

# CHU KỲ (TẦN SỐ) DAO ĐỘNG ĐIỀU HOÀ CỦA CÁC CƠ HỆ CON LẮC Lò XO

## A. DẪN NHẬP

Các mô hình cơ hệ con lắc lò xo (CLLX) ở thực tế rất phong phú. Mỗi cơ hệ khi kích thích dao động có một tần số góc và do đó dẫn đến chu kỳ (tần số) dao động điều hoà (ĐĐHH) tương ứng. Dưới đây, thiết lập chu kỳ ĐĐHH của cơ hệ CLLX phổ biến theo hai phương pháp lực và năng lượng, đồng thời thống kê một số cơ hệ thường gặp.

## B. NỘI DUNG

### I. Hệ lò xo ghép với nhau:

Tùy theo cách ghép các lò xo thành phần, ta có độ cứng tương đương của hệ lò xo tương ứng.

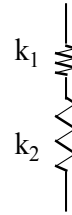
Gọi  $k_1, k_2, \dots, k_n$ : độ cứng của lò xo thành phần (1), (2), ... , (n).

$k$ : độ cứng tương đương của hệ  $n$  lò xo được ghép lại.

□. Ghép nối tiếp:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \rightarrow k = ?$$

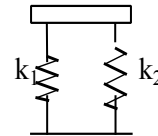
$$(k < k_1, k_2, \dots, k_n)$$



□. Ghép song song:

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

$$(k > k_1, k_2, \dots, k_n)$$



### II. Lò xo bị cắt rời:

□. Xét lò xo cấu tạo đồng đều, khối lượng không đáng kể, có chiều dài tự nhiên  $l$ , độ cứng  $k$ . Cắt lò xo thành hai phần có chiều dài và độ cứng tương ứng là  $l_{01}, k_1$  và  $l_{02}, k_2$ , ta có:

$$kl_0 = k_1l_{01} = k_2l_{02}$$

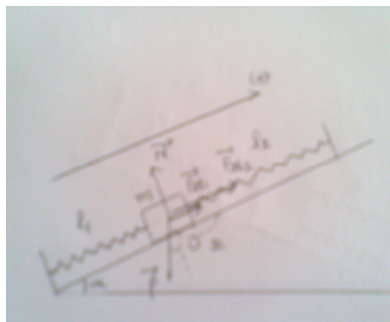
□. Nếu lò xo có độ cứng  $k$  được cắt thành  $n$  đoạn lò xo bằng nhau thì mỗi lò xo mới có độ cứng là:

$$k' = nk$$

### III. Thiết lập tần số góc:

#### 1. Cơ hệ 1:

Cho lò xo có độ dài  $l_0 = 45$  (cm), độ cứng  $k = 12$  (N/m) được cắt thành hai lò xo  $l_{01} = 18$  (cm) và  $l_{02} = 27$  (cm). Mắc hai lò xo vào vật nặng  $m = 100$  (g) như hình. Góc nghiêng  $\alpha = 30^\circ$ . Bỏ qua mọi ma sát. Tại thời điểm ban đầu, giữ cho hai lò xo không bị biến dạng. Thả nhẹ cho vật dao động. Tìm chu kỳ dao động của vật.



Bằng phương pháp lực:

Độ cứng của hai lò xo thành phần:

$$k_1 = k \frac{l_0}{l_{01}} = 12 \frac{45}{18} = 30 \text{ (N/m)}$$

$$k_2 = k \frac{l_0}{l_{02}} = 12 \frac{45}{27} = 20 \text{ (N/m)}$$

Vật chịu tác dụng 4 lực:  $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{dh1}, \vec{F}_{dh2}$ .

Tại vị trí cân bằng O:  $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{dh1} + \vec{F}_{dh2} = \vec{0}$

Chiếu biểu thức lên phương nghiêng, chiều đã chọn:

$$-P \sin \alpha + F_{dh1} + F_{dh2} = 0$$

$$\text{với } F_{dh1} = k_1 \Delta l; F_{dh2} = k_2 \Delta l$$

(lò xo (1) nén một đoạn  $\Delta l$  thì lò xo (2) giãn một đoạn  $\Delta l$ )

$$\rightarrow -P \sin \alpha + (k_1 + k_2) \Delta l = 0$$

Tại ly độ  $x$  bất kỳ:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}'_{dh1} + \vec{F}'_{dh2} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow -P \sin \alpha + k_1 (\Delta l - x) + k_2 (\Delta l - x) = ma$$

$$\Leftrightarrow -P \sin \alpha + (k_1 + k_2) \Delta l - (k_1 + k_2)x = ma$$

$$\Rightarrow -(k_1 + k_2)x = m(x)''$$

$$\Rightarrow (x)'' + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0$$

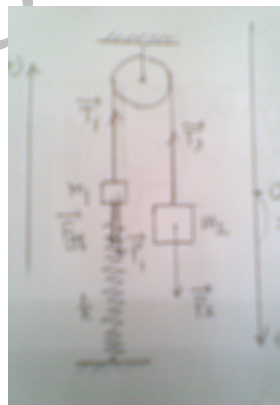
$$\text{Đặt } \omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \Rightarrow (x)'' + \omega^2 x = 0$$

Vậy chu kỳ dao động của vật:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,1}{50}} = 0,28 \text{ (s)}.$$

## 2. Cơ hệ 2:

Cho cơ hệ CLLX như hình. Dây treo không giãn và có khối lượng không đáng kể. Bỏ qua mọi ma sát. Kích thích cho hệ dao động. Chứng minh hệ DĐĐH với tần số góc  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$ .



Bằng phương pháp lực:

Vật  $m_1$  chịu tác dụng 3 lực:  $\vec{P}_1, \vec{T}_1, \vec{F}_{dh}$ .

Vật  $m_2$  chịu tác dụng 2 lực:  $\vec{P}_2, \vec{T}_2$ .

$$\begin{aligned} \text{Tại vị trí cân bằng O: } \begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{dh} = \vec{0} \\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -P_1 + T_1 - F_{dh} = 0 \\ P_2 - T_2 = 0 \end{cases} \\ T_1 = T_2 = T &\Rightarrow \begin{cases} -P_1 + T - k\Delta l = 0 \\ P_2 - T = 0 \end{cases} \Rightarrow P_2 - P_1 - k\Delta l = 0 \end{aligned}$$

Tại ly độ  $x$  bất kỳ:

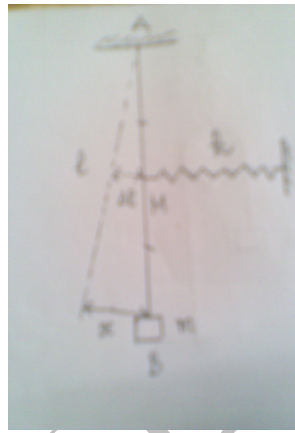
$$\begin{aligned}\vec{P}_2 + \vec{P}_1 + \vec{F}'_{dh} &= (m_1 + m_2)\vec{a} \Rightarrow P_2 - P_1 - k(\Delta l + x) = (m_1 + m_2)a \\ \Rightarrow P_2 - P_1 - k\Delta l - kx &= (m_1 + m_2)a \\ \Rightarrow -kx &= (m_1 + m_2)a \Rightarrow (x)'' + \frac{k}{m_1 + m_2}x = 0\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \omega^2 = \frac{k}{m_1 + m_2} \Rightarrow (x)'' + \omega^2 x = 0$$

$$\text{Vậy hệ DĐĐH với tần số góc } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}.$$

### 3. Cơ hệ 3:

Cho cơ hệ như hình. Thanh AB dài  $l = 1$  (m), lò xo có độ cứng  $k = 4$  (N/m). M là trung điểm AB. Vật nặng  $m = 100$  (g). Bỏ qua mọi ma sát. Bỏ qua khối lượng thanh và lò xo. Khi cân bằng thì AB thẳng đứng. Kéo (hay nén) B một đoạn 2 (cm) rồi thả nhẹ. Chứng minh hệ DĐĐH.



Bằng phương pháp năng lượng:

Chọn mốc thế năng ngang qua vị trí cân bằng.

Tại vị trí  $x$  bất kỳ (xem hình): lò xo dãn một đoạn  $\Delta l = \frac{x}{2}$ .

$$\text{Thế năng đàn hồi của lò xo: } W_t = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{4}x^2$$

Thế năng trọng trường của vật nặng:

$$W_t = mgh = mgl(1 - \cos\alpha) = mgl\left(1 - 1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) = mgl\frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2}mgl\frac{x^2}{l^2} = \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2$$

$$\left(\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}; x = \alpha l \Rightarrow \alpha^2 = \frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$\text{Thế năng tổng cộng: } W'_t = \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2 + \frac{1}{2}\frac{k}{4}x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{l} + \frac{k}{4}\right)x^2$$

$$\text{Động năng của vật: } W_d = \frac{1}{2}mv^2$$

$$W = W_d + W'_t = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{l} + \frac{k}{4}\right)x^2 = \text{const}$$

$$\Rightarrow (W)' = mv(v)' + \left(\frac{mg}{l} + \frac{k}{4}\right)x(x)' = 0$$

Cơ năng của hệ:

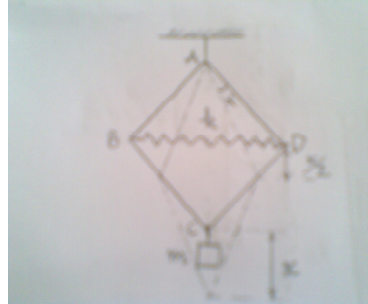
$$\Leftrightarrow m(x)'(x)'' + \left(\frac{mg}{l} + \frac{k}{4}\right)x(x)' = 0$$

$$\Leftrightarrow m(x)'' + \left(\frac{mg}{l} + \frac{k}{4}\right)x = 0 \Rightarrow (x)'' + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}\right)x = 0$$

$$\text{Đặt } \omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{4m} \Rightarrow (x)'' + \omega^2 x = 0. \text{ Vậy hệ DĐĐH.}$$

#### 4. Cơ hệ 4:

Cho bốn thanh mảnh có thể quay không ma sát quanh A, B, C, D (xem hình). Lò xo có độ cứng  $k = 20 \text{ (N/m)}$ . Vật nặng  $m = 200 \text{ (g)}$ . Bỏ qua khối lượng các thanh và lò xo. Khi hệ cân bằng thì ABCD là hình vuông. Kéo (hay nén) B, D để các thanh AB và AD hợp với vị trí ban đầu một góc  $\alpha$  nhỏ rồi thả nhẹ. Tìm tần số DĐĐH của vật.



Bằng phương pháp năng lượng:

$$\text{Vì } \alpha \text{ nhỏ} \Rightarrow x \approx \Delta l.$$

$$\text{Thế năng đàn hồi của lò xo: } W_t = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{Động năng của vật: } W_d = \frac{1}{2} m v^2$$

$$W = W_d + W_t = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{const}$$

$$\text{Cơ năng của hệ: } \Rightarrow (W)' = m v (v)' + k x (x)' = 0$$

$$\Leftrightarrow m(x)'(x)'' + kx(x)' = 0$$

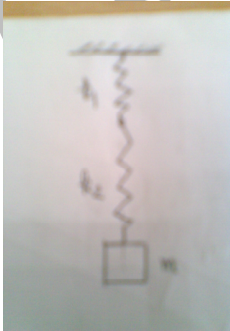
$$\Leftrightarrow m(x)'' + kx = 0 \Rightarrow (x)'' + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\text{Đặt } \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow (x)'' + \omega^2 x = 0$$

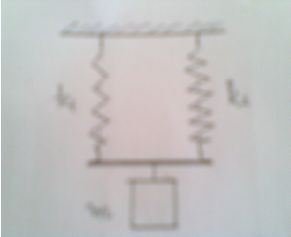
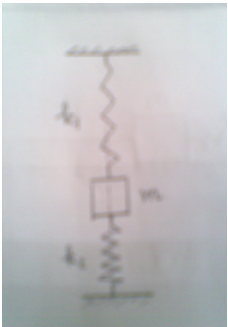
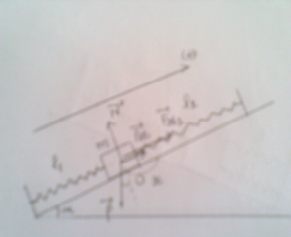
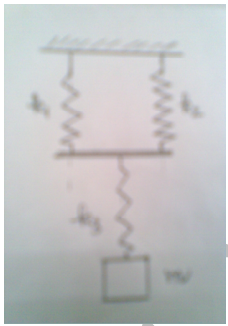
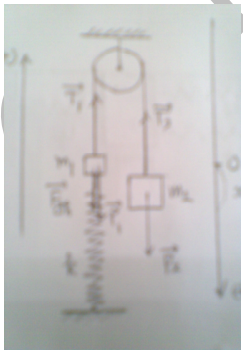
Vậy tần số dao động của vật:

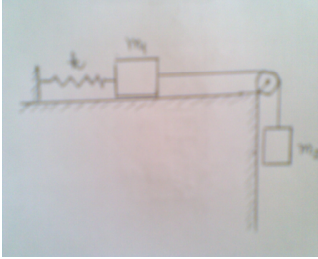
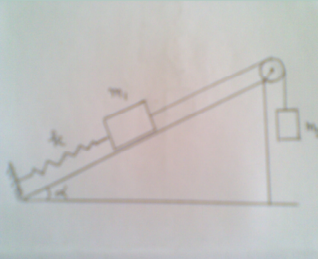
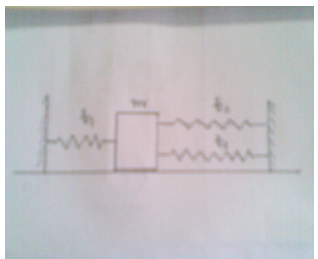
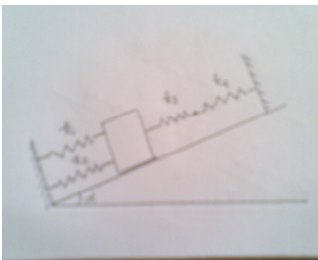
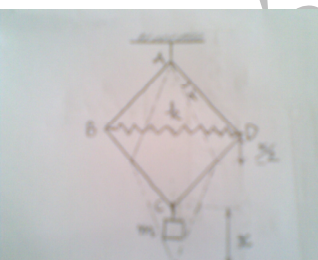
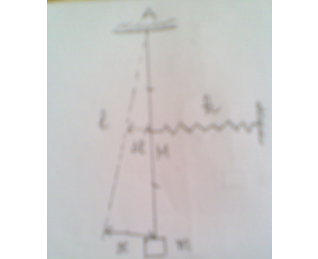
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20}{0,2}} = 1,59 \text{ (Hz)}.$$

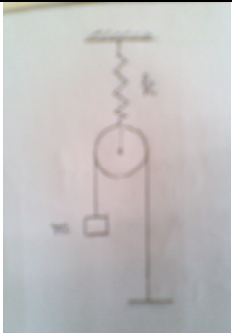
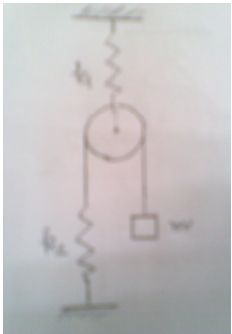
#### IV. Chu kỳ của các cơ hệ con lắc lò xo:

CƠ HỆ CLLX	ĐỘ CỨNG TƯƠNG ĐƯƠNG	CHU KỲ	GHI CHÚ
	$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$	



	$k = k_1 + k_2$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$	
	$k = k_1 + k_2$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$	
	$k = k_1 + k_2$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$	
	$k = \frac{(k_1 + k_2)k_3}{k_1 + k_2 + k_3}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2 + k_3)}{(k_1 + k_2)k_3}}$	
		$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$	

		$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$	
		$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$	
	$k = k_1 + k_2 + k_3$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2 + k_3}}$	
	$k = k_1 + k_2 + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	
		$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	
		$T = \frac{2\pi}{\omega}$  Với $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}}$	

		$T = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}}$	
	$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + 4k_2}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + 4k_2)}{k_1 k_2}}$	

Cơ hệ CON LẮC ĐƠN