CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp đặt ẩn phụ giải phương trình vô tỉ.

Đoàn Thế Hòa -16 tuổi
10A7-THPT Long Khánh - Đồng Nai.

I. Các kiến thức cần nhớ.

1. Ta gọi là *phương trình vô tỉ,* mọi phương trình có chứa ẩn dưới căn thức. Hay nói khác đi, đó là phương trình có dạng $f(x)=0$, trong đó $f(x)$ là một hàm số đại số vô tỉ (có chứa căn thức của biến số); x có thể là một biến (khi đó phương trình có một ẩn); x có thể xem là n biến với $x=(x_1,x_2,....,x_n)\in C^n$ (khi đó phương trình có n ẩn). Ta đã biết rằng trong lý thuyết căn số có các định lý cơ bản sau đây:

a) Căn số bậc n của một số phức $a\in C,\ a\neq 0,$ có n giá tri6 phân biệt.

b) Mỗi số thực đều tồn tại một căn số thực bậc lẻ duy nhất cùng dấu với nó. Mỗi số thực âm $(a\in\mathbb{R},a<0)$ không tồn tại căn số thực bậc chẵn bất kì. Mỗi số thực dương $(a\in\mathbb{R},a>0)$ có hai căn số thực bậc chẵn đối nhau, trong đó giá trị dương của căn số được gọi là *căn số số học* và được kí hiệu bởi $\sqrt[2k]{a}$. Căn bậc n bất kì $\left(n\in N^*\right)$ của số 0 trên mọi trường đều bằng 0. Như vậy khi làm việc với các căn số thực, khi viết $\sqrt[2k]{A}$ phải nhớ rằng $\begin{cases}1/\ A\ge 0\,(de\,can\,thuc\,co\,nghia)\\ 2/\sqrt[2k]{A}\ge 0\,(dinh\,nghia\,can\,so\,so\,hoc)\end{cases}$

2. Phương pháp đặt ẩn phụ (ta tạm thời chia thành 4 dạng) .

a) Dạng 1: là việc sử dụng một ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ.

Ta lưu ý các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau:

- Nếu bài toán chứa $\sqrt{f(x)}$ và $f(x)$ có thể:

  Đặt: $t=\sqrt{f(x)}$, điều kiện tối thiểu $t\ge 0$, khi đó $f(x)=t^2$.

- Nếu bài toán chứa $\sqrt{f(x)},\ \sqrt{g(x)}$ và $\sqrt{f(x)}.\sqrt{g(x)}=k\ (k=const)$ có thể:

  Đặt: $t=\sqrt{f(x)}$, điều kiện tối thiểu $t\ge 0$, khi đó $\sqrt{g(x)}=\dfrac{k}{t}$.

- Nếu bài toán chứa $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)},\sqrt{f(x).g(x)}$ và $f(x)+g(x)=k\ (k=const)$ có thể:

  Đặt: $t=\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}$, khi đó $\sqrt{f(x).g(x)}=\dfrac{t^2-k}{2}$.

- Nếu bài toán chứa $\sqrt{a^2-x^2}$ có thể:

  Đặt: $x=|a|\sin t$ với $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ hoặc $x=|a|\cos t$ với $0\le t\le\pi$.

- Nếu bài toán chứa $\sqrt{x^2-a^2}$ có thể:

  Đặt: $x=\dfrac{|a|}{\sin t}$ với $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\backslash\{0\}$ hoặc $x=\dfrac{|a|}{\cos t}$ với $t\in[0;\pi]\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

- Nếu bài toán chứa $\sqrt{a^2+x^2}$ có thể:

Đặt: $x = |a|\tan t$ với $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x = |a|\cot t$ với $t \in (0;\pi)$.

- Nếu bài toán chứa $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ có thể: đặt $x = a\cos 2t$.
- Nếu bài toán chứa $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ có thể đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$.

<u>Chú ý</u>:với các phương trình căn thức chứa tham số sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, nhất thiết ta phải đi tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ. Để tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ đối với các phương trình vô tỉ, ta có thể lựa chọn một trong các phương pháp sau:

+ Sử dụng tam thức bậc hai.
+ Sử dụng các bất đẳng thức.
+ Sử dụng đạo hàm.

b) <u>Dạng 2</u>: là việc sử dụng một ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x. Phương pháp này thường được sử dụng đối với những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho một biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp. Khi đó thường ta được một phương trình bậc hai theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biệt số Δ là một số chính phương.

c) <u>Dạng 3</u>: là việc sử dụng k ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một hệ phương trình với k ẩn phụ. Trong hệ mới thì $k-1$ phương trình nhận được từ các mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng. Chẳng hạn đối với phương trình: $\sqrt[m]{a-f(x)} + \sqrt[m]{b+f(x)} = c$, ta có thể đặt: $\begin{cases} u = \sqrt[m]{a-f(x)} \\ v = \sqrt[m]{b+f(x)} \end{cases}$, suy ra $u^m + v^m = a+b$.

Khi đó ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases} u^m + v^m = a+b \\ u+v=c \end{cases}$.

d) <u>Dạng 4</u>: là việc sử dụng một ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một hệ phương trình với một ẩn phụ và một ẩn x .Ta thực hiện theo các bước:

*Bước*1: Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu thức trong phương trình.

*Bước*2: Biến đổi phương trình về dạng: $f\left[x, \varphi(x)\right] = 0$.

*Bước*3: Đặt $y = \varphi(x)$, ta biến đổi phương trình thành hệ: $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$.

Ta lưu ý rằng:

+ Các hệ thu được thông thường là các hệ đối xứng.
+ Chú ý các trường hợp:

- Đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại II:

☟ Phương trình dạng: $x^n + b = a\sqrt[n]{ax-b}$. Đặt: $t = \sqrt[n]{ax-b}$ thì lúc này ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases} x^n + b = at \\ t^n + b = ax \end{cases}$.

☞ Phương trình dạng: $x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}}$. Đặt: $t = a + \sqrt{x}$ thì lúc này ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases} x = a + \sqrt{t} \\ t = a + \sqrt{x} \end{cases}$.

☞ Phương trình dạng: $\sqrt[n]{ax+b} = c(dx+e)^n + \alpha x + \beta$ với các hệ số thỏa mãn điều kiện rằng: $\begin{cases} d = ac + \alpha \\ e = bc + \beta \end{cases}$ thì ta đặt: $dy + e = \sqrt[n]{ax+b}$.

- Đặt ẩn phụ đưa về hệ gần đối xứng.

II. Bài tập.

1./ Giải phương trình: $2\sqrt[n]{(1+x)^2} + 3\sqrt[n]{1-x^2} + \sqrt[n]{(1-x)^2} = 0$

Vì $x = \pm 1$ không là nghiệm, chia hai vế của phương trình cho $\sqrt[n]{(1-x)^2}$, ta có:

Phương trình đã cho tương đương: $2\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}} + \sqrt[n]{\dfrac{1-x}{1+x}} + 3 = 0$ (*)

Nhận xét rằng: $\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}}.\sqrt[n]{\dfrac{1-x}{1+x}} = 1$, nên nếu đặt: $t = \sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}} \Rightarrow \sqrt[n]{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{t}$.

Khi đó: phương trình (*) $\Leftrightarrow 2t + \dfrac{1}{t} + 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Bây giờ, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: nếu n chẵn

- Khi đó điều kiện của t phải không âm, do đó hai nghiệm trên bị loại.
- Vậy: phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: nếu n lẻ

- Với: t=-1, ta được: $\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} = -1$ vô nghiệm.
- Với: $t = -\dfrac{1}{2}$, ta được: $\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} = -\dfrac{1}{2^n} \Leftrightarrow x = \dfrac{1+2^n}{1-2^n}$.

Vậy: với n lẻ phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1+2^n}{1-2^n}$.

2./ Giải phương trình: $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0$

Phương trình đã cho tương đương: $\dfrac{1}{8}(4x-4)^2 - \dfrac{7}{4}(4x-4) + 12 - \sqrt[3]{4x-4} = 0$ (*)

Đặt: $u = \sqrt[3]{4x-4}$, khi đó phương trình (*) trở thành:

$$u^6-14u^3-24u+96=0$$
$$\Leftrightarrow (u-2)^2\left(u^4+4u^3+18u+24\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-2=0 \\ u^4+4u^3+18u+24=0\,(vn) \end{array}\right. \Rightarrow u=2 \Rightarrow x=3$$

Vậy: phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

***Nhận xét**: với bài toán này có lẽ nhiều người đọc vào sẽ thắc mắc ở phương trình (*) tại sao lại có thể biến đổi được như thế và tại sao lại làm vậy? Có phải tự nhiên hay may mắn để ta biến đổi như thế không? Câu trả lời cũng dễ thôi. Vì nhìn vào phương trình ban đầu ta khó lòng để đặt ngay đặt ẩn phu và bước biến đổi để được phương trình (*) từ phương trình đầu thông qua hệ số bất định. Ta cần tìm $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ sao cho:*

$$2x^2-11x+21=\alpha(4x-4)^2+\beta(4x-4)+\gamma$$

$\Leftrightarrow 2x^2-11x+21=16\alpha x^2+(4\beta-32\alpha)x+(16\alpha-4\beta+\gamma)$ *đến đây ta tiếp tục giải như trên.*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16\alpha=2 \\ 4\beta-32\alpha=-11 \\ 16\alpha-4\beta+\gamma=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{8} \\ \beta=-\dfrac{7}{4} \\ \gamma=12 \end{cases}$$

3./ Giải phương trình: $\sqrt{(6-x)(4+x)}=x^2-2x-12$

Đặt: $y=\sqrt{(6-x)(4+x)}=\sqrt{-x^2+2x+24}$

Với $-4\le x\le 6,\ \ y\ge 0\Rightarrow -x^2+2x+24=y^2$

$$\Rightarrow x^2-2x-12=12-y^2$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$y=12-y^2 \Leftrightarrow y^2+y-12=0\ (y\ge 0)$$
$$\Leftrightarrow y=3\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Vậy: phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\{5;-3\}$

4./ Giải phương trình: $3x^2+21x+18+2\sqrt{x^2+7x+7}=2$

Điều kiện xác định: $x^2+7x+7\ge 0$ (1)

Đặt: $\sqrt{x^2+7x+7}=y\ge 0$ thì $x^2+7x+7=y^2$

$$(1)\Leftrightarrow 3y^2-3+2y=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\,(nhan) \\ y=\dfrac{-5}{3}\,(loai) \end{array}\right.$$

$$\sqrt{x^2+7x+1}=1 \Leftrightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=6 \end{array}\right.$$

Vậy: phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\{-1;6\}$

5./ Giải phương trình: $x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-6}=18$

Điều kiện xác định: $\sqrt{x^2+3x-6}\geq 0$

Phương trình đã cho tương đương: $\left(x^2+3x-6\right)+4\sqrt{x^2+3x-6}-12=0\,(*)$

Đặt: $\sqrt{x^2+3x-6}=t\geq 0$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow t^2+4t-12=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\,(nhan) \\ t=-6\,(loai) \end{array}\right.$$

Với: $t=2 \Rightarrow x^2+3x-6=2 \Leftrightarrow x^2+3x-10=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-5 \end{array}\right.$$

Vậy: phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\{-5;2\}$

6./ Giải phương trình: $3\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{x-3}-\sqrt{11x^2+25x+2}=0$

Điều kiện xác định: $x\geq 3$

Bình phương hai vế phương trình ta được:

$$-2x^2+12x-50+6\sqrt{x^2+4x-5}.\sqrt{x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow -2\left(x^2+4x-5\right)+20\left(x-3\right)+6\sqrt{x^2+4x-5}.\sqrt{x-3}=0$$

Thấy $x=3$ không phải là nghiệm của phương trình.

Xét: $x>3$

Chia cả hai vế cho $\sqrt{x^2+4x-5}.\sqrt{x-3}$ ta được:

$$-2\frac{\sqrt{x^2+4x-5}}{\sqrt{x-3}}+20\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2+4x-5}}+6=0$$

Đặt: $t=\dfrac{\sqrt{x^2+4x-5}}{\sqrt{x-3}}$, $t\geq 0$

Phương trình trở thành: $-2t^2+6t+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5\,(nhan) \\ t=-2\,(loai) \end{array}\right.$

Với: $t=5$, ta được: $x^2-21x+70=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{21+\sqrt{161}}{2} \\ x=\dfrac{21-\sqrt{161}}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện vậy: ta nhận $x=\dfrac{21\pm\sqrt{161}}{2}$ là nghiệm phương trình đã cho.

Nhận xét: *với bài toán này ta không thể nhìn để đặt ngay được ẩn phụ mà phải thực hiện phép biến đổi mới có thể đặt được.*

7./ Giải phương trình: $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$

Điều kiện xác định: $x\ge 1$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3(x-1)+2(x^2+x+1)=7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$ (*)

Thấy $x=1$ không thỏa mãn phương trình

$$(*)\Leftrightarrow 3+2\frac{x^2+x+1}{x-1}=7\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}}$$

Đặt: $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x-1}}=t>0$, ta được: $2t^2-7t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Với: $t=3$ thay vào giải ta được $x=4\pm\sqrt{6}$

Với: $t=\dfrac{1}{2}$ thay vào giải ta thấy phương trình này vô nghiệm

Vậy: phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\left\{4-\sqrt{6};4+\sqrt{6}\right\}$

Nhận xét: *Chắc hẳn nhiều người khi đọc lời giải đều thấy rất băn khoăn ở (*). Làm sao có thể định hướng viết lại như thế, thật là thiếu tính tự nhiên. Tuy nhiên ẩn sau sự thiếu tính tự nhiên đó là một điều hết sức tự nhiên. Nhìn vào đề bài ta sẽ cố gắng tìm cách đưa về dạng* $af^2(x)+bg^2(x)=cf(x)g(x)$*, với* $f=\sqrt{x-1}$ *và* $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}$*. Vì vậy ta sẽ phải tìm được hai số* α *và* β *thỏa mãn:* $\alpha(x-1)+\beta(x^2+x+1)=2x^2+5x-1$*. Đồng nhất hệ số ta có thể tìm ra được.*

8./ Giải phương trình: $\sqrt{y+2\sqrt{y-1}}+\sqrt{y-2\sqrt{y-1}}=\dfrac{y+3}{2}$

Với: $y\ge 0$, đặt: $x=\sqrt{y-1}, x\ge 0\Rightarrow x^2=y-1$

$$\Rightarrow y=x^2+1$$

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{x^2+1+2x}+\sqrt{x^2+1-2x}=\dfrac{x^2+4}{2}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x^2+1)^2}+\sqrt{(x^2-1)^2}=\frac{x^2+4}{2}$$

$$\Leftrightarrow|x+1|+|x-1|=\frac{x^2+4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x+1+|x-1|=\frac{x^2+4}{2}\ (*)$$

+ Nếu $x \geq 1$, ta có: (*) $\Leftrightarrow x+1+x-1=\dfrac{x^2+4}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{x^2+4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+4=4x$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=2\ (thoa)$$

$$\Leftrightarrow y=5\ (thoa)$$

+ Nếu $0<x\leq 1$, ta có: (*) $\Leftrightarrow x+1+(1-x)=\dfrac{x^2+4}{2}$

$$\Leftrightarrow 2=\frac{x^2+4}{2}$$

$$S=\{-2;1\} \Leftrightarrow x^2+4=4$$

$$\Leftrightarrow x=0\,(thoa)$$

$$\Leftrightarrow y=1(thoa)$$

Vậy: tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{1;5\}$

9./ Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x^2-6}=42$

Đặt: $z=\sqrt{x^2-6}$, với $|x|\geq\sqrt{6}$ (*), $z\geq 0$

$$\Rightarrow z^2=x^2-6 \Leftrightarrow x^2=z^2+6$$

Phương trình đã cho trở thành: $z^2+z-36=0 \Leftrightarrow z\dfrac{-1\pm\sqrt{145}}{2}$

$$z\geq 0 \Rightarrow z=\frac{-1+\sqrt{145}}{2}$$

$$\Rightarrow x^2=z^2+6=\frac{85-\sqrt{145}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{85-\sqrt{145}}{2}}\ (thoa)$$

Vậy: phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\left\{-\sqrt{\dfrac{85-\sqrt{145}}{2}};\sqrt{\dfrac{85-\sqrt{145}}{2}}\right\}$

<u>Nhận xét</u>*: Ngoài cách trên ta cũng có thể đặt:* $t=x^2, t\geq 0.$

Phương trình đã cho trở thành: $t+\sqrt{t-6}=42$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t-6} = 42 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 42 - t \ge 0 \\ t - 6 = (42-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 42 \\ t^2 - 85t + 1770 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \le 42 \\ t = \dfrac{85 \pm \sqrt{145}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{85 - \sqrt{145}}{2} \Rightarrow x$$

10./ Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x+7} + \sqrt{x^2+x+2} = \sqrt{3x^2+3x+19}$

Ta có: $x^2+x+7, x^2+x+2, 3x^2+3x+19 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Để cho gọn, ta đặt: $x^2+x+2 = t \Leftrightarrow x^2+x+2-t = 0$

Điều kiện xác định: $1 - 4(2-t) \ge 0 \Leftrightarrow t \ge \frac{7}{4}$ (*)

Suy ra: $x^2+x+7 = t+5$

$3x^2+3x+19 = 3t+13$

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{t+5} + \sqrt{t} = \sqrt{3t+13}$ với $t \ge \frac{7}{4}$

Bình phương hai vế, ta có: $2t+5+2\sqrt{t^2+5t} = 3t+13 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+5t} = t+8 (\bullet)$

Hai vế của phương trình $(\bullet)$ đều dương.

(Vì $t \ge \frac{7}{4}$), ta có: $4(t^2+5t) = (t+8)^2 \Leftrightarrow 3t^3 + 4t - 64 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -\dfrac{16}{3} \end{array}\right.$$

Từ (*) $\Rightarrow t = 4 \Rightarrow x^2+x+2 = 4$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Vậy: phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S = \{-2;1\}$

11./ Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x-1} = 2$

Đặt: $t = \sqrt{x-1}$, với $x \ge 1$, $t \ge 0 \Rightarrow t^2 = x-1$

Phương trình đã cho viết lại: $\sqrt{(x-1)^2+4} = 2 - \sqrt{x-1}$

trở thành: $\sqrt{t^4+4} = 2-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 2 \\ t^4 + 4 = 4 - 4t + t^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 2 \\ t^4 - t^2 + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t^3 - t + 4 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left(t^3 - t + 4 > 0, \forall t \in [0;2]\right)$$

$$\Leftrightarrow t = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy: nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$.

12./ Giải phương trình: $4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^3}$

Điều kiện: $\begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ 4x^3 - 3x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le x \le 0 \\ x \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le x \le 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \le x \le 1 \end{array}\right.$ (*)

Với điều kiện (*), ta có: $\left(4x^3 - 3x\right)^2 = 1 - x^2$

$$\Leftrightarrow 16x^6 - 24x^4 + 9x^2 = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^6 - 24x^4 + 10x^2 - 1 = 0$$

Đặt $y = x^2, 0 \le y \le 1$, ta có: $16y^3 - 24y^2 + 10y - 1 = 0 \, (\bullet)$

Nhận xét rằng phương trình đã cho có một nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$ do đó:

$$(\bullet) \Leftrightarrow (2y - 1)\left(8y^2 - 8y + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ y = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4} \end{array}\right.$$ Các nghiệm này đều dương

Từ (*) suy ra:

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S = \left\{ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}; \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right\}$

<u>Nhận xét:</u> *@ Ngoài cách trên ta cũng có thể đặt:* $x = \cos t$ *với* $0 \le t \le \pi$

Phương trình đã cho trở thành: $4\cos^3 t - 3\cos t = \sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t| = \sin t$ *(vì sao?)*

$$\Leftrightarrow \cos 3t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \frac{\pi}{2} - t + k2\pi \\ 3t = -\frac{\pi}{2} + t + l2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ t = -\frac{\pi}{4} + l\pi \end{array}\right.$$

với $k, l \in \mathbb{Z}$

Vì $0 \le t \le \pi$ *nên ta có:*

- $t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{8} \\ t = \frac{5\pi}{8} \end{array}\right.$
- $t = -\frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4}$

Do đó phương trình đã cho có ba nghiệm:

$$x_1 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$x_3 = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

@ Thật ra câu này là câu thứ ba của một bài hàm số mà câu thứ hai là câu khảo sát hàm số $y = f(x) = 4x^3 - 3x$*. Trong một bài toán hàm số, nếu có một câu đại số thì cách giải hay nhất là dựa vào các câu trên của bài hàm số. Phương trình* $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$ *có thể xem là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị* $(C): y = f(x) = 4x^3 - 3x$ *và đường* (γ)*, đồ thị của hàm số* $y = \sqrt{1-x^2}$ *.*

Với $1 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$ *và* $y \ge 0$*, ta có:* $y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \ (\bullet\bullet)$

$(\bullet\bullet)$ *là đường tròn tâm O bán kính* $R = 1$.

Do đó (γ) *là nửa đường tròn (O), nằm trên trục Ox và cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt. Vì vậy phương trình* $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$ *có 3 nghiệm phân biệt.*

13./ Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$

Điều kiện: $1-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

Đặt: $x = \sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Khi đó phương trình có dạng: $\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 t}} = \sin t\left(1+2\sqrt{1-\sin^2 t}\right) \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos t} = \sin t\left(1+2\cos t\right)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = 2\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\left(1-\sqrt{2}\sin\frac{3t}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{t}{2} = 0 \ (loai)\\ \sin\frac{3t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = \frac{\pi}{6}\\ t = \frac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{2}\\ x = 1\end{array}\right.$$

Vậy: tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S = \left\{\frac{1}{2};1\right\}$

14./ Giải phương trình: $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{2}$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

Với điều kiện trên, đặt $x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó phương trình có dạng: $\frac{1}{\cos t} + \frac{\frac{1}{\cos t}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin t + \cos t = 2\sqrt{2}\sin t.\cos t$

Đặt: $\sin t + \cos t = u,\ 1 \le u \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin t.\cos t = \frac{u^2-1}{2}$

Khi đó phương trình có dạng: $u = \sqrt{2}\left(u^2-1\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}u^2 - u - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u = \sqrt{2}\\ u = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ (loai)\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \sin t + \cos t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Vậy: phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{2}$.

<u>Nhận xét</u>*: đối với bài này ta vẫn tiếp tục sử dụng lượng giác hóa, xong ở đây chúng ta sẽ nhận được phương trình lượng giác dạng đối xứng với* sin *và cos.*

15./ Giải phương trình: $\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2+1}{2x}=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$

Điều kiện: $\begin{cases} x\neq \pm 1 \\ x\neq 0 \end{cases}$, đặt: $x=\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\backslash\left\{\pm\frac{\pi}{4};0\right\}$, khi đó:

$$x^2+1=\tan^2 t+1=\frac{1}{\cos^2 t}\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\cos t},$$

$$\sin 2t=\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow\frac{x^2+1}{2x}=\frac{1}{\sin 2t},$$

$$\cos 2t=\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}=\frac{1-x^2}{x^2+1}\Rightarrow\sin 2t.\cos 2t=\frac{2x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\sin 4t=\frac{4x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\Leftrightarrow\frac{2}{\sin 4t}=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$$

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin 2t}=\frac{2}{\sin 4t}\Leftrightarrow 4\sin t.\cos 2t+2\cos 2t=2$$

$$\Leftrightarrow 2\sin t.\cos 2t=1-\cos 2t\Leftrightarrow 2\sin t.\cos 2t=2\sin^2 t\Leftrightarrow\left(\cos 2t-\sin t\right)\sin t=0$$

$$\Leftrightarrow\left(1-2\sin^2 t-\sin t\right)\sin t=0\Leftrightarrow\left(\sin t+1\right)\left(2\sin t-1\right)\sin t=0$$

$$\Leftrightarrow\sin t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy: nghiệm duy nhất của phương trình đã cho là: $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

16./ Giải phương trình: $1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

Nhận xét: $\sqrt{x}\sqrt{1-x}=\sqrt{x-x^2}$; $x+\left(1-x\right)=1$

Với điều kiện: $\begin{cases} x\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq 1 \end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x\leq 1$ (*)

Đặt: $t=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}, t\geq 0$

Ta có:

- $t^2=\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)^2\leq 2\left(x+1-x\right)=2$

  $\Rightarrow -\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}, t\geq 0\Rightarrow 0\leq t\leq\sqrt{2}$ (**)

- $t^2=x+1-x+2\sqrt{x-x^2}=1+2\sqrt{x-x^2}$

  $\Rightarrow\sqrt{x-x^2}=\frac{t^2-1}{2},\ t\leq -1\vee t\geq 1$

Từ (**) $\Rightarrow 1 \le t \le \sqrt{2}\ (\bullet)$

Phương trình đã cho trở thành: $1 + \frac{2}{3}.\frac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 2$

Từ $(\bullet) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{x - x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$

Vậy: tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0;1\}$

17./ Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+2} - 2\sqrt{2x^2+5x-6} = 1$

Điều kiện xác định: $2x^2 + 5x - 6 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{-5-\sqrt{73}}{4} \\ x \ge \dfrac{-5+\sqrt{73}}{4} \end{array}\right.$ (*)

Đặt: $y = \sqrt{2x^2+5x-6} \ge 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 6 = y^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = y^2 + 8$

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{y^2+8} - 2y = 1 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+8} = 2y + 1\ (\bullet)$

$$y^2 + 8 = 4y^2 + 4y + 1$$

Hai vế của phương trình $(\bullet)$ đều dương, ta có: $\Leftrightarrow 3y^2 + 4y - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{7}{3} \end{array}\right. \Rightarrow y = 1$$

Do đó ta có: $2x^2 + 5x - 6 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$ (thỏa)

Vậy: tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S = \left\{-\frac{7}{2};1\right\}$

<u>Nhận xét:</u> *ngoài ra với điều kiện (*) ta có thể đặt:* $u = 2x^2 + 5x \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - u = 0$

Điều kiện: $25 + 8u \ge 0 \Leftrightarrow u \ge -\frac{25}{8}$

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{u+2} - 2\sqrt{u-6} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{u+2} = 2\sqrt{u-6} + 1$

Với $u - 6 \ge 0 \Leftrightarrow u \ge 6$, *ta có:* $u + 2 = 4(u-6) + 1 + 4\sqrt{u-6}$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{u-6} = -3u + 25$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3u + 25 \geq 0 \\ 16(u-6) = 9u^2 + 625 - 150u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u \leq \dfrac{25}{3} \\ 9u^2 - 166u + 721 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 \leq u \leq \dfrac{25}{3} \\ \left[\begin{array}{l} u = 7 \\ u = \dfrac{109}{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = 7 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

18./ Giải phương trình: $5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}} + 3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}} = 8$

Phương trình đã cho tương đương với: $5\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^6}} + 3\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^4}} = 8 \Leftrightarrow 5\sqrt[15]{x^6} + 3\sqrt[15]{x^4} = 8$

Đặt: $y = \sqrt[15]{x^2}$ với $y \geq 0,$ ta có:

$$5y^3 + 3y^2 - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y-1)(5y^2 + 8y + 8) = 0$$
$$\Leftrightarrow y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Do đó ta có: $\sqrt[15]{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

Vậy: tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S = \{-1;1\}$.

19./ Giải phương trình: $\sqrt[5]{x^4} - \dfrac{7}{\sqrt[5]{x^2}} + \dfrac{6}{x} = 0$

Điều kiện: $x \neq 0.$ Ta có phương trình đã cho tương đương:

$$\sqrt[5]{x^4} - \frac{7}{\sqrt[5]{x^2}} + \frac{6}{\sqrt[5]{x^5}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^9} - 7\sqrt[5]{x^3} + 6 = 0 \quad (*)$$

Đặt: $y = \sqrt[5]{x^9}$, $y \neq 0,$ phương trình (*) trở thành:

$$y^3-7y+6=0 \Leftrightarrow (y-1)\left(y^2+y-6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2 \quad (thoa\ y\neq 0) \\ y=-3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{x^3}=1 \\ \sqrt[5]{x^3}=2 \\ \sqrt[5]{x^3}=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2\sqrt[3]{4} \quad (thoa\ x\neq 0) \\ x=-3\sqrt[3]{9} \end{array}\right.$$

Vậy: tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{-3\sqrt[3]{9};1;2\sqrt[3]{4}\right\}$.

20./ Giải phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x}=1$

Đặt: $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}, y>0 \Rightarrow y^2=2x+1+2\sqrt{x^2+x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}=\frac{y^2-2x-1}{2},\ y^2\geq 2x+1$$

Phương trình đã cho trở thành: $y-\dfrac{y^2-2x-1}{2}=1 \Leftrightarrow y^2-2y+1-2x=0\ (\bullet)$

Với điều kiện $\Delta'=2x\geq 0,$ phương trình $(\bullet)$ có hai nghiệm là:

$$y_1=1-\sqrt{2x};\ \ y_2=1+\sqrt{2x}$$

+ Với: $y_1=1-\sqrt{2x}, 0\leq x\leq \dfrac{1}{2}$, ta có: $\sqrt{x^2+x}=\dfrac{y^2-2x-1}{2}=-\sqrt{2x} \Rightarrow x=0$

+ Với: $y_2=1+\sqrt{2x} \Rightarrow \sqrt{x^2+x}=\sqrt{2x} \Leftrightarrow x^2+x=2x$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy: phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\{0;1\}$

21./ Giải phương trình: $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$

Điều kiện: $\begin{cases} 4x-1\geq 0 \\ 4x^2-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{1}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x\leq -\dfrac{1}{2} \\ x\geq \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{2}\ \ (*)$

Bình phương hai vế phương trình đã cho, ta có:

$$(4x-1)+\left(4x^2-1\right)+2\sqrt{(4x-1)\left(4x^2-1\right)}=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(4x-1)\left(4x^2-1\right)}=3-4x^2-4x=4-(2x+1)^2 \quad (\bullet)$$

Đặt: $y=2x+1 \Rightarrow 4x-1=2y-3,\ 4x^2-1=y^2-2y$

Phương trình $(\bullet)$ trở thành:

$$2\sqrt{(2y-3)(y-2)y}=4-y^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-y^2\ge 0 \\ 4(2y-3)(y-2)y=(4-y^2)^2=(y+2)^2(y-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\le y\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} y-2=0 \\ 4(2y-3)y=(y+2)^2(y-2) \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\le y\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y^3-6y^2+8y-8=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow y=2$$

(Hàm số $g(y)=y^3-6y^2+8y-8$ lấy giá trị âm trên toàn miền $[-2;2]$)

Do đó ta có: $2x+1=2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Vậy: nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{1}{2}$.

22./ Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4(2x^2-4x+1)$

Với điều kiện: $\begin{cases} 2x-x^2\ge 0 \\ 1-\sqrt{2x-x^2}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ \sqrt{2x-x^2}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 2x-x^2\le 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ x^2-2x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ (x-1)^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 2 \ \ (*)$$

Ta có: $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4(2x^2-4x+1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2\left[(x^2-2x)+1\right]^2\left[2(x^2-4x)+1\right] \ \ (2)$$

Đặt: $t=\sqrt{2x-x^2}$, $t\ge 0\Leftrightarrow t^2=2x-x^2$

$$\Leftrightarrow x^2-2x=-t^2\Leftrightarrow (x-1)^2=1-t^2\Rightarrow 0\le t\le 1 \ \ (**)$$

Phương trình (2) trở thành: $\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}=2(1-t^2)^2(1-2t^2)$ (3)

Mặt khác, với mọi $t\in[-1;1]$, ta có:

$$\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}\right)^2 = 2+2\sqrt{1-t^2} \geq 1+2\sqrt{1-t^2}+1-t^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}\right)^2 \geq \left(1+\sqrt{1-t^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+t}+\sqrt{1-t} \geq 1+\sqrt{1-t^2}$$

Ta lại có: $0 \leq \sqrt{1-t^2} \leq 1 \Rightarrow 1-t^2 \leq \sqrt{1-t^2}$

$$\Rightarrow 2-t^2 \leq 1+\sqrt{1-t^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+t}+\sqrt{1-t} \geq 2-t^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta có:

$$2\left(1-t^2\right)^2\left(1-2t^2\right) \geq 2-t^2$$

$$\Leftrightarrow -4t^6+10t^4-8t^2+2 \geq 2-t^2$$

$$\Leftrightarrow t^2\left(4t^4-10t^2+7\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 \leq 0$$

$\Leftrightarrow t=0$, thỏa (**)

Do đó ta có: $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ (thỏa)

Vậy: phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\{0;2\}$

23./ Giải phương trình: $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=\dfrac{x+5}{2}$

Với: $x \geq -1,$ đặt $y=\sqrt{x+1}, y \geq 0 \Rightarrow x=y^2-1$

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2-2y+1}=\dfrac{y^2+4}{2}$

$$\Leftrightarrow |y+1|+|y-1|=\frac{y^2+4}{2}$$

$$\Leftrightarrow y+1|y-1|=\frac{y^2+4}{2}$$

\+ Nếu: $y \geq 1,$ ta có: $2y=\dfrac{y^2+4}{2} \Leftrightarrow y^2-4y+4=0 \Leftrightarrow y=2$, thỏa

$$\Rightarrow x=3$$

\+ Nếu: $0 \leq y \leq 1,$ ta có: $2=\dfrac{y^2+4}{2} \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow x=-1,$ thỏa.

Vậy: phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\{-1;3\}$

24./ Giải phương trình: $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$

Điều kiện xác định: $x \geq 1$

Đặt: $t=\sqrt{x+1}$, phương trình đã cho trở thành: $x^2+12x-36=0$. Xét phương trình theo ẩn t ta được: $t=\dfrac{-6\pm 6t}{x}$

Với: $t=\dfrac{-6+6t}{x}$, ta có: $6=(6-x)t$. Do $x=6$ không phải là nghiệm nên $t=\dfrac{6}{6-x}$ hay $\sqrt{x-1}=\dfrac{6}{6-x}$. Bình phương hai vế ta giải ra được $x=3$.

Với: $t=\dfrac{-6-6t}{x}$ thì $(x+6)t=-6$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy: phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=3$.

<u>Nhận xét</u>: *ta có thể tổng quát bài toán lên thành $x^2+ax+2b\sqrt{x+a}=b^2$, lời giải cho trường hợp tổng quát tương tự lời giải trên.*

25./ Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$

Với điều kiện: $\begin{cases}3x-2\ge 0\\ x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge \dfrac{2}{3}\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$ (*)

Đặt: $t=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1},\ t\ge 0$ (**)

$\Rightarrow t^2=4x-3+2\sqrt{(3x-2)(x-1)}$

$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2-5x+2}=t^2-4x+3$

Phương trình đã cho trờ thành: $t=4x-9+\left(t^2-4x+3\right)$

$$\Leftrightarrow t^2-t-6=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=3\end{array}\right.$$

Từ (**) $\Rightarrow t=3$

$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2-5x+2}=9-4x+3=12-4x$

$\Leftrightarrow\begin{cases}12-4x\ge 0\\ 3x^2-5x+2=(6-2x)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ x^2-19x+34=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 3\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=17\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=2$

Vậy: Phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=2$.

26./ Giải phương trình: $\left(4x-1\right)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$

Đặt: $t=\sqrt{x^3+1}$, với $t\ge 0\Rightarrow t^2=x^3+1$.

Khi đó phương trình có dạng: $\left(4x-1\right)x=2\left(x^3+1\right)+2x-1\Leftrightarrow 2t^2-\left(4x-1\right)t+2x-1=0$

Ta có: $\Delta=\left(4x-1\right)^2-8\left(2x-1\right)=\left(4x-3\right)^2$ do đó pt đã cho có nghiệm: $t=\dfrac{4x-1\pm\left(4x-3\right)}{4}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2x-1\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-1\ge 0\\ x^3+1=\left(2x-1\right)^2\end{cases}\\ x^3+1=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}\\ x=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}\end{array}\right.$$

Vậy: tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}};2\right\}$

27./ Giải phương trình: $x^2+3x+1=\left(x+3\right)\sqrt{x^2+1}$

Đặt: $y=\sqrt{x^2+1},\ y>0\Leftrightarrow x^2+1=y^2-1$

Phương trình đã cho trở thành:

$$y^2+3x=\left(x+3\right)y\Leftrightarrow y^2-\left(x+3\right)y+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\ y=3\end{array}\right.$$

Vì $y=\sqrt{x^2+1}$ nên $y>\sqrt{x^2}=\left|x\right|\Rightarrow y\ne\pm x$

Do đó ta có: $y=3\Leftrightarrow x^2=y^2-1=8\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$

Vậy: tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right\}$

28./ Giải phương trình: $2\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+3\sqrt{1-x^2}=3-x$

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$

Phương trình đã cho tương đương: $1+x+2\left(1-x\right)-2\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-3\sqrt{1-x^2}=0$ (*)

Đặt: $u=\sqrt{1+x}\ge 0,\ v=\sqrt{1-x}\ge 0,$ khi đó phương trình (*) trở thành:

$$u^2+2v^2-2v+u-3uv=0 \Leftrightarrow \left(u^2-2uv\right)+\left(u-2v\right)-\left(uv-2v^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow u\left(u-2v\right)+\left(u-2v\right)-v\left(u-2v\right)=0 \Leftrightarrow \left(u-2v\right)\left(u-v+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-2v=0 \\ v=u+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+x}=2\sqrt{1-x} \\ \sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}+1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+x=4\left(1-x\right) \\ 1-x=x+2+2\sqrt{1+x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=3 \\ \begin{cases} \left(-1-2x\right)^2=4\left(x+1\right) \\ -1\le x\le -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{3} \\ \begin{cases} 4x^2=3 \\ -1\le -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{5} \\ \begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -1\le x\le -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{5} \\ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy: phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{5}\right\}$

***<u>Nhận xét</u>**: Cũng như trên chắc chắn nhiều người cũng sẽ thắc mắc làm thế nào để biến đổi được thành phương trình (*). Ta cũng dùng hệ số bất định. Ta cần tìm $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ sao cho:*

$$-x+3=\alpha\left(\sqrt{1-x}\right)^2+\beta\left(\sqrt{1+x}\right)^2$$

$\Leftrightarrow -x+3=\left(-\alpha+\beta\right)x+\alpha+\beta$ *. Đến đây chắc được rồi nhỉ, ta tiếp tục giải như trên.*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta=-1 \\ \alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=1 \end{cases}$$

28./ Giải phương trình: $\sqrt[4]{x+8}+\sqrt[4]{x-7}=3$

Đặt: $u=\sqrt[4]{x+8}\ge 0 \Leftrightarrow u^4=x+8 \Rightarrow x=u^4-8$

$v=\sqrt[4]{x-7}\ge 0 \Rightarrow v^4=x-7 \Rightarrow x=v^4+7$

$\Rightarrow u^4-v^4=15$

Ta có hệ: $\begin{cases} u+v=3 \\ u,v\ge 0 \\ u^4-v^4=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u \\ \left(u^2-v^2\right)\left(u^2+v^2\right)=15 \\ u,v\ge 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u \\ \left(u-v\right)\left(u+v\right)\left(u^2+v^2\right)=15 \\ u,v\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u \\ 0\le u\le 3 \\ \left(u-v\right)\left(u^2+v^2\right)=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le u \le 3 \\ (2u-3)\left[u^2+(3-u)^2\right]=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le u \le 3 \\ (2u-3)(2u^2-6u+9)=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le u \le 3 \\ 4u^3-18u^2+36u-32=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le u \le 3 \\ u=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x+8}=2 \\ \sqrt[4]{x-7}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+8=16 \\ x-7=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=8$$

Vậy: phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8$.

Bài tập đề nghị có hướng dẫn:

Θ ***Giải phương trình:*** $x^2-x+\sqrt{x^2-x+9}=3$

Đặt: $y=\sqrt{x^2-x+9}, y>0$

Giải phương trình ta được tập nghiệm là: $S=\{0;1\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt{x^2-3x+7}=x^2-3x-13$

Đặt: $y=\sqrt{x^2-3x+7}, y>0$

Giải phương trình ta nhận $x=-3$ và $x=6$ làm nghiệm phương trình đã cho.

Θ ***Giải phương trình:*** $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

Đặt: $\sqrt{2x^2+1}=t\ge 1$

Giải phương trình ta nhận $x=0$ là nghiệm phương trình đã cho.

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt{(x+4)(6-x)}=x^2-2x-12$

Đặt: $y=\sqrt{(x+4)(6-x)}$

Giải phương trình ta được tập nghiệm là: $S=\{-3;5\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}$

Với điều kiện: $-1\le x\le 1$, ta đặt: $x=\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$

Điều kiện: $|x|>1$. Nhận xét rằng $x<0\Rightarrow VT<0\Rightarrow$ pt vô nghiệm, do đó $x>1$

Đặt: $x=\frac{1}{\cos t},\ t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\left\{\frac{5}{4};\frac{5}{3}\right\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$

Đặt: $y=\sqrt{x^2+3x}$, $x\le 3 \vee x\ge 0, y\ge 0$

Phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\{-4;1\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$

Đặt: $y=\sqrt{2x-5}$, $x\ge\frac{5}{2}, y\ge 0$

Phương rình đã cho có nghiệm là $x=15$

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$

Đặt: $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x=1$

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}+12=2\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)$

Đặt: $y=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x=5$

Θ ***Giải phương trình:*** $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}+3=0$

Đặt: $y=(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}\Rightarrow y^2=(x-3)(x+1)$

Lưu ý rằng: ▪ Nếu $x>3$ thì $y>0$

▪ Nếu $x\le -1$ thì $y\le 0$

Phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\left\{1-\sqrt{5};1-\sqrt{13}\right\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-2x+5}+\sqrt{2x^2-6x+9}+\sqrt{2x^2-10x+13}=5$

Đặt: $2x^2+2x+1=u\Leftrightarrow 2x^2+2x+1-u=0$

$$\Delta'=-1+2u\ge 0\Leftrightarrow u\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{2x^2+2x+1}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tương tự, ta có:

$$\sqrt{2x^2-2x+5}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2x^2-6x+9}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2x^2-10x+13}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow VT\ge 4\sqrt{2}>5$$

Phương trình đã cho vô nghiệm.

Θ ***Giải phương trình:*** $\frac{x+2}{x-2}=\sqrt{x}-1$

Đặt: $y=\sqrt{x}, y\ge 0\Rightarrow x=y^2$

Phương trình trở thành: $\frac{y^2+2}{y^2-2}=y-1 \Leftrightarrow y^3-2y^2-2y=0$

Giải phương trình trên ta được tập nghiệm phương trình đã cho là: $S=\left\{0;4+2\sqrt{3}\right\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt{\frac{x}{x-1}}+2\sqrt{\frac{x-1}{x}}-3=0$

Đặt: $y=\sqrt{\frac{x}{x-1}}, y>0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{y}$

Phương trình đã cho có nghiệm là: $x=\frac{4}{3}$

Θ ***Giải phương trình:*** $2\sqrt[3]{2x-1}=x^3+1$

Đặt: $u=\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow u^3=2x-1 \Leftrightarrow 2x=u^3+1$

Ta có hệ đối xứng loại II đã biết cách giải: $\begin{cases} 2u=x^3+1 \\ 2x=u^3+1 \end{cases}$

Phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

Đặt: $u=\sqrt[3]{2-x} \Leftrightarrow u^3=2-x \Rightarrow x=2-u^3$

$v=\sqrt{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow v^2=x-1 \Rightarrow x=v^2+1$

$\Rightarrow u^3+v^2=1$

Giải hệ: $\begin{cases} u=1-v \\ u^3+v^2=1 \end{cases}$ ta được tập nghiệm phương trình đã cho là: $S=\{1;2;10\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt[3]{x+12}+2\sqrt[3]{x-7}=7$

Đặt: $u=\sqrt[3]{x+12};\ v=\sqrt[3]{x-7}$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $x=15$

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

Với điều kiện: $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$ ta đặt: $\begin{cases} u=\sqrt[3]{2-x} \\ v=\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3=2-x \\ v^2=x-1,\ v\ge 0 \end{cases}$

Tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{1;2;10\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$

Phương trình đã cho viết lại: $\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{7+x}\right)^2-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt[3]{2-x} \\ v=\sqrt[3]{7+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3=2-x \\ v^3=7+x \end{cases} \Rightarrow u^3+v^3=9$

Tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{-6;1\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$

Đặt: $u=x,\ v=\sqrt{4-x^2},\ -2\le x\le 2,\ v\ge 0$, ta có hệ: $\begin{cases} u+v=2+3uv \\ u^2+v^2=4 \end{cases}$

Tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{\dfrac{-2-\sqrt{14}}{3};0;2\right\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x}+\sqrt{\dfrac{1}{2}-x}=1$

Với điều kiện: $x\le\dfrac{1}{2}$

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x} \\ v=\sqrt{\dfrac{1}{2}-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3=\dfrac{1}{2}+x \\ v^2=\dfrac{1}{2}-x,\ v\ge 0 \end{cases}$, ta có hệ: $\begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^2=1 \end{cases}$

Tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{-\dfrac{17}{2};-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}=7x^2+7x,\ \ x>0$

Viết lại phương trình: $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}=7\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{4}$, đặt: $y+\dfrac{1}{2}=\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}},\ y>\dfrac{3-\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}$

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} y+\dfrac{1}{2}=7x^2+7x \\ \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{4x+9}{28} \end{cases}$

Nghiệm duy nhất của phương trình đã cho là: $x=\dfrac{\sqrt{50}-3}{7}$

Θ ***Giải phương trình:*** $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

Đặt: $y=\sqrt[3]{2x-1}\Leftrightarrow y^3+1=2x$, phương trình chuyển thành hệ: $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$

Tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right\}$

Θ ***Giải phương trình:*** $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$

Đặt: $y=\sqrt[3]{35-x^3}\Rightarrow x^3+y^3=35$, khi đó ta có hệ: $\begin{cases} xy\left(x+y\right)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$

Tập nghiệm phương trình đã cho là: $S=\left\{2;3\right\}$