

c) Mọi m d) Một kết quả khác.

83. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3mx + 3m^2}{x + 2m}$ đi qua điểm A(−1 ; 2) khi m bằng :

a) m = 3 b) $m = \frac{1}{2}$

c) $m = \frac{1}{2}$, m = 3 d) Một kết quả khác.

84. Số các điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 4}{x - 1}$ có toạ độ là những số nguyên là :

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4.

85. Giá trị của m mà đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - (m - 1)x + m$ tiếp xúc với trục hoành là :

a) m = 0 b) $m = -\frac{1}{4}$

c) m = 0, $m = -\frac{1}{4}$ d) Một kết quả khác.

86. Có bao nhiêu tiếp tuyến kẻ từ A(1 ; −1) đến đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0.

87. Phương trình đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 + 3$ tại hai điểm phân biệt là :

a) $y = 8x - 1$ b) $y = -8x - 1$

c) $y = 8x + 1$ d) Một phương trình khác.

88. Đồ thị hàm số $y = mx^3 - (m - 1)x^2 - (2 + m)x + m - 1$ đi qua bao nhiêu điểm cố định ?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

89. Đồ thị hàm số $y = (m + 1)x^3 - (2m + 1)x - m + 1$ đi qua bao nhiêu điểm cố định ?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

90. Phương trình $(x+1)^3 - k(x-1)^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt khi :

a) $k < \dfrac{27}{2}$ b) $k = \dfrac{27}{2}$

c) $k > \dfrac{27}{2}$ d) Một kết quả khác.

91. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ song song với đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ là :

a) $2x + y - 7 = 0$ b) $2x + y + 7 = 0$

c) $2x + y = 0$ d) Một kết quả khác.

92. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + m}{x^2 + 1}$. Xét các mệnh đề sau :

(i) Hàm số luôn luôn có cực trị

(ii) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $x - 2y + 2m = 0$

(iii) Tập hợp các trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị là đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$.

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Chỉ (i) đúng b) Chỉ (ii) đúng

c) Chỉ (iii) đúng d) Cả (i), (ii), (iii) đều đúng.

93. Giá trị của m để trên đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 + 9x + 4$ có một cặp điểm đối xứng nhau qua điểm gốc toạ độ O là :

a) $m > 0$ b) $m = 0$

c) $m < 0$ d) Một kết quả khác.

94. Có bao nhiêu cặp điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ và đối xứng nhau qua điểm $I\left(0\,;\dfrac{5}{2}\right)$?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4.

95. Giá trị của m để phương trình : $\dfrac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x + m(\tan x + \cot x) - 1 = 0$ có nghiệm là :

a) $|m| \le 4$ b) $|m| \ge 4$

c) $m \le -1 \vee m \ge 4$ d) Một kết quả khác.

96. Giá trị của k để phương trình $\cos^3 x + \sin^3 x = k\sin x\cos x$ có nghiệm là :

a) $|k| \geq \sqrt{2}$ b) $|k| \leq \sqrt{2}$

c) Mọi k d) Một kết quả khác.

97. Giá trị của m để bất phương trình : $(m-1)6^x - \dfrac{2}{6^x} + 2m + 1 \leq 0,\ \forall x \in [0;1]$ là :

a) $m > \dfrac{1}{2}$ b) $m \leq \dfrac{1}{2}$

c) $0 < m < 1$ d) Một kết quả khác.

98. Bất phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x+m} < m$ có nghiệm khi :

a) $0 < m < 1$ b) $m > 1$

c) $m \leq 1$ d) Một kết quả khác.

99. Giá trị của a để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (a+1)x - 3}{x+a}$ tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 5$ là :

a) $a = 3$ b) $a = -3$

c) $a = \pm 3$ d) Một kết quả khác.

100. Giá trị của m để điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx - m + 8}{x-1}$ ở về hai phía của đường thẳng $9x - 7y - 1 = 0$ là :

a) $-3 < m < \dfrac{9}{7}$ b) $m < -3$

c) $m > \dfrac{9}{7}$ d) Một kết quả khác.

101. Họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = x^3 + (m-3)x^2 - (2m-1)x - 3(m+1)$ đi qua điểm cố định nào ($\forall m \in \mathbf{R}$) ?

a) $(-1;-8)$ b) $(-3;0)$

c) $(3;0)$ hay $(-1;-8)$ d) $(-1;-8)$ hay $(-3;0)$.

102. Với giá trị nào của m thì đường cong $(\mathscr{C}_m)$:

$y = x^3 + (m-3)x^2 - (2m-1)x - 3(m+1)$ cắt Ox tại ba điểm có hoành độ dương ?

a) $-1 \leq m \leq 2 - 2\sqrt{2}$ b) $-1 < m < 2(1-\sqrt{2})$

c) $m > -1$ d) $m > 2 + 2\sqrt{2}$.

103. Gọi $(\mathscr{C}_m)$ là đồ thị của hàm số $y = f(x) = \dfrac{mx + a}{bx + m - 1}$. Hai số thực khác không a và b phải thoả điều kiện nào sau đây thì họ $(\mathscr{C}_m)$ chỉ có một điểm cố định duy nhất ?

a) $4ab + 1 = 0$ b) $ab = 1$ c) $4ab = 1$ d) $ab = 4$.

104. Điểm cố định duy nhất của họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = f(x) = \dfrac{mx + a}{bx + m - 1}$ là :

a) $\left(\dfrac{1}{2b} ; \dfrac{1}{2b}\right)$; $\forall m$

b) $\left(\dfrac{1}{a} ; \dfrac{1}{2b}\right)$; $\forall m$

c) $\left(\dfrac{1}{a} ; \dfrac{1}{a}\right)$; $\forall m$

d) $\left(\dfrac{1}{2b} ; \dfrac{1}{2b}\right)$; $\forall m \neq \dfrac{1}{2}$.

105. Khi họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = \dfrac{2x^2 + (6 - m)x + 2a}{mx + 2}$, đi qua 3 điểm cố định (có thể trừ ra một giá trị hữu hạn nào đó của m) thì tham số a phải thoả điều kiện nào sau đây ?

a) $a \neq -1$

b) $a < \dfrac{5}{4}$

c) $a < \dfrac{5}{9} \wedge a \neq 1$

d) $a > \dfrac{5}{4} \wedge a \neq -1$.

106. Họ đường cong $(\mathscr{C}_\alpha)$: $y = f(x) = \dfrac{(x^2 - 1)\cos\alpha + x\cos\alpha}{x - \cos\alpha}$ $\left(0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ có những điểm cố định nào ?

a) $M_1(0 ; 1)$

b) $M_2\left(\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} ; 0\right)$

c) $M_3\left(\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} ; 0\right)$

d) Cả ba điểm M_1, M_2, M_3 ; $\forall \alpha \neq \beta \left(\cos\beta = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

107. Với giá trị nào của α thì $(\mathscr{C}_\alpha)$: $y = f(x) = \dfrac{(x^2 - 1)\cos\alpha + x\cos\alpha}{x - \cos\alpha}$ cắt Ox tại 3 điểm có hoành độ dương ?

a) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ b) $\alpha = 0$ c) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ d) $\alpha \in \varnothing$.

108. Cho họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $F(x\,;y) = axy + m(y - x) + y + a = 0$. Với giá trị nào của a thì $(\mathscr{C}_m)$ có duy nhất một điểm cố định ?

a) $a = \pm\frac{1}{2}$ b) $a \in \left\{0\,;\pm\frac{1}{2}\right\}$

c) $a = 0$ d) $a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$.

109. Tập hợp những điểm mà đồ thị $(\mathscr{C}_m)$: $y = \frac{mx^2 + 3mx - 4m + 1}{x + 2}$ không thể đi qua $(\forall m \neq 0)$ là :

a) $(d_1): x = -2$ b) $(d_2): x = 1\left(\forall y \neq \frac{1}{3}\right)$

c) $(d_3): x = -4\left(\forall y \neq -\frac{1}{2}\right)$ d) Cả a), b) và c) đều đúng.

110. Trên parabol (P) : $y = x^2 + 1$ có các điểm mà họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = x^3 - 2mx^2 - mx$ không thể đi qua với mọi m là :

a) (0 ; 1) và $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{5}{4}\right)$ b) (0 ; 1) và (1 ; 2)

c) (1 ; 2) và $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{5}{4}\right)$ d) (–1 ; 2) và (1 ; 2).

111. Tiệm cận xiên của họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = \frac{2mx^2 + m(m+1)x - m^2 + 3}{x + m}$ $(\forall m \neq 0)$ không đi qua các tập hợp điểm nào ?

a) $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$ b) Miền trong $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

c) Miền ngoài $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ d) Một kết quả khác.

112. Cho điểm $A(x_0\,;y_0)$ và đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = \frac{(m-2)x^2 - m^2}{2x + m}$. Khi có hai đồ thị $(\mathscr{C}_m)$ đi qua A thì x_0 phải thoả ?

a) $x_0 < 3$ b) $x_0 < 3 \vee x_0 > 4$

c) $x_0 < -3$ d) $x_0 < -3 \vee x_0 > 6$.

113. Những điểm trên đường thẳng (d) : y = 1 mà không thể có đường cong nào của họ $(\mathscr{C}_m)$: $y = \dfrac{m^2x^2 + 1}{x}$ đi qua là :

a) $M(x_0 < 1 ; 1)$ b) M(1 ; –1)

c) M(–1 ; 1) d) $M(x_0 < 2 ; 1)$.

114. Xét họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $F(x ; y) = xy - 2my - 2mx + 2m^2 - 4m$.

Tập hợp những điểm M sao cho có đúng một đường cong của họ $(\mathscr{C}_m)$ đi qua là :

a) Đường thẳng (d) : 2x – 5y + 2 = 0

b) Đường cong (C) : $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$

c) Đường cong (E) : $2x^2 + y^2 = 4$

d) Đường cong (H) : $x^2 - 4y = 4$.

115. Xét họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $F(x ; y) = xy - 2my - 2mx + 2m^2 - 4m$.

Tập hợp những điểm $M(x_0 ; y_0)$ mà có đúng hai đường cong của họ $(\mathscr{C}_m)$ đi qua là :

a) Miền (E) : $2x + y^2 \geq 2$

b) Miền (C) : $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 > 0$

c) Đường thẳng (D) : 2x + 3y – 1 = 0

d) Miền (Ω) : 2 – x + 3y < 0.

116. Xét họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $F(x ; y) = xy - 2my - 2mx + 2m^2 - 4m$.

Tập hợp những điểm M ∈ (d) : x = 1 sao cho qua M có ít nhất ba đường cong của họ $(\mathscr{C}_m)$ đi qua là :

a) M (1 ; – 3) b) M (1 ; ± 3)

c) $M(1 ; y_0 \leq 5)$ d) Một kết quả khác.

117. Cho hàm số : $y = \dfrac{-m(x+1) + x + 2}{m(x+1) - 1}$, $\forall m \neq 0$. Phương trình đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị $(\mathscr{C}_m)$ của hàm số tại một điểm cố định A được cho bởi câu nào sau đây ?

a) y = x – 1 và A(1 ; 0) b) y = –x + 1 và A(–1 ; 2)

c) y = x + 1 và A(–1 ; 0) d) y = x – 1 và A(–1 ; –2).

118. Họ đường thẳng $(d_m): y = mx + m^3$ luôn luôn tiếp xúc với đường cong cố định nào sau đây $(\forall m)$?

a) $y = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{-x^3}$ b) $y = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{-x}$

c) $27y^2 + 4x^3 = 0\ (x \le 0)$ d) $27y^2 - 4x^3 = 0\ (x \ge 0)$.

119. Họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = f(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + mx + \frac{3 - m^2}{4}$ luôn luôn tiếp xúc với một đường cong cố định là :

a) $y = f(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5x^2$

b) $y = f(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2$

c) $y = f(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4}$

d) $y = f(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 - \frac{3}{4}$.

120. Đường tiệm cận xiên (d_m) của đồ thị hàm số :

$y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx - (m^3 - m^2 - 2)}{x - m}, \forall m \ne -1$ luôn luôn tiếp xúc với một đường cong cố định là :

a) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}, (x \ne 3)$ b) $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$

c) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ d) $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

121. Xét họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = -x^3 + 2(m+1)x^2 - 5mx + 2m$.

Mệnh đề nào sau đây sai ?

a) $(\mathscr{C}_m)$ qua hai điểm cố định A(2 ; 0), $B\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{8}\right), \forall m$

b) $(\mathscr{C}_m)$ luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu với mọi m.

c) $(\mathscr{C}_m)$ tiếp xúc Ox khi $m \in \left\{0 ; 1 ; \frac{4}{3}\right\}$

d) Cả ba mệnh đề a), b) và c) đều sai.

122. Tất cả giá trị nào của x_0 mà các tiếp tuyến của họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$:

$y = f(x) = (3m+1)x^3 - \frac{1}{2}x^2 - mx - m + 1$ tại $(x_0\ ;\ y_0) \in (\mathscr{C}_m)$ luôn song song với nhau là :

a) $x_0 = \frac{1}{3}$ b) $x_0 = -\frac{1}{3}$ c) $x_0 = \pm\frac{1}{3}$ d) $|x_0| \le \frac{1}{3}$.

123. Xét họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$:

$$y = f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 4m^2 - 2m$$

Mệnh đề nào sau đây sai ?

a) $(\mathscr{C}_m)$ luôn có điểm cực đại và điểm cực tiểu

b) $(\mathscr{C}_m)$ qua hai điểm cố định A(2 ; 0) và B(3 ; –1)

c) Khi $m = 5 \vee m = -\frac{11}{3} \vee m = -\frac{13}{3}$ thì $(\mathscr{C}_m)$ tiếp xúc với đường thẳng (d) : $y = 98 - 49x$

d) Khi $-2 \le m \le \frac{3}{2}$ thì $(\mathscr{C}_m)$ là đồ thị của hàm số đồng biến trên [2 ; +∞).

124. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(\mathscr{C}_m)$: $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm uốn là :

a) $y = 3x + 3$ b) $y = 3(1 - x)$

c) $y = 1 - 3x$ d) $y = -3(1 - x)$.

125. Tiếp tuyến với đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 3$ có hệ số góc k bé nhất là :

a) $k = 1$ b) $k = \frac{1}{2}$

c) Tiếp tuyến tại điểm uốn d) Cả a) và c) đều đúng.

126. Với giá trị nào của m thì tại giao điểm A của đồ thị $(\mathscr{C})$:

$y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x + m}$ $(m \neq 0)$ với trục Ox tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ song song với đường thẳng (d) : $y + 10 = x$.

a) $m = -1$ b) $m = -\frac{1}{5}$

c) $m = -1,\ m = -\frac{1}{5}$ d) $m = 0,\ m = -\frac{1}{5}$.

127. Với giá trị nào của a và b thì đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ cắt trục Oy tại A(0 ; –1) và tiếp tuyến tại A của $(\mathscr{C})$ có hệ số góc k = –3 ?

a) a = 2, b = 1 b) a = 2, b = –1

c) a = –1, b = –2 d) a = –2, b = –1.

128. Hãy tìm giá trị k sao cho tồn tại b để đường thẳng y = kx + b tiếp xúc với đường cong $(\mathscr{C})$: $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - \dfrac{1}{3}$.

a) $k \geq -1$ b) $k > -1$ c) $-1 \leq k \leq 1$ d) $-1 \leq k \leq 0$.

129. Phương trình tiếp tuyến (T) với đường cong $(\mathscr{C})$: $y = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$, biết rằng tiếp tuyến (T) vuông góc với đường thẳng 3y – x + 6 = 0 là :

a) y = –3x – 11 b) y = –3x – 3

c) Cả a) và b) đều đúng d) y = 11 – 3x.

130. Đường thẳng (d) qua A(0 ; –1) và tiếp xúc với đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ có hệ số góc là :

a) k = 0 b) $k = 0,\ k = -\dfrac{9}{8}$

c) $k = -\dfrac{9}{8}$ d) $k = 0,\ k = \dfrac{8}{9}$.

131. Để từ điểm gốc toạ độ O có thể kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị $(\mathscr{C}_\alpha)$: $y = \dfrac{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}{x + 2\sin\alpha}$ thì α phải thoả (k ∈ Z) :

a) $\alpha = k\pi$ b) $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

c) $\begin{cases} \alpha \neq k\pi \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$ d) $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

132. Từ điểm $A\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{7}{5}\right)$ trong mặt phẳng Oxy có thể dựng được đến đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ bao nhiêu tiếp tuyến ?

a) Một tiếp tuyến b) Hai tiếp tuyến

c) Không có tiếp tuyến nào d) Ba tiếp tuyến.

133. Qua điểm A(−2 ; 5) trong mặt phẳng Oxy có thể kẻ được đến đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = x^3 - 9x^2 + 17x + 2$ bao nhiêu tiếp tuyến ?

a) Một tiếp tuyến　　　　b) Hai tiếp tuyến

c) Ba tiếp tuyến　　　　d) Không có tiếp tuyến nào.

134. Với giá trị nào của m thì qua điểm A(0 ; 1) trong mặt phẳng Oxy không có đường thẳng nào tiếp xúc với đồ thị $(\mathscr{C}_m)$: $y = \dfrac{2x^2 + mx + m}{x + 1}$?

a) $m < 1$　　b) $m \le 1$　　c) $-1 < m < 1$　　d) $m \ge -1$.

135. Cho điểm $M \in (\mathscr{C}): y = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + \dfrac{5}{2}$ có hoành độ $x_M = a$. Với giá trị nào của a thì tiếp tuyến với đồ thị $(\mathscr{C})$ tại M sẽ cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm nữa (khác với M) ?

a) $a = -1$　　　　b) $a \ne \pm 1$

c) $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$　　　　d) Cả b) và c) đều đúng.

136. Tập hợp các điểm $M(x_M ; y_M)$ nằm trên đường thẳng (d) x = −1 mà từ đó có thể kẻ được đến đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$ ít nhất một tiếp tuyến thì y_M phải thoả :

a) $y_M < -1$　　b) $y_M \ge -1$　　c) $y_M \le -1$　　d) $-1 \le y_M \le 1$.

137. Tập hợp các điểm $M(x_M ; y_M)$ nằm trên đường thẳng (d) : x = − 1 mà từ đó có thể kẻ được để đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$ ba tiếp tuyến, trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc nhau thì y_M phải thoả :

a) $y_M = 1 + \sqrt{3}$　　b) $y_M = 1 - \sqrt{3}$　　c) $y_M = 1 \pm \sqrt{3}$　　d) $y_M = \sqrt{3}$.

138. Để điểm $M(x_M ; y_M)$ nằm trên đường thẳng (d) : y = −2 mà từ đó có thể kẻ được đến đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = x^2(x - 3) + 2$ ba tiếp tuyến thì x_M phải thoả :

a) $x_M \ne 2$　　　　b) $x_M < -1 \vee \dfrac{5}{3} < x_M \ne 2$

c) $-1 \le x_M \le \dfrac{5}{3}$　　　　d) $x_M \in \varnothing$.

139. Tập hợp các điểm $M(x_M ; y_M)$ nằm trên đường thẳng (d) : y = –2 mà từ đó có thể kẻ được đến đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = x^2(x-3)+2$ ba tiếp tuyến, trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc nhau thì x_M phải thoả :

a) $x_M = -\frac{55}{27}$ b) $x_M = \frac{55}{27}$ c) $x_M = -\frac{27}{55}$ d) $x_M = 2$.

140. Để từ các điểm M(0 ; b) kẻ được đến đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = \frac{2x-1}{x^2}$ hai tiếp tuyến thì b phải thoả :

a) $0 \neq b < \frac{4}{3}$ b) $b < \frac{4}{3}$

c) $-\frac{4}{3} \leq b \leq \frac{4}{3}$ d) $0 \neq |b| > \frac{4}{3}$.

141. Biết rằng với $0 \neq b < \frac{4}{3}$ thì từ các điểm M(0 ; b) kẻ được đến đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = \frac{2x-1}{x^2}$ hai tiếp tuyến. Khi đó phương trình đường thẳng nối hai tiếp điểm là :

a) $y = \frac{b}{9}x + \frac{2b}{3}$ b) $y = \frac{b}{2}x + \frac{1-b}{3}$

c) $y = \frac{b}{3} + \frac{8}{9} - bx$ d) $y = -\frac{2}{9}bx + \frac{3b+8}{9}$.

142. Các điểm M(0 ; b) nằm trên trục tung mà từ đó có thể kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = \sqrt{2x^2+1}$ thì b phải thoả :

a) $0 \leq b \leq 1$ b) $0 < b \leq 1$ c) $0 < b < 1$ d) $b \in \{0 ; \pm 1\}$.

143. Xét các mệnh đề sau :

(i) Tồn tại duy nhất một tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$

(ii) Không tồn tại một tiếp tuyến nào đi qua tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}(ad \neq bc)$.

(iii) Không tồn tại một tiếp tuyến nào đi qua giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{Ax^2+Bx+C}{ax+b}$ (nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử)

(iv) Luôn luôn tồn tại một tiếp tuyến đi qua điểm cực trị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$.

Mệnh đề nào đúng ?

a) Chỉ (i) và (ii) b) Chỉ (ii) và (iii)

c) Chỉ (iii) và (iv) d) Cả (i), (ii), (iii) và (iv).

144. Trên đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có bao nhiêu cặp điểm M_1 và M_2 để các tiếp tuyến tại M_1 và M_2 song song với nhau ?

a) Hai cặp điểm M_1 và M_2 b) Ba cặp điểm M_1 và M_2

c) Một cặp điểm M_1 và M_2 d) Vô số cặp điểm M_1 và M_2.

145. Phương trình tiếp tuyến chung của họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$:

$$y = mx^2 - 2(2m + 1)x + 4m + 1, \forall m \neq 0 \text{ là :}$$

a) $y = 2x + 1$ b) $y = 1 - 2x$ c) $y = 2x - 1$ d) $y = 1 - x$

146. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy mà từ đó có thể kẻ được đến đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ hai tiếp tuyến vuông góc với nhau là :

a) Đường tròn tâm O bán kính R = 4

b) Mặt phẳng Oxy bỏ đi hai đường tiệm cận của $(\mathscr{C})$

c) Phần mặt phẳng Oxy chắn bởi hai tiệm cận có chứa hai điểm cực trị của $(\mathscr{C})$

d) Đường tròn tâm O, bán kính R = 2 bỏ đi bốn điểm là giao điểm của đường tròn này với hai đường tiệm cận của $(\mathscr{C})$

147. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) : $y = x + m$ và đường cong $(\mathscr{C})$: $y = x(4 - x)$ có hai giao điểm phân biệt ?

a) $m < \dfrac{4}{9}$ b) $m < \dfrac{9}{4}$ c) $m \leq \dfrac{9}{4}$ d) $m > \dfrac{4}{9}$.

148. Với giá trị nào của m thì đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = x^3 + mx^2 - m$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt ?

a) $|m| > \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $|m| \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $0 \neq |m| > \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ d) $0 \neq |m| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

149. Với giá trị nào của m thì đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ dương ?

a) $|m| > 1$ b) $\sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$

c) $-\sqrt{3} < m < -1$ d) Một kết quả khác.

150. Hãy cho biết điều kiện của a và b để đường thẳng (d) : y = ax + b cắt đồ thị $(\mathscr{C})$: $x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ tại ba điểm phân biệt A, B, C mà AB = BC theo thứ tự đó.

a) $a + b = -10 \wedge a > -12$ b) $a + b = -10 \wedge a > 12$

c) $a - b = 5 \wedge a > -10$ d) $a - b = 10 \wedge a < 5$.

151. Khi đồ thị $(\mathscr{C}_\alpha)$ của hàm số $y = 2x^3 - x^2 - \alpha$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 thì giá trị của tổng $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ là :

a) 2 b) $\dfrac{1}{4}$ c) ± 2 d) 1.

152. Khi đồ thị $(\mathscr{C}_a)$ của hàm số $y = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$ cắt đường phân giác thứ nhất tại ba điểm phân biệt A, B, C và AB = AC thì giá trị của a là :

a) 0 b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $0, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

153. Với giá trị nào của m thì đồ thị $(\mathscr{C}_m)$: $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2mx$ cắt trục Ox tại 4 điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng ?

a) m = ±2 b) m = ±1 c) m = 1 d) m = 0.

154. Với giá trị nào của a thì đường thẳng (d) : y = ax + 3 không cắt đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = \dfrac{3x + 4}{x - 1}$

a) $-28 \leq a < 0$ b) $a \geq 0$ c) $2 \leq a \leq 27$ d) $a \in [1 ; 2]$.

155. Với giá trị nào của a thì đường thẳng (d) : y = x − 1 cắt đồ thị $(\mathscr{C}_a)$: $y = \dfrac{-x^2 + x + a}{x + a}$ tại hai điểm phân biệt ?

a) $a < -6 - 4\sqrt{6}$ b) $a > -6 + 4\sqrt{6}$

c) $a < -6 - 4\sqrt{2} \vee a > -6 + 4\sqrt{2}$ d) $-1 \leq a \leq 1$.

156. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) : $y = -x - 4$ cắt đồ thị $(\mathscr{C}_m)$:

$y = \dfrac{x^2 + (m+2)x - m}{x - 1}$ tại hai điểm đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất ?

a) $m = 1$ b) $m = -1$ c) $m = 2$ d) $m = -3$.

157. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) : $y = m - x$ cắt đồ thị $(\mathscr{C})$:

$y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ tại hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $(\Delta) : y = x + 3$?

a) $m = \pm 9$ b) $m = 9$ c) $m = -9$ d) $m = -3$.

158. Với giá trị nào của m thì phương trình : $x^3 - 3x + 1 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt ?

a) $m > 3$ b) $m < -1$ c) $-1 < m < 3$ d) $m = -1$.

159. Với giá trị nào của m thì phương trình : $x^3 - 3x + 1 - m = 0$ có nghiệm kép ?

a) $m = 2$ b) $m = 1$ c) $m = -1$ d) $m = 3$.

160. Với giá trị nào của α thì phương trình : $4x^3 - 3x - \cos 3\alpha = 0$ luôn luôn có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1 ; 1)$?

a) $\forall \alpha$ b) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

c) $\alpha \neq \dfrac{k\pi}{3} (k \in Z)$ d) $\alpha = \dfrac{k\pi}{2} (k \in Z)$.

161. Với giá trị nào của m thì phương trình : $x^2 + 4x + \left(\log_{\frac{1}{2}} m\right).|x + 6| - 3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt ?

a) $m < -14$ b) $m < 2$ c) $m > \dfrac{1}{16}$ d) $m > 2^{14}$.

162. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^3 - 3x = \dfrac{2m}{m^2 + 1}$ có ba nghiệm phân biệt ?

a) $\forall m$ b) $-2 < m < 2$ c) $0 \le m < 2$ d) $-2 < m < 0$.

163. Với giá trị nào của tham số k thì phương trình : $x^2 - 2x - 2 = \dfrac{k}{|x - 1|}$ có ba nghiệm đơn ?

a) $k < -2$ b) $k \in \varnothing$ c) $-2 < k < 0$ d) $k = 0$.

164. Phương trình $2x^3 - \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}} + 1 = 0$ có nghiệm :

a) $x = 0$ b) $x = -1$

c) $x = 2$ d) Một nghiệm khác nữa.

165. Tuỳ theo tham số m, phương trình : $x + m^7 - \sqrt[7]{m+1-x} - 1 = 0$ có nghiệm là :

a) $x = m - 1$ b) $x = m^7 - 1$

c) $x = m - 1 + m^7$ d) Một kết quả khác.

166. Với giá trị nào của $m \neq 0$ thì : $m^2x^4 - 2x^2 + m \geq 0, \forall x$

a) $m \geq 1$ b) $0 \neq m < 1$ c) $|m| < 1$ d) $m \neq \pm 1$.

167. Các số a và b phải thoả điều kiện nào để :

$$y = |f(x)| = |8x^4 + ax^2 + b| \leq 1, \forall x \in [-1 ; 1]$$

a) $a = 1, b = -8$ b) $a = -1, b = 8$ c) $a = 1, b = 1$ d) $a = -8, b = 1$.

168. Đồ thị $(\mathscr{C}_m)$ của hàm số : $y = (m+2)x^3 + 2(m+2)x^2 - (m+3)x - 2m + 1$ có ba điểm cố định A, B, C thoả :

a) ΔABC đều b) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

c) A, B, C thẳng hàng d) Cả b) và c).

169. Đồ thị $(\mathscr{C}_m)$: $y = (m-3)x^3 - 4(m-3)x^2 - (m+1)x + m$, có ba điểm cố định và chúng cùng nằm trên đường thẳng :

a) $y = -4x + 3$ b) $y = 4x - 3$ c) $y = 4x + 3$ d) $y = x - 3$.

170. Phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm cực trị của đồ thị $(\mathscr{C}_m)$: $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m, \forall m$ có dạng :

a) $y = -8x$ b) $y = -8x + m - 3$

c) $y = 8x + m - 3$ d) $y = 8x$.

171. Phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị $(\mathscr{C}_m)$: $y = -2x^3 + x + 1 - m(x^2 - 1)$; $\forall m$ là :

a) $y = \dfrac{m^2}{9}x + 1$ b) $y = \dfrac{m^2}{9}x + \dfrac{17}{18}$

c) $y = x - \dfrac{17}{18}m$ d) $y = \left(\dfrac{m^2}{9} + \dfrac{2}{3}\right)x + 1 + \dfrac{17}{18}m$.

172. Giả sử hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}(a, a' \neq 0)$ luôn luôn có cực đại và cực tiểu. Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số là :

a) $y = \dfrac{a}{a'x} + \dfrac{ba' - ab'}{a'^2}$ b) $y = \dfrac{a}{a'}$

c) $y = \dfrac{2a}{a'}x + \dfrac{b}{a'}$ d) $y = \dfrac{a}{a'}x + \dfrac{b}{a'}$.

173. Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị $(\mathscr{C}_m)$: $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x - 1}$ là :

a) $y = 2x + m$ $(m > -2)$ b) $y = 2x + m$ $(m < -2)$

c) $y = -x + 2m$ $(m < -2)$ d) $y = -x + 2m(m > -2)$.

174. Ba điểm uốn nếu có của đồ thị hàm số : $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 3x + 3}$ phải cùng nằm trên đường nào sau đây ?

a) $3y^2 = x$ b) $x^2 + y^2 = 3$ c) $y = \dfrac{x}{3}$ d) $y^2 = \dfrac{x}{3}$.

175. Giả sử đồ thị $(\mathscr{C}_m)$: $y = \dfrac{x + m}{x^2 + 1}$; $\forall m \in D_m$ có 3 điểm uốn thì chúng phải cùng nằm trên đường nào sau đây ?

a) $y = \dfrac{x^2 + 3m}{4}$ b) $y = \dfrac{x - 3m}{4}$

c) $y^2 = mx$ d) $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}m$.

176. Số lượng các điểm cực trị của đồ thị hàm số : $y = x^4 - x^3 - 5x^2 + 1$ là bao nhiêu và chúng cùng nằm trên đường nào sau đây ?

a) 2 và $y = 2x^2 - 3$ b) 2 và $y^2 = 3x$

c) 3 và $y = x^2 + 1$ d) 3 và $y = -\dfrac{43}{16}x^2 - \dfrac{5}{8}x + 1$.

177. Đường thẳng qua các điểm uốn của đồ thị $(\mathscr{C}_m)$ của hàm số : $y = f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + m$ là :

a) $y = \frac{24}{15}x + m - \frac{72}{13}$ b) $y = \frac{15}{24}x + m - \frac{13}{72}$

c) $y = m - \frac{15}{24}x$ d) $y = \frac{73}{12} - x + m$.

178. Tập hợp những điểm nằm trên đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = x^3 + 2x^2 + 3x + m$ mà tại đó tiếp tuyến với $(\mathscr{C}_m)$ cùng phương với đường thẳng (d) : y = 2x + 1 là đường có phương trình là :

a) $x^2 + y^2 = 0$ b) $x = -1$

c) $x = -\frac{1}{3}$ d) Cả b) và c) đều đúng.

179. Gọi A và B là hai giao điểm của đường thẳng (d) đi qua M(1 ; 4) và parabol (P) : $y = x^2$. Tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng AB là đường có phương trình :

a) $y = 2x^2 - x + 2$ b) $y = 2x^2 - 2x + 4$

c) $2x - x^2$ d) $y = \frac{x^2}{4} + x - 2$.

180. Cho họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = \frac{x^2 - 2mx + m^2 + 2m + 2}{x^2 + m^2 + m + 3}$. Tập hợp các giao điểm của $(\mathscr{C}_m)$ với trục Ox là đường có phương trình :

a) $y = 0\left(x \le -\frac{1}{2}\right)$ b) $x = 0\left(y \le -\frac{1}{2}\right)$

c) $y = 1\left(x > \frac{1}{2}\right)$ d) $y = -1$.

181. Cho họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = \frac{x^2 - 2mx + m^2 + 2m + 2}{x^2 + m^2 + m + 3}$. Tập hợp các giao điểm của $(\mathscr{C}_m)$ với trục Oy là đường có phương trình :

a) y = 1 b) x = – 1 (y ≥ 2)

c) $x = 0\left(\frac{8 - 2\sqrt{5}}{11} \le y \le \frac{8 + 2\sqrt{5}}{11}\right)$ d) $x = 0\left(|y| \le \frac{8 + 2\sqrt{5}}{11}\right)$.

182. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy mà từ đó có thể kẻ đến $(\mathscr{C})$: $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ hai tiếp tuyến vuông góc với nhau là đường có phương trình :

a) $x^2 + y^2 = 2^2$ (bỏ đi 4 điểm) b) $(x-1)^2 + y^2 = 2^2$ (bỏ đi 4 điểm)

c) $(x-1)^2 - y^2 = 2^2$ (bỏ đi 4 điểm) d) $x^2 + (y-1)^2 = 2$ (bỏ đi 4 điểm).

183. Gọi A và B là hai giao điểm (nếu có) của hai đường :

$(\mathscr{C})$: $y = x^3 + 2x^2 + 7$ và $(\mathscr{C}_m)$: $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$.

Tập hợp các trung điểm I của đoạn AB là đường có phương trình :

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^4 - 4x$

c) $y = 4x^3 + 4x^2 + 18x + 19$ d) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

184. Gọi A và B là hai điểm di động trên parabol (P) : $y = x^2$. Tập hợp các trung điểm I của dây cung AB là đường có phương trình :

a) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$ b) $y = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$

c) $y = x^2 + 3x + 1$ d) $y = x^2 + \dfrac{1}{4x^2+1}$.

185. Tập hợp các tâm đối xứng I của họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = \dfrac{x^2 - mx - 6}{x + 2m}$ là đường có phương trình :

a) $y = x^2$ $(x \neq 1)$ b) $y = \dfrac{5}{2}x$ $(x \neq 2)$

c) $y = x$ $(x \neq \pm 2)$ d) $y = 1 - x$ $(x \neq -1)$.

186. Gọi M và N là hai giao điểm của đường thẳng (d) qua A(1 ; 2) với đường cong $(\mathscr{C})$: $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$. Tập hợp các trung điểm I của đoạn MN là đường :

a) $y = x - 11$ $(x > 3)$ b) $y = 1 - x$ $(x > -3)$

c) $x = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2} \neq y > \dfrac{11}{8}\right)$ d) $y = x^2 (\forall x)$.

187. Cho parabol (P) : $y = x^2 - 2mx + 2m - 1$. Gọi A và B là hai giao điểm phân biệt khác gốc O của (P) với trục Ox ; C là giao điểm của (P) với trục Oy. Tập hợp các trọng tâm G của tam giác ABC là đường :

a) $y = \dfrac{3x-1}{3}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ b) $y = -x$ $(x \neq 0)$

c) $y = -x + 1$ $(x \neq 1)$ d) $y = x^2 - 1$ $(x \neq \pm 1)$.

188. Những điểm trong mặt phẳng Oxy mà tiệm cận xiên của họ đường cong $(\mathscr{C}_\alpha)$:

$y = \dfrac{x^2 + 3x\cos\alpha}{x + 4\sin\alpha}$ đi qua là :

a) $y = x - 5$ b) $y = x + 5$

c) $x - 5 \le y \le x + 5$ d) $(y - x)^2 - 25 = 0$.

189. Quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị $(\mathscr{C}_m)$:

$y = \dfrac{x^2 + x + m}{x^2 - 1}$ là :

a) $y = x + 3\ (x > 1)$ b) $y = -x + 3$

c) $y = -x\ (x > 1)$ d) $y = \dfrac{1}{2}x + 1\ (|x| > 1)$.

190. Cho họ đường cong $(\mathscr{C}_{\lambda,\theta})$: $y = \dfrac{(-\lambda\cos^2\theta)(x - \lambda\sin^2\theta)}{x}$ với $\theta \in \left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\lambda > 1$. Quỹ tích các điểm cực tiểu của $(\mathscr{C}_{\lambda,\theta})$ là :

a) $y = 2x - \lambda\ \left(\dfrac{-\lambda}{2} \le x < 0\right)$ b) $y = 2x - \lambda\ \left(0 \le x < \dfrac{\lambda}{2}\right)$

c) $y = x + \lambda$ d) $y = x - \lambda$.

191. Khoảng cách ngắn nhất giữa đường thẳng (D) : $y = x - 2$ và parabol (P) : $y = x^2 - 2x + 2m$ là :

a) $\dfrac{7}{8}$ b) $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{7\sqrt{2}}{8}$ d) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$.

192. Cho parabol (P) : $y = -x^2 + 4x$ và hai điểm : $A(-4 ; 0)$, $C(x ; 0)$, $\forall x \in [0 ; 4]$. Tìm điểm B tuỳ ý trên (P) sao cho ΔABC $(\hat{C} = 90^0)$ có diện tích lớn nhất.

a) $B\left(-\dfrac{4}{\sqrt{2}} ; 3\right)$ b) $B\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3} ; \dfrac{16(\sqrt{3} - 1)}{3}\right)$

c) $B\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}} ; \sqrt{3} - 4\right)$ d) $B(4\sqrt{2} ; 4 - \sqrt{3})$.

193. Từ điểm M tuỳ ý trên (H) : $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$ ta hạ MH, MK vuông góc với hai tiệm cận đứng và ngang theo thứ tự đó. Tích số MH.MK có giá trị không đổi là :

a) 4 b) $\dfrac{16}{3}$

c) $\dfrac{7}{2}$ d) Một kết quả khác.

194. Cho đường cong $(\mathscr{C})$: $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. Tìm điểm $N \in (\mathscr{C})$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai trục Ox và Oy là ngắn nhất.

a) $N\left(\sqrt{3} ; 1\right)$ b) $N\left(1-\sqrt{3} ; 1-\sqrt{3}\right)$

c) $N\left(2-\sqrt{3} ; 3-\sqrt{3}\right)$ d) $N\left(-1 ; -\dfrac{1}{2}\right)$.

195. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = \dfrac{x^3+1}{x}$, biết rằng tiếp tuyến đó tạo với hai trục Ox, Oy một tam giác có diện tích $S = \dfrac{1}{2}$ (đvdt)

a) $y = x + 1$ b) $y = \dfrac{9}{\sqrt[3]{25}}x - \dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$

c) $y = -2x + 3$ d) Cả a) và b) đều đúng.

196. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) : $y = -x + m$ cắt đồ thị (H) : $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua đường thẳng (Δ) : $y = x + 3$?

a) $m = 1$ b) $m = 2$ c) $m = 9$ d) $m = -9$.

197. Với giá trị nào của m thì đồ thị $(\mathscr{C}_m)$: $y = \dfrac{-x^3}{m} + 3mx^2 - 2$ nhận $I(1 ; 0)$ làm tâm đối xứng và $(\mathscr{C}_m)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ tạo thành một cấp số cộng ?

a) $m = 1$ b) $m = -1$ c) $m = 3$ d) $m = -3$.

198. Với giá trị nào của m thì trên đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $y = \dfrac{x^2+2m^2x+m^2}{x+1}$ có hai điểm đối xứng nhau qua gốc O ?

a) $m > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $m < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $1 \neq |m| > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $m < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee m > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

199. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) : $y = m$ cắt đồ thị $(\mathscr{C})$: $y = x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x+1}$ tại hai điểm A và B mà $OA \perp OB$?

a) $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ b) $m = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) $m = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ d) $m = 2$.

200. Với giá trị nào của k thì tiếp tuyến (T) với đồ thị $(\mathscr{C}_k)$: $y = x^3 - kx + k - 1$ tại giao điểm của $(\mathscr{C}_k)$ với trục Oy chắn trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích là 4 (đvdt) ?

a) $k_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$

b) $k_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$; $k_{3,4} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

c) $k_{1,2} = -3 + 2\sqrt{2}$

d) $k_1 = 5 - 2\sqrt{6}$; $k_2 = -3 - 2\sqrt{2}$.

ĐÁP SỐ

1b	2a	3c	4b	5d	6a	7c	8a	9d	10a
11c	12b	13d	14c	15b	16d	17a	18d	19a	20b
21c	22d	23c	24c	25a	26c	27c	28b	29d	30c
31b	32b	33a	34c	35c	36d	37c	38b	39c	40c
41c	42c	43a	44c	45d	46d	47c	48c	49c	50d
51b	52c	53b	54c	55b	56a	57a	58c	59b	60b
61b	62c	63b	64d	65d	66d	67d	68b	69a	70b
71b	72b	73b	74d	75b	76a	77d	78a	79c	80b
81a	82c	83c	84d	85c	86b	87b	88c	89d	90c
91a	92d	93c	94b	95b	96d	97b	98b	99b	100a
101c	102b	103a	104d	105d	106d	107d	108b	109d	110a
111d	112c	113a	114b	115b	116d	117d	118c	119c	120a
121d	122c	123b	124b	125d	126c	127a	128a	129c	130b
131c	132d	133c	134a	135d	136b	137c	138b	139b	140a
141d	142b	143d	144d	145b	146d	147b	148a	149b	150a
151b	152d	153c	154a	155c	156a	157b	158c	159d	160c
161d	162a	163b	164b	165d	166a	167d	168d	169a	170b
171d	172c	173a	174c	175d	176d	177b	178d	179b	180a
181c	182b	183c	184d	185b	186c	187a	188c	189d	190b
191c	192b	193d	194b	195d	196c	197a	198c	199a	200b

II. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

§ 1. MIỀN XÁC ĐỊNH VÀ MIỀN GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

1.1 $-2 < m < 2 : D = \mathbf{R}$; $m = -2 : D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$; $m = 2 : D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$;

$$m < -2 \vee m > 2 : \; D = \mathbf{R} \setminus \left\{m - \sqrt{m^2 - 4} \; ; m + \sqrt{m^2 - 4}\right\}$$

1.2 $a = \pm 4$, $b = 3$ **1.3** $D = \mathbf{R}$, $T = [-1 ; 1]$

1.4 $D = [1 ; 3], T = \left[\sqrt{2} ; \sqrt{10}\right]$

1.5 a) $D = \mathbf{R}$ b) $D = [2 ; +\infty]$

1.6 $a \geq 1$

1.7 $T = \left[-\dfrac{25}{12} ; 2\right]$ **1.8** $t = \left(-1 ; \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right]$

§ 2. ÁP DỤNG MIỀN GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

2.1 a) $\min y = \dfrac{2}{11}$, $\max y = 2$ b) $\min y = 0$, $\max y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2.2 $-2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$ **2.3** $\min y = -\dfrac{3}{4}$; $\max y = \dfrac{3}{2}$

§ 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC VÀ ỨNG DỤNG HÀM SỐ LIÊN TỤC ĐỂ CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

3.1 $a = 1$, $b = -2$

3.2 $a = 0$: f liên tục tại $x = 0$; $a \neq 0$: f không liên tục tại $x = 0$.

3.3 *Cách 1* : Xét $f(0).f\left(\dfrac{m+1}{m+2}\right)$

Cách 2 : Áp dụng định lí Lagrange với hàm số

$$F(x)=\frac{ax^{m+2}}{m+2}+\frac{bx^{m+1}}{m+1}+\frac{cx^{m}}{m} \text{ trên đoạn } [0\,;\,1]$$

3.4 Đặt f(x) = cosx + sinx - msinxcosx trên $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right).f(\pi)<0$.

3.5 Đặt $f(x)=x^5-x-2$; $f(1).f(2)<0$ và f tăng trên $[1:2]$.

Ta có $x_0^5=x_0+2$, áp dụng BĐT Côsi cho hai vế x_0 và 2.

3.6 Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$; $f(x).f(x_2)=-\frac{a^2}{4}x_1^2x_2^2<0$

3.7 Xét hàm số g(x) = f(x) − x ; g(a).g(b) ≤ 0.

§ 4. PHƯƠNG TRÌNH HÀM

4.1 $f(x)=x^2+8$.

4.2 $f(x)=\frac{-x^2+2x+2}{3x}\ (x\neq 0)$

4.3 $f(x)=-\frac{x}{2}+7$; $g(x)=\frac{x}{2}-\frac{7}{4}$.

4.4 Tính f(0), $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

4.5 a) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$

b) $S_1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $S_2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$.

4.6 a) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp và áp dụng ii).

b) Xét khoảng (−1 ; ∞) chứa 0, theo i) f(x) > 0 ∀x ∈ I.

Với x ∈ R chọn n khá lớn để $\left|\frac{x}{2^n}\right|<1$, ta có : $f(x)\geq\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{2^n}>0,\forall x$

c) Theo ii) f(x + h).f(h) ≥ f(x).f(h) ≥ f(x)(1 + h)

$\Rightarrow$ f(x + h) − f(x) ≥ hf(x)

Theo ii) f(x) ≥ f(x + h).f(−h) ≥ f(x + h).(1 − h)

$$\Rightarrow f(x+h)-f(x)\leq\frac{hf(x)}{1-h}$$

d) $f'(x)=f(x),\forall x\in\mathbf{R}$; $f(x)=e^x$.

§ 5. DÙNG ĐỊNH NGHĨA ĐỂ TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

5.1 $f'(0)=1.$

5.2 $f'_-(0)=0$; $f'_+(0)=1.$

5.3 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ (vì $|x|\le x\sin\frac{1}{x}\le|x|$) và không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0$

5.4 $f(x)=\begin{cases}-x & \text{nếu } x<1\\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x\ge 1\end{cases}$

5.5 $a=-3,\ b=3.$

5.6 $a=1,\ b=0.$

5.7 $a=-\frac{1}{2}, f(0)=-\frac{1}{8}$

5.8 $a=1,\ b=\frac{1}{2}.$

§ 6. ĐẠO HÀM CẤP CAO

6.1 a) $y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

b) $y^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

c) $y^{(n)}=(-1)^{n-1}.(n-1)!\frac{1}{x^n}$

d) $y^{(n)}=a^n.e^{ax}$

e) $y^{(n)}=(n+x)e^x$

f) $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$

§ 7. CÔNG THỨC LAGRANGE

7.1 Xét hàm số $f(x)=x^n$ với $x\in[a;b]$

7.2 Xét hàm số $f(x)=\tan x$ với $x\in[a;b]$

7.3 Chứng minh hàm số $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tăng trên $(0;+\infty)$.

Xét hàm số $g(x)=\ln t$ với $t\in[x;x+1]$.

7.4 $f(0)=f(1)=2.$

7.5 Dùng phản chứng. Giả sử $f(x_1) = f(x_2) = 0$ với $f(x) = x^3 - 3x + m$ và $0 < x_1 < x_2 < 1$ suy ra $f'(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0\,;\,1)$ (Vô lí).

7.6 Xét hàm số $f(x) = \dfrac{a}{m+2}x^{m+2} + \dfrac{b}{m+1}x^{m+1} + \dfrac{c}{m}x^m$ với $x \in [0\,;\,1]$.

§ 8. HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

8.1 a)

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

b)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗	‖	↘		↗	

c)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

d)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘		↗		↘	

e) Hàm số đồng biến trên **R**.

8.2 i) $m < -7 \vee m > 5$

x	$-\infty$		$\dfrac{m-3}{5}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y		↘	‖	↘	

ii) $-7 < m < 5$

x	$-\infty$		$\dfrac{m-3}{5}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y		↗	‖	↗	

iii) $m = -7$; $y = -\dfrac{7}{5}$ $(x \neq -2)$, iv) $m = 5$; $y = 1\left(x \neq \dfrac{2}{5}\right)$

8.3 a) $m \geq 4$; b) $-1 \leq m \leq 1$

8.4 a) $|m| \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$; b) $m \leq \frac{5}{12}$; c) $-\frac{7}{12} \leq m \leq \frac{5}{12}$

8.5 $m \leq -3$ **8.6** $-1 \leq a \leq \frac{5}{12}$ **8.7** $a \leq 2-\sqrt{3}$

8.8 a) $a \leq -\frac{4}{3}$ b) $m \leq \frac{5}{3}$; c) $m \geq 7$

8.9 $y' = a\cos x - b\sin x + 1 \geq 0, \forall x \in R$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{a^2+b^2} \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \leq 1.$

§ 9. ÁP DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC

9.1 a) Đặt $f(x) = x - \sin x$; $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ với $x > 0$.

b) Đặt $f(x) = x\sin x + 2\cos x$ với $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

9.2 Xét hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ với $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ và áp dụng BĐT Côsi.

9.3 Xét hàm số $f(x) = x^4 - ax^2 - bx - c$.

9.4 a) Xét hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ với $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Chứng minh $f(x) > 0, \forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. Thay x = A, B, C rồi cộng lại.

b) Xét hàm số $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ với $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

§ 10. ÁP DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

10.1 $x = y = \frac{\pi}{2}$.

10.2 a) Đặt $t = 5^{x-2} > 0$; $S = \left\{2,\ 2 + \log_5 \frac{1}{3}\right\}$

b) Đặt $y = \log_2 \cos x \Leftrightarrow \cos x = 2^y$ và $\cot^2 x = 3^y$.

Áp dụng công thức $\cot^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$ ta được :

$\left(\frac{3}{4}\right)^y = 3^y + 1 \Leftrightarrow y = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

c) Đặt $t = \log_3 (x+1)$; $S = \left\{2 ; -\frac{80}{81}\right\}$

d) Đặt $f(x) = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^x + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^x$; $S = \{1\}$.

10.3 a) $x = 9$; b) $x = 4$.

10.4 Đặt $t = \sqrt{x^2 - 5x + 5}$ và $f'(t) = \log_2 (t+1) + \log_2 (t^2 + 2)$

$S = \left[1 ; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{5}}{2} ; 4\right]$

10.5 Đặt $t = \log_2 x$; $S = \{2\}$.

10.6 a) Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$; $S = (-\infty ; 1)$

b) Xét hàm số $f(x) = 2^x + 3^{x+1} + 5^{x-2}$; $S = [1 ; \infty]$

c) $S = (-\infty ; 0) \cup [1 ; +\infty)$.

10.7 $\lim\limits_{x \to \infty} S_n = \frac{1}{2}$.

§ 11. ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

11.1 a) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\sqrt{2}$ và đạt cực đại tại $x = \sqrt{2}$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ và đạt cực đại tại các điểm $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \ (k \in Z)$

d) Xét hai trường hợp n chẵn và n lẻ.

e) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$, $x = 3$.

11.2 $0 < a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **11.3** $m < 2$. **11.4** $a = -2, b = 1$.

11.5 $a < -2$.

11.6 a) $\dfrac{1-\sqrt{7}}{3} \le m \le \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$, $m = -1$. b) $m > 1$.

11.7 $m < 1$. **11.8** $a = k2\pi$, $a = \dfrac{\pi}{2} + l2\pi \ (k, l \in Z)$

11.9 $m < -\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.

§ 12. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ VÀ ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA CÁC ĐIỂM CỰC TRỊ

12.1 $d = 4\sqrt{5}$. **12.2** $-3 < m < \dfrac{9}{7}$

12.3 $m < \sqrt{17} \vee m > 4 + \sqrt{17}$; $y = -\dfrac{2}{3}(m^2 - 8m - 1)x + \dfrac{2}{3}(m^3 + m^2 + 3m + 2)$

12.4 $|m| > \sqrt{3}$; $y_1 y_2 = m^2 + 24 > 0, \forall m$.

12.5 $m < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \vee m > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

12.6 Tìm điều kiện để $y' = x^3 - 6x + 3(m+2)x - (m+6)$ có ba nghiệm phân biệt.

12.7 $|m| > \sqrt{3}$; $y = 2(3 - m^2)x + 6m - 5$.

12.8 $y = -(m-3)^2 x - 1 - (m-1)(m-2)$

$k < 0$: $m = 3 \pm \sqrt{-k}$, $k \geq 0$: không tồn tại m.

§ 13. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

13.1 a) $\max y = \sqrt{2}$, $\min y = -1$.   b) $\max y = \dfrac{3}{2}$, $\min y = -\dfrac{3}{4}$

c) $\min y = \dfrac{1}{2}$ d) $\max y = \dfrac{3}{2}$, $\min y = -\dfrac{3}{4}$

13.2 a) $\max\left(x_1^3 + x_2^3\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, $\min\left(x_1^3 + x_2^3\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

13.3 $p = \pm\sqrt{2}$

13.4 a) $a = -\dfrac{19}{4}$;   b) $a = 3$, $a = -\dfrac{25}{2}$

13.5 $a = -1$, $a = 1 + \sqrt{3}$

13.6 $\max y = \begin{cases} \dfrac{1+|m|}{2} & \text{nếu } |x| \geq 2 \\ 1 + \dfrac{1}{8}m^2 & \text{nếu } |m| < 2 \end{cases}$; $\min y = \dfrac{1-|m|}{2}$

13.7 Đặt $x = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ $(|x| \geq 2)$; $\min y = -2$.

13.8 $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

13.9 Chiều cao hình nón $x = R\left(2 + \sqrt{2}\right)$.

§ 14. ÁP DỤNG GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

14.1 $\min y = 2\left(\frac{c}{2}\right)^n$. Áp dụng với c = a + b và x = a.

14.2 $m \geq \sqrt{2}$.

14.3 a) Đặt $t = \sin x + \cos x$, $f(t) = -\frac{t^3}{2} + \frac{3t}{2}$; $t \in \left[-\sqrt{2}\,;\ \sqrt{2}\right]$; $m \leq -1$.

b) $mx^4 - 4x + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{4x}{x^4+1}$; $m \geq \sqrt[4]{24}$.

c) $0 < m < \frac{1}{27}$.

14.4 $f(x) = x^4 + px^3 + q \geq 0, \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \min f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{3p}{4}\sqrt[3]{\frac{p}{4}} + q \geq 0 \Leftrightarrow 256q^3 \geq 27p^4$

14.5 a) Đặt $t = x^2 + 4x + 4 \geq 0$, $m \leq -2$.

b) Đặt $t = \frac{2x}{1+x^2}$ $(|t| \leq 1)$.

c) Đặt $t = |x-2|$; $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

14.6 $a = -1$; **14.7** $0 < a < 2$; **14.8** $0 \leq m \leq 2$.

§ 15. ÁP DỤNG GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

15.1 $\frac{6\sqrt{2}-9}{2} \leq m \leq 3$; **15.2** $m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4}$; **15.3** $m \leq \sqrt{3}$.

15.4 Xét $f(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{2x-1}}$ $\left(x > \frac{1}{2}\right)$. $\forall a \in \mathbf{R}$.

15.5 a) $-\frac{9}{16} \leq m \leq 1$; b) $2 \leq m < \frac{17}{8}$; c) $-1 \leq m \leq 0$.

15.6 a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = 0$; c) $x = \frac{\pi}{4}$.

§ 16. TÍNH LỒI LÕM VÀ ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

16.1 a) $y'' = \begin{cases} 6x & \text{nếu } x < 1 \\ -6x & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$, tại $x = 1$, y" không tồn tại.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		−	0	+	||	−	
y		lồi	0	lõm	0	lồi	

b) $y' = \dfrac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x^2-x+1)^2}$; $\ln y' = \dfrac{|x^2-x-2|}{x^2-x+1}$; c) $y'' = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}$

d)

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	

16.2 $m = -1$;

16.3 $a = 1, b = -3$;

16.4 a) $y = \frac{1}{3}(x-5)$; b) $y = \frac{3}{4}x$;

c) $y = \frac{1}{4}(x+3m)$; d) $y = \frac{1}{4}(x+3)$

16.5 a) $m \geq 3$; b) $-1 < m < 4$

16.6 $-\frac{3}{10} < a < -\frac{1}{4}$

16.7 $y'' = 6ax + 2b$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$.

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{3a}$		$+\infty$
y"		−	0	+	
y'		↘	CT	↗	

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{3a}$		$+\infty$
y"		+	0	−	
y'		↗	CĐ	↘	

16.8 a) Áp dụng định lí Viét trong phương trình bậc ba.

b) $m = 1$.

16.9 Toạ độ điểm uốn thoả hệ phương trình $\begin{cases} y = \dfrac{\sin x}{x} \\ y'' = 0 \end{cases}$

§ 17. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

17.1 a) Tiệm cận đứng : $x = \pm 1$; Tiệm cận xiên : $y = \pm x$

b) Tiệm cận đứng : $x = \pm 1$; Tiệm cận xiên : $y = |x| - 1$

c) Tiệm cận đứng : $x = 0$

d) Tiệm cận đứng : $x = 0$; Tiệm cận xiên : $y = x$

17.2 a) Tiệm cận xiên $y = 2x + m$ ($m \neq 0$ và $m \neq 1$)

Tiệm cận đứng $x = m$ với $m \neq 0$ và $m \neq 1$

b) Tiệm cận ngang $y = 0$

Biện luận tiệm cận, xét

$\Delta = (m+1)^2$ và $f(2m) = 4m^2 + 2m(m-1) - m = 6m^2 - 3m$

$m = \frac{1}{2}$: Tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{2}$

$m = 0$: Tiệm cận đứng $x = 1$

$m \neq 0,\ m \neq \frac{1}{2},\ m \neq -1$: Tiệm cận đứng $x = 1, x = -n$

$m = -1$: Tiệm cận đứng $x = 1$.

c) $m = 0$: Tiệm cận đứng $x = -2$; tiệm cận ngang $y = 6$.

$m \neq 0$: $m \neq -\frac{7}{2}$: Tiệm cận đứng $x = -2$; tiệm cận xiên $y = mx + 6 - 2m$.

d) Xét $m > 0$.

17.3 $a = 2, b = -3, c = 0$;

17.4 $m = 0, m = -2$

17.5 $a = 1$;

17.6 $y = -\frac{1}{2}$; $y = 2x + \frac{1}{2}$

17.7 $y = mx + 1 - 3$. Tiệm cận xiên qua $A(1 ; 1)$ cố định và khoảng cách từ 0 đến tiệm cận xiên $d \leq OA = \sqrt{2}$

17.8 $\max C = 6\pi$ khi $tg\alpha = -2$;

17.9 $a = -3$.

§ 18. TÂM ĐỐI XỨNG, TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA ĐỒ THỊ, CÔNG THỨC ĐỔI TRỤC

18.1 Công thức đổi trục $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$; **18.2** Công thức đổi trục $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y \end{cases}$

18.3 Trục đối xứng $x = 1$; $x = 1 \pm \sqrt{4 + \sqrt{10}}$

18.4 a) $m = 0, m = 4$; b) $m = 0, m \neq \pm 4$.

18.5 $m = 1$; **18.6** $m = 1$

18.7 Dùng phương pháp chứng minh phản chứng.

18.8 Đổi trục $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y \end{cases}$; **18.9** Tương tự ví dụ 5.

§ 19. HÀM SỐ BẬC HAI

19.1 b) Mọi điểm trên trục hoành.

19.2 a) $a = -1, b = -2, c = 4$; c) $y = 2x + 8$.

19.3 $M_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right)$; $M_2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right)$

19.4 a) $y = x + \frac{3}{2}$; b) $M_1\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)$, $M_3\left(\frac{5}{2}; \frac{25}{8}\right)$

§ 20. HÀM SỐ BẬC BA

20.1 b) $y = k(x - 4) + 4$ với $0 < k \neq 9$.

20.2 b) $m < 0 \vee m > 4$; $m \neq -\frac{1}{2}$, **20.3** b) $m = 11$

20.4 b) $y = 9x - 15, y = 9x + 17$; c) $m = 0,\ m = -\frac{9}{4}$

§ 21. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

21.1 $-\frac{1}{6} < m < -\frac{1}{7}$. **21.2** $|m| > 1$ **21.3** Không tồn tại m

21.4 $|m| > \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$,

21.5 Giải hệ $\begin{cases} -1 < m < 1 \\ y(m-1).y(m+1) < 0, \\ y(0) < 0 \end{cases}$

21.6 $a = c = 0, b = -3$,

21.7 $a = -3$

21.8 b) $m < \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$,

21.9 $m = 4$.

§ 22. HÀM SỐ BẬC BỐN

22.1 b) $m = -\dfrac{12}{19}$, $m = 12$,

22.2 b) $m = -1$, $\dfrac{1-\sqrt{7}}{3} \le m \le \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$

22.3 b) $m = 2$

22.4 Xác định a, b để $x^4 - 4x^3 - ax + 3 - b = (x - x_1)^2(x - x_2)^2$

$y = -8x - 1$.

22.5 b) $a = 0$, $a = \pm 4$.

§ 23. HÀM SỐ NHẤT BIẾN

23.1 $S_{IAB} = 1$,

23.2 a) $m = 2$, $n = 1$, c) $y = -3x - 2$

23.3 b) $-4 < m < 4$: không có giao điểm

$m = \pm 4$: có 1 giao điểm, $m < -4 \vee m > 4$: có 2 giao điểm

$y = -2x - 4$, $x \in (-\infty ; -2) \cup (0 ; +\infty)$

23.4 b) Tìm giao điểm của đồ thị với các đường thẳng $y = \pm x$.

c) Xác định k để phương trình $\dfrac{x+2}{x-2} = k(x+6) + 5$ có nghiệm kép $x \ne 2$.

§ 24. HÀM HỮU TỈ BẬC HAI TRÊN BẬC NHẤT

24.1 b) Tìm α sao cho $\begin{cases} 2\sin\alpha + \cos\alpha + 1 \neq 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases}$, c) Giải hệ $\begin{cases} \cos\alpha \neq 0 \\ \sin^2\alpha - \cos\alpha < 0 \end{cases}$

24.2 b) $A\left(0 ; -\dfrac{m}{2}\right) ; y = \dfrac{6-m}{4}x - \dfrac{m}{2}$. c) $k > 1$.

24.3 a) $y = x + 2(\cos\alpha - \sin\alpha) ; I(-2\sin\alpha ; \cos\alpha - 4\sin\alpha)$

b) Mọi $\alpha \in \mathbf{R}$.

§ 25. CÁC HÀM SỐ HỮU TỈ KHÁC

25.1 a) $m = -1, m = 2$

c) Đặt $t = \cos x \ (-1 \leq t \leq 1) ; k = \dfrac{t^2 + 4t - 2}{t^2 + 1}$

25.2 b) $m \neq 0$

c) $m = \dfrac{t^4}{t^4 + 2t^2 - 2} \Rightarrow m = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 2}$ với $x = t^2 \geq 0$

25.3 a) $m < -2 \vee m > 2 : m \neq \dfrac{1}{2}\left(m \pm \sqrt{m^2 - 4}\right)$

$m = -2 : x \neq -1$. $m = 2 : x \neq 1$

$-2 < m < 2$: mọi $x \in \mathbf{R}$.

$m < -2$: hai tiệm cận đứng ở bên trái trục tung.

$m > 2$: hai tiệm cận đứng ở bên phải trục tung.

c) $y = 4x + 1 ; \ y = \left(4 + 2\sqrt{3}\right)x + 1 ; \ y = \left(4 - 2\sqrt{3}\right)x + 1$.

25.4 $a = -x^2 - \dfrac{2}{x} ; a > -3$

25.6 $a = 1, a = 3$: 1 nghiệm.

$a < 1 \vee a > 3, \ a \neq 2 \pm \sqrt{\dfrac{11 - 4\sqrt{3}}{2}}$: 2 nghiệm. $1 < a < 3$: Vô nghiệm.

§ 26. HÀM SỐ VÔ TỈ

26.2 $-2 \le k \le 2$.

§ 27. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

27.2 b) Áp dụng câu a) với $u_i = \dfrac{x_i}{M}$ với $M = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$.

§ 29. ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÓ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI. PHÉP SUY ĐỒ THỊ.

29.1 a) $-1 < m < 0$;

29.4 b) $m = \dfrac{2|x|}{|x| - 1}$ $x \in [-1 ; 2]$.

§ 30. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐỒ THỊ

30.1 $m < 0 \vee m > 1$;

30.2 $m = \pm\sqrt{5}$

30.3 $m = \pm 3$;

30.4 $a = -1$, $a = \dfrac{5}{2}$, $a = \dfrac{4}{3}$.

30.5 $m = 2$;

30.6 $a = -\dfrac{9}{5}$

30.7 $m = 0$, $m = -3$;

30.8 a) $k \le -3 \vee k > 1$; b) $m < -1 \vee m \ge 3$

30.9 $k > 1$;

30.10 $a = 2$

§ 31. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

31.1 $y = -3x - 2$

31.2 $x_0 \ne 1$ thì qua $M(x_0 ; y_0) \in (C)$ có hai tiếp tuyến đi qua. Nếu $x_0 = 1$ thì qua M(1 ; 0) chỉ có một tiếp tuyến đi qua là tiếp tuyến tại tiếp điểm M(1 ; 0).

31.3 a) $m = -3$, b) $y = x - 3$, $y = x + 1$.

31.4 A(1 ; 0).

31.5 A(1 ; 0)

31.7 M(a ; – 4) với $\begin{cases} a < -4 \vee a > \dfrac{4}{3} \\ a \ne 2 \end{cases}$,

31.8 $y = -3x - 1$.

§ 32. ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA HỌ ĐỒ THỊ. BIỆN LUẬN SỐ ĐỒ THỊ ĐI QUA MỘT ĐIỂM

32.1 $A(-1 ; 0)$;

32.2 $(2 ; 0)$ và $(-2 ; 0)$

32.3 a) $(2 ; 0)$;

b) $\frac{1}{2} < m \neq 1$

32.4 $y = 17x - 2$;

32.5 $m \neq \pm 2$; $(2 ; 2)$; $(-2 ; 2)$

32.6 $y > x^3$;

32.7 $(0 ; 0)$; $(6 ; 36)$

32.8 Đường thẳng $x = 1$ và $x = 0$ $(y \neq 0)$

32.9 $x - 6 < y < x + 2$.

§ 33. HỌ ĐỒ THỊ TIẾP XÚC VỚI MỘT ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

33.1 $y = -x - 2$ tại $A(-1 ; -1)$;

33.2 $y = x + 1$

33.3 $y = \frac{x^2}{4} + 1$;

33.4 $y = x + 2$; $y = x - 6$

33.5 $y = x - 1$.

§ 34. BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ

34.1 a) $(0 ; -3)$, $(3 ; 0)$

b) $m = 0$, $m = 2$, $m = \frac{8}{3}$

34.2 a) $-1 < m < 0$

b) $a < -1$: vô nghiệm ; $a > -1$: 2 nghiệm ; $a = -1$: 1 nghiệm.

34.3 b) $m < 2(1 + \sqrt{2})$: 1 nghiệm ; $m = 2(1 + \sqrt{2})$: 2 nghiệm

$m > 2(1 + \sqrt{2})$: 3 nghiệm

c) $-\frac{1}{3} \leq m \leq 3$: vô nghiệm.

34.4 b) $m < -2 \vee m > 2$: 1 nghiệm

$-2 < m < 2$ và $m \neq \pm 1$: 3 nghiệm ; $m = \pm 1 \vee m = \pm 2$: 2 nghiệm

34.5 Xét hàm số $y = -\dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x}$; $m > \dfrac{3}{2}$

34.6 b) $y = -x - \sqrt{5}$, $y = -x + \sqrt{5}$

c) $m < -\sqrt{5} \vee m > \sqrt{5}$: 2 nghiệm ; $m = \pm\sqrt{5}$: nghiệm kép ;

$-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$: vô nghiệm.

34.7 a) $x_1 + x_2 = -2$; b) $k = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $k_1k_2 = -1$

34.8 $a = 1 \pm \sqrt{3}$: phương trình có 1 nghiệm âm.

$1 + \sqrt{3} < a < 3$: phương trình có 2 nghiệm âm

$a \geq 3$: 1 nghiệm âm ; $-1 < a < 1 - \sqrt{3}$: 2 nghiệm âm

$a \leq -1$: nghiệm âm ; $1 - \sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{3}$: vô nghiệm.

34.9 c) $-6 < a < -2$.

§ 35. TẬP HỢP ĐIỂM

35.1 b) $a = -3$ c) $y = 3x + 1$

35.2 b) $-9 \neq k < 0$. c) $x = 3$; $-23 \neq y < 4$

35.3 b) $|k| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $k \neq 1$; $y = \dfrac{2x^2 + 3x + 2}{2x + 2}$

35.4 a) Công thức đổi trục $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$

b) $(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 = 4$ $x_0 \neq 1$, $y_0 \neq x_0 + 1$.

Tập hợp là đường tròn tâm I(1 ; 2) bán kính R = 2 bỏ đi 4 điểm là giao của đường tròn với hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

35.5 a) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

$M_1(0 ; 1)$, $M_2\left(\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} ; 0\right)$, $M_3\left(\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} ; 0\right)$.

b) $y = x^2 + 1$; $0 \le x < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ là tập hợp điểm cực đại ;

$y = x^2 + 1$ với $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \le x \le 2$ là tập hợp điểm cực tiểu.

Khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm cực trị là $2\sqrt{5}$.

c) $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$.

§ 36. TÌM CÁC ĐIỂM ĐỐI XỨNG NHAU TRÊN ĐỒ THỊ

36.1 $m < 0$; **36.2** $m < -1 \vee 0 < m < 1$.

36.3 $M_1\left(\dfrac{15+\sqrt{57}}{6} ; \dfrac{15-\sqrt{57}}{6}\right)$; $M_2\left(\dfrac{15-\sqrt{57}}{6} ; \dfrac{15+\sqrt{57}}{6}\right)$

36.4 $y = \dfrac{-x^2 + 3x - 6}{x - 2}$

§ 37. KHOẢNG CÁCH

37.1 a) $y = 2x + \dfrac{1}{4}$ b) $y = 2x + 4$

37.2 $M_1\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2} ; \dfrac{3}{2}\right)$; $M_2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2} ; \dfrac{3}{2}\right)$

37.3 $m = -1$

37.4 a) $A\left(-1 ; -\dfrac{1}{2}\right)$, $B\left(3 ; \dfrac{9}{2}\right)$ b) $m = \pm\sqrt{5}$

37.5 $m = \dfrac{41}{25}$; **37.6** $\tan 2\alpha = -\dfrac{4}{3}$

37.7 $A(0 ; 1)$, $B(-2 ; 3)$

37.8 a) Các điểm có hoành độ $-12, -6, -2, 0, 6$

b) $A_1\left(\dfrac{-1-\sqrt{61}}{2} ; -1-\sqrt{61}\right)$, $A_2\left(\dfrac{-1+\sqrt{61}}{2} ; -1+\sqrt{61}\right)$.

Phụ lục

TRÍCH GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC (2005 – 2008)

NĂM 2005

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI A

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ (*) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = \frac{1}{4}$.

2. Tìm m để hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến tiệm cận xiên của (C_m) bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

1. Khi $m = \frac{1}{4}$, ta có hàm số : $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{x}$.

- Tập xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
- Đạo hàm : $y' = \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{4x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2. \end{array}\right.$
- Giới hạn :

$\lim\limits_{x \to \infty}\left[y - \frac{1}{4}x\right] = \lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x$ là tiệm cận xiên của đồ thị.

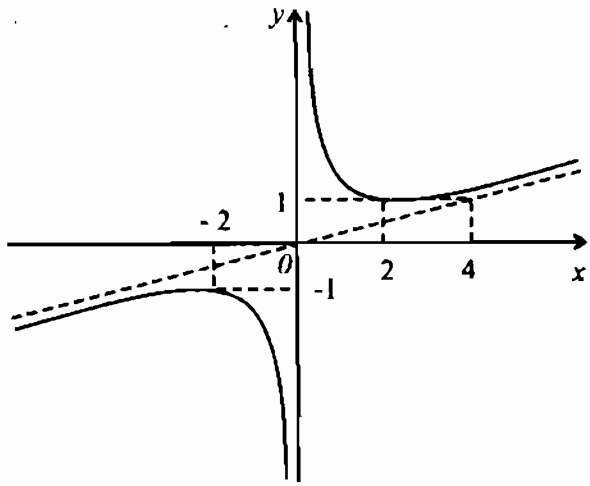
$\lim\limits_{x \to 0} y = \infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1 CĐ	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	CT 1	↗	$+\infty$

- Điểm đặc biệt : Đồ thị không cắt các trục toạ độ.

• Đồ thị :



2. Xét hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$, ta có : $y' = m - \frac{1}{x^2}$; $y' = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $m > 0$.

Nếu $m > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{m}} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}. \end{array}\right.$

Xét dấu y' :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{m}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{m}}$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$ ↗		$y_{CĐ}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	CT y_{CT}	↗	$+\infty$

Hàm số luôn có cực trị với mọi $m > 0$.

Điểm cực tiểu của (C_m) là $M\left(\frac{1}{\sqrt{m}} ; 2\sqrt{m}\right)$.

Tiệm cận xiên của (C_m) là (d) : $y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0$.

Gọi d(M, d) là khoảng cách từ điểm cực tiểu M đến đường tiệm cận (d) của đồ thị hàm số (*), thì :

$$d(M, d) = \frac{\left|\sqrt{m} - 2\sqrt{m}\right|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2+1}}.$$

Ta có : $d(M, d) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Vậy với m = 1 thì hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến tiệm cận xiên của (C_m) bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x+1}$ (*) (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi m = 1.

2. Chứng minh rằng với m bất kì, đồ thị (C_m) luôn luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

Hướng dẫn giải

1. Khi m = 1, ta có hàm số : $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = x + 1 + \frac{1}{x+1}$.

- Tập xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
- Đạo hàm : $y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0. \end{array}\right.$
- Giới hạn : $\lim\limits_{x \to \infty}\left[y - (x+1)\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x+1} = 0$

$\Rightarrow y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị.

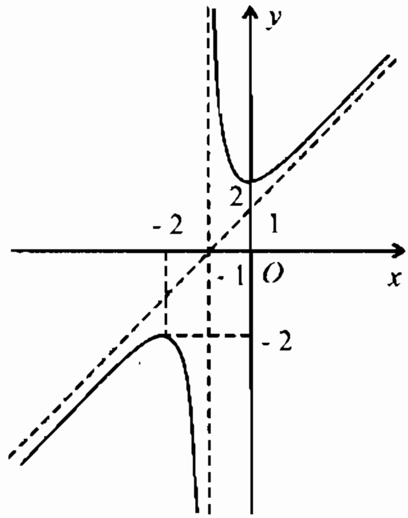
$\lim\limits_{x \to -1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2 CĐ	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2 CT	$\nearrow$	$+\infty$

- Điểm đặc biệt : Đồ thị cắt trục Oy tại điểm (0 ; 2).

• Đồ thị :



2. Ta có : $y = x + m + \frac{1}{x+1}$. Tập xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \ ; \ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Xét dấu y' :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số (*) luôn có điểm cực đại là $M(-2 ; m-3)$ và điểm cực tiểu là $N(0 ; m+1)$.

Khoảng cách giữa hai điểm M và N là :

$$MN = \sqrt{[0-(-2)]^2 + [(m+1)-(m-3)]^2} = \sqrt{20}.$$

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI D

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (*) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi m = 2.

2. Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

Hướng dẫn giải

1. Khi m = 2, ta có hàm số : $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$.

- Tập xác định : D = **R**.

- Đạo hàm : $y' = x^2 - 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

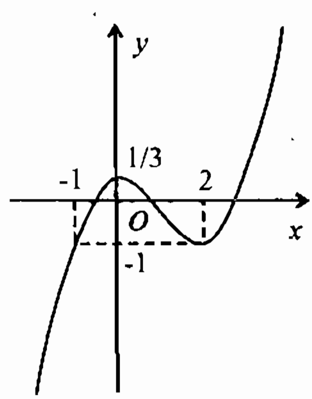
$y'' = 2x - 2$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y''		−	|	−	0	+	|	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{1}{3}$ CĐ Lồi	↘	$\frac{-1}{3}$ Đ/U	↘	Lõm CT -1	↗	$+\infty$

- Điểm đặc biệt : Đồ thị đi qua điểm $(-1 ; -1)$.

- Đồ thị :



2. Ta có : $y' = x^2 - mx$.

Điểm thuộc (C_m) có hoành độ x = – 1 là $M\left(-1\,;-\dfrac{m}{2}\right)$.

Tiếp tuyến tại M của (C_m) là :

$$(\Delta): y+\frac{m}{2}=y'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y=(m+1)x+\frac{m+2}{2}.$$

(Δ) song song với (d) : 5x – y = 0 (hay (d) : y = 5x) khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m+1=5 \\ m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=4.$$

Vậy khi m = 4 thì tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng 5x – y = 0.

NĂM 2006

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI A

Câu 1. 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=2x^3-9x^2+12x-4$.

Hướng dẫn giải

$y=2x^3-9x^2+12x-4$.

• TXĐ : $\mathbb{R}$.

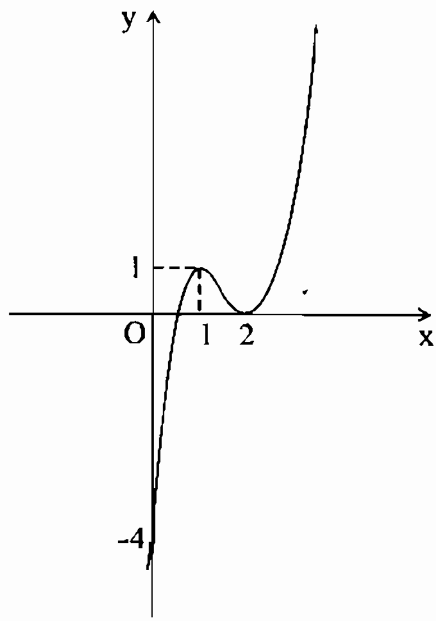
• Sự biến thiên : $y'=6(x^2-3x+2)$, $y'=0 \Leftrightarrow x=1, x=2$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

$y_{CĐ}=y(1)=1$, $y_{CT}=y(2)=0$.

• Đồ thị :



TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 2}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đó vuông góc với tiệm cận xiên của (C).

Hướng dẫn giải

1. $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 2} = x - 1 + \dfrac{1}{x + 2}$.

• Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

• Sự biến thiên : $y' = 1 - \dfrac{1}{(x+2)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = -1$.

Bảng biến thiên :

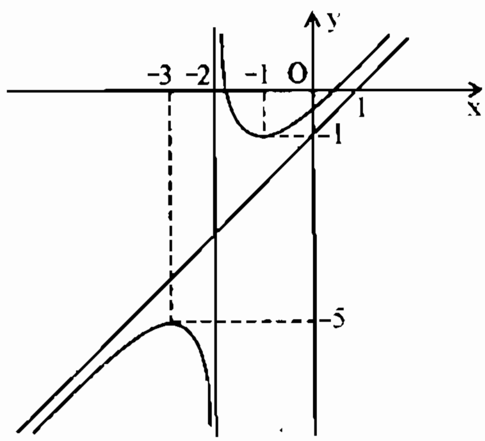
x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

$y_{CĐ} = y(-3) = -5$; $y_{CT} = y(-1) = -1$.

• Tiệm cận : - Tiệm cận đứng : $x = -2$.

- Tiệm cận xiên : $y = x - 1$.

• Đồ thị (C) :



2. Viết phương trình tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên của đồ thị (C) :
Tiệm cận xiên của đồ thị (C) có phương trình $y = x - 1$, nên tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên có hệ số góc là $k = -1$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình : $y' = -1$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = -1 \Leftrightarrow x = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Với $x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 3 \Rightarrow$ pt tiếp tuyến là $(d_1): y = -x + 2\sqrt{2} - 5$.

Với $x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 3 \Rightarrow$ pt tiếp tuyến là $(d_2): y = -x - 2\sqrt{2} - 5$.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI D

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3\,;\,20)$ và có hệ số góc là m. Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

• TXĐ : $\mathbb{R}$.

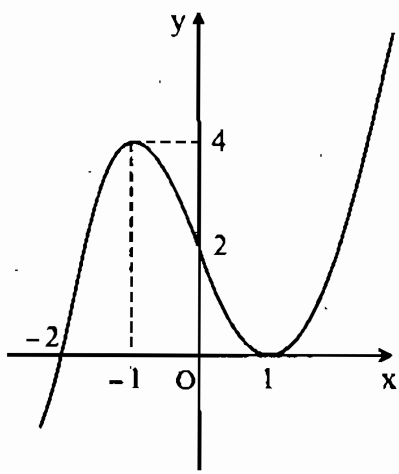
• Sự biến thiên : $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1,\ x = 1$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

$y_{CĐ} = y(-1) = 4$, $y_{CT} = y(1) = 0$.

Đồ thị :



2. Tìm m để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt

Phương trình đường thẳng d là : $y = m(x - 3) + 20$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là :

$$x^3 - 3x + 2 = m(x-3) + 20 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 6 - m) = 0.$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi

$f(x) = x^2 + 3x + 6 - m$ có 2 nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4(6-m) > 0 \\ f(3) = 24 - m \quad \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{15}{4} \\ m \neq 24. \end{cases}$$

NĂM 2007

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI A

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$ (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -1$.

2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với gốc toạ độ O tạo thành một tam giác vuông tại O.

Hướng dẫn giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)

Khi $m = -1$ ta có $y = \dfrac{x^2 - 3}{x+2} = x - 2 + \dfrac{1}{x+2}$.

• Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

• Sự biến thiên :

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

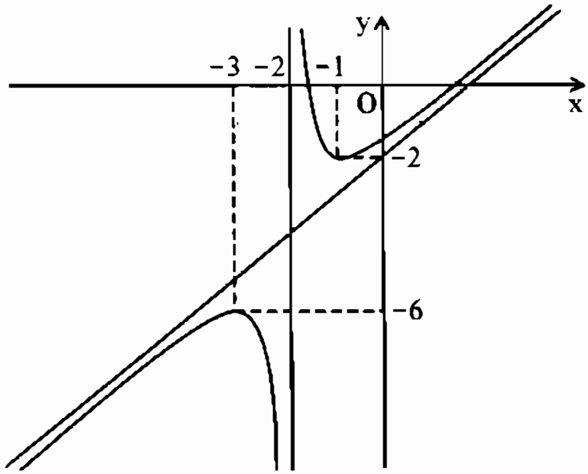
Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

$$y_{CĐ} = y(-3) = -6, \ y_{CT} = y(-1) = -2.$$

• Tiệm cận : Tiệm cận đứng $x = -2$, tiệm cận xiên $y = x - 2$.

• Đồ thị :



2. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu và...

$$y' = \frac{x^2 + 4x + 4 - m^2}{(x+2)^2}.$$

Hàm số (1) có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow g(x) = x^2 + 4x + 4 - m^2$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 + m^2 > 0 \\ g(-2) = 4 - 8 + 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$

Gọi A, B là các điểm cực trị $\Rightarrow A(-2-m\,;\,-2),\ B(-2+m\,;\,4m-2)$.

Do $\overrightarrow{OA} = (-m-2\,;\,-2) \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} = (m-2\,;\,4m-2) \neq 0$ nên ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow -m^2 - 8m + 8 = 0$ $\Leftrightarrow m = -4 \pm 2\sqrt{6}$ (thoả mãn $m \neq 0$).

Vậy giá trị m cần tìm là : $m = -4 \pm 2\sqrt{6}$.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

Câu 1. Cho hàm số : $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.

2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cách đều gốc toạ độ O.

Hướng dẫn giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Khi $m = 1$ ta có $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

• Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

• Sự biến thiên :

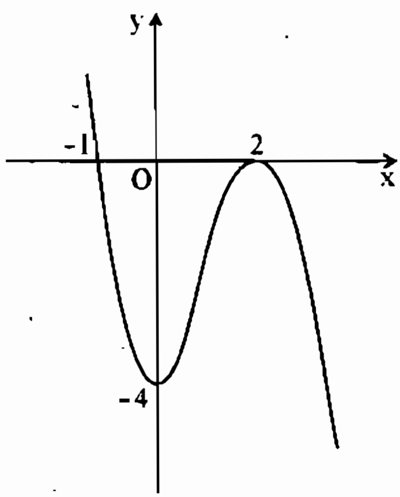
$y' = -3x^2 + 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

$y_{CĐ} = y(2) = 0$, $y_{CT} = y(0) = -4$.

• Đồ thị :



2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu...

Ta có : $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0$ (2).

Hàm số (1) có cực trị $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Gọi A, B là 2 điểm cực trị $\Rightarrow A(1 - m\,;\, -2 - 2m^3)$, $B(1 + m\,;\, -2 + 2m^3)$.

O cách đều A và B $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow 8m^3 = 2m \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{1}{2}$ (vì $m \neq 0$).

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI D

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2. Tìm toạ độ điểm M thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục Ox, Oy tại A, B và tam giác OAB có diện tích bằng $\dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Ta có $y = \dfrac{2x}{x+1} = 2 - \dfrac{2}{x+1}$.

• Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

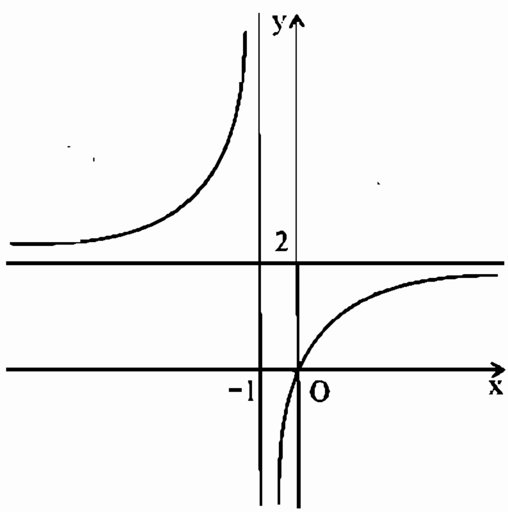
• Sự biến thiên : $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	2

• Tiệm cận : Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

• Đồ thị :



2. Tìm toạ độ điểm M...

Vì $M \in (C)$ nên $M\left(x_0 ; \dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là :

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + \frac{2x_0}{x_0+1} \Leftrightarrow y = \frac{2}{(x_0+1)^2}x + \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}.$$

$$\Rightarrow A\left(-x_0^2 ; 0\right), B\left(0 ; \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right).$$

Từ giả thiết ta có : $\left|\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right| . \left|-x_0^2\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \\ 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\dfrac{1}{2} \\ x_0 = 1 \end{array}\right.$

Với $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ ta có $M\left(-\dfrac{1}{2} ; -2\right)$.

Với $x_0 = 1$ ta có $M(1 ; 1)$.

Vậy có hai điểm M thoả mãn yêu cầu bài toán là : $M\left(-\dfrac{1}{2} ; -2\right)$ và $M(1 ; 1)$.

NĂM 2008

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI A

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ (1), với m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2. Tìm các giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0.

Hướng dẫn giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)

Khi $m = 1$ hàm số trở thành : $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 3} = x - 2 + \dfrac{4}{x + 3}$.

- TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
- Sự biến thiên : $y' = 1 - \dfrac{4}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{(x+3)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -5 \end{array}\right.$

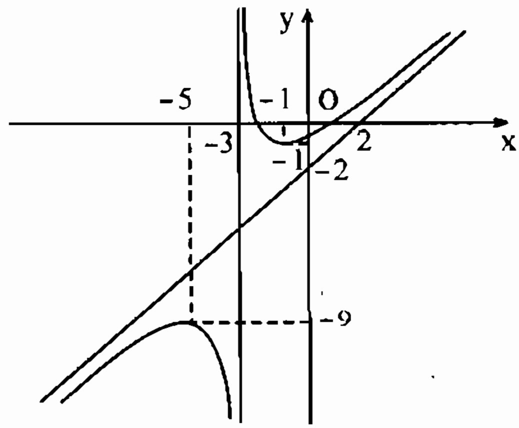
• $y_{CĐ} = y(-5) = -9$, $y_{CT} = y(-1) = -1$.

• TCĐ : $x = -3$, TCX : $y = x - 2$.

• Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

• Đồ thị :



2. Tìm các giá trị của thàm số m...

$$y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m} = mx + 2 + \frac{6m - 2}{x + 3m}.$$

• Khi $m = \frac{1}{3}$ đồ thị hàm số không tồn tại hai tiệm cận.

• Khi $m \neq \frac{1}{3}$ đồ thị hàm số có hai tiệm cận :

$d_1 : x = -3m \Leftrightarrow x + 3m = 0$, $d_2 : y = mx - 2 \Leftrightarrow mx - y - 2 = 0$.

Vectơ pháp tuyến của d_1, d_2 lần lượt là $\overrightarrow{n_1} = (1 ; 0)$, $\overrightarrow{n_2} = (m ; -1)$.

Góc giữa d_1 và d_2 bằng 45^0 khi và chỉ khi

$$\cos 45^0 = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

Câu 1. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1\,;\,-9)$.

Hướng dẫn giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)

- TXĐ : $\mathbb{R}$.

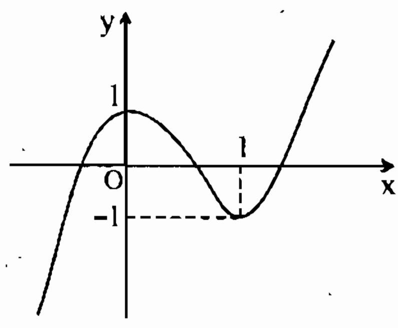
- Sự biến thiên : $y' = 12x^2 - 12x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

- $y_{CĐ} = y(0) = 1$, $y_{CT} = y(1) = -1$.

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	−1	↗	$+\infty$

- Đồ thị :



2. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số (1)...

Đường thẳng Δ với hệ số góc k và đi qua điểm $M(-1\,;\,-9)$ có phương trình : $y = kx + k - 9$.

Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm : $\begin{cases} 4x^3 - 6x^2 + 1 = k(x+1) - 9 & (2) \\ 12x^2 - 12x = k & (3) \end{cases}$

Thay k từ (3) vào (2) ta được : $4x^3 - 6x^2 + 1 = (12x^2 - 12x)(x+1) - 9$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2(4x-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{5}{4}. \end{array}\right.$$

• Với $x = -1$ thì $k = 24$, phương trình tiếp tuyến là : $y = 24x + 15$.

• Với $x = \dfrac{5}{4}$ thì $k = \dfrac{15}{4}$, phương trình tiếp tuyến là : $y = \dfrac{15}{4}x - \dfrac{21}{4}$.

Các tiếp tuyến cần tìm là : $y = 24x + 15$ và $y = \dfrac{15}{4}x - \dfrac{21}{4}$.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI D

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm $I(1\ ;\ 2)$ với hệ số góc $k(k > -3)$ đều cắt đồ thị của hàm số (1) tại ba điểm phân biệt I, A, B đồng thời I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Hướng dẫn giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)

• Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

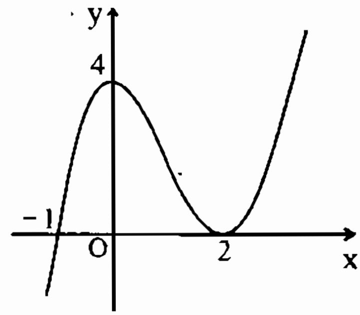
• Sự biến thiên : $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

• $y_{CĐ} = y(0) = 4$, $y_{CT} = y(2) = 0$.

• Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• Đồ thị :



2. Chứng minh rằng mọi đường thẳng...

Gọi (C) là đồ thị hàm số (1). Ta thấy I(1 ; 2) thuộc (C). Đường thẳng d đi qua I(1 ; 2) với hệ số góc $k(k > -3)$ có phương trình : $y = kx - k + 2$.

Hoành độ giao điểm của (C) và d là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x^2 + 4 = k(x - 1) + 2 \Leftrightarrow (x - 1)\left[x^2 - 2x - (k + 2)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (ứng với giao điểm I)} \\ x^2 - 2x - (k + 2) = 0 \ (*). \end{array}\right.$$

Do $k > -3$ nên phương trình (*) có biệt thức $\Delta' = 3 + k > 0$ và $x = 1$ không là nghiệm của (*). Suy ra d luôn cắt (C) tại ba điểm phân biệt $I(x_I ; y_I)$,

$A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ với x_A, x_B là nghiệm của (*).

Vì $x_A + x_B = 2 = 2x_I$ và I, A, B cùng thuộc d nên I là trung điểm của đoạn thẳng AB (đpcm).

MỤC LỤC

Phần II.

ÔN TẬP – HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại Tp. Đà Nẵng HUỲNH BÁ VÂN
Phó Tổng biên tập HUỲNH THÔNG

Biên tập lần đầu

TRẦN PHƯỚC CHƯƠNG

Biên tập tái bản :

ĐẶNG VĂN TRÍ

Trình bày bìa :

MINH QUÂN

Đơn vị liên doanh in và phát hành :
TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC
KHẢO SÁT HÀM SỐ
Mã số : PTK38t9 - LKT

In 3.000 bản, khổ 16 x 24 cm. Tại **CÔNG TY CỔ PHẦN IN KHUYẾN HỌC PHÍA NAM**, Tp. HCM. Số QĐ xuất bản: **1098/QĐ-GD**, ngày 08/7/2009. Số ĐKKHXB: **32-2009/CXB/117-16/GD**. In xong và nộp lưu chiểu Tháng 8 – 2009.

SÁCH THAM KHẢO MÔN TOÁN, LÍ, HOÁ DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 12, ÔN THI VÀO ĐẠI HỌC

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN TOÁN (7 TẬP)

Tác giả : TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên)

- ĐẠI SỐ
- GIẢI TÍCH - ĐẠI SỐ TỔ HỢP
- BẤT ĐẲNG THỨC
- KHẢO SÁT HÀM SỐ
- LƯỢNG GIÁC
- HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
- HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN VẬT LÍ (3 TẬP)

Tác giả : NGUYỄN THANH HẢI

- ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN, DAO ĐỘNG CƠ HỌC, SÓNG CƠ
- DAO ĐỘNG ĐIỆN TỪ, DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU
- SÓNG ÁNH SÁNG, LƯỢNG TỬ ÁNH SÁNG, SƠ LƯỢC VỀ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP, HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ, TỪ VI MÔ ĐẾN VĨ MÔ

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN HOÁ (2 TẬP)

Tác giả : NGÔ NGỌC AN

- HOÁ HỮU CƠ
- HOÁ VÔ CƠ

TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM ẤN HÀNH

Số 41, đường 41, P. Thảo Điền, Quận 2 - TP. Hồ Chí Minh

Điện thoại : 08.38251527 - 08.38035929   Fax : 08.38227758

www.netbook.vn

CĐ LTĐH môn Toán - KSHS

8935091991499

Giá : 47.000 đ