## Chương 13

## TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

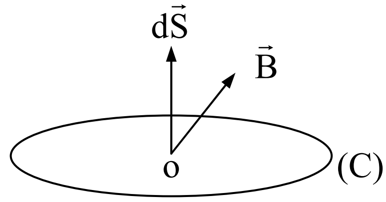
### 13.1 Luận điểm thứ nhất của Mawell

#### 13.1.1 Phát biểu luận điểm

*Bất kỳ một từ trường nào biến đổi theo thời gian cũng sinh ra một điện trường xoáy.*

#### 13.1. 2 Phương trình Mawell - Faraday

Xét một vòng dây dẫn kín (C) nằm trong một từ trường đang biến đổi theo thời gian (hình 13-1).




*Hình 13-1*

Theo định luật cơ bản của hiện tượng cảm ứng điện từ, sức điện động xuất hiện trong vòng dây là:

$$\xi_c = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{(S)} \vec{B}d\vec{S}\right)$$

Mặt khác, theo định nghĩa của sức điện động ta có:

$$\xi_c = \oint_{(C)} \vec{E}d\vec{l}$$

suy ra:

$$\oint_{(C)} \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{(S)} \vec{B}d\vec{S}\right) \qquad (13\text{-}1)$$

đó là phương trình Mawell - Faraday dưới dạng tích phân.

Vậy: *Lưu số của véc tơ cường độ điện trường xoáy dọc theo một đường cong kín bất kỳ thì bằng về giá trị tuyệt đối nhưng trái dấu với tốc độ biến thiên theo thời gian của từ thông gửi qua diện tích giới hạn bởi đường cong đó.*

*Ý nghĩa của phương trình (13-1) là*: nó cho phép ta tính được điện trường xoáy nếu biết quy luật biến đổi của từ trường theo thời gian.

Trong giải tích véc tơ người ta đã chứng minh được:

$$\oint_{(C)} \vec{E} d\vec{l} = \int_{(S)} rot\vec{E} d\vec{S}$$

Mặt khác ta có:

$$-\frac{d}{dt}\int_{(S)}\left(\vec{B}d\vec{S}\right) = \int_{(S)}\left(-\frac{d\vec{B}}{dt}\right)d\vec{S}$$

suy ra: $$rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \qquad (13\text{-}2)$$

*Trường hợp tổng quát*: véc tơ cảm ứng từ có thể biến đổi theo cả thời gian và không gian nhưng chỉ có từ trường biến đổi theo thời gian mới sinh ra điện trường xoáy, do đó (13-2) được viết lại:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (13\text{-}3)$$

## 13.2 Luận điểm thứ hai của Mawell

### 13.2.1 Phát biểu luận điểm

*Bất kỳ một điện trường nào biến đổi theo thời gian cũng sinh ra một từ trường.*

### 13.2.2 Phương trình Mawell - Ampe

*a. Giả thuyết của Mawell về dòng điện dịch:*

Dòng điện dịch là dòng điện tương đương với điện trường biến đổi theo thời gian về phương diện sinh ra từ trường.

Theo Mawell điện trường biến đổi giữa hai bản của tụ điện sinh ra từ trường giống như một dòng điện (*dòng điện dịch*) chạy qua toàn bộ không gian giữa hai bản của tụ điện, có chiều là chiều của dòng điện dẫn trong mạch và có cường độ bằng cường độ dòng điện dẫn trong mạch đó.

Nếu gọi $I_d$ là cường độ dòng điện dịch chạy giữa hai bản tụ điện, S là diện tích của mỗi bản thì mật độ dòng điện dịch giữa hai bản đó là:

$$J_d = \frac{I_d}{S} = \frac{I}{S}$$

với I là cường độ dòng điện dẫn trong mạch. Ta có:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

suy ra: $$J_d = \frac{1}{S}\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{S}\right) = \frac{d\sigma}{dt}$$

σ: là mật độ điện mặt trên bản dương của tụ điện.

Ta có: D = σ, suy ra:

$$J_d = \frac{dD}{dt} \qquad (13\text{-}4)$$

Dưới dạng véc tơ: $$\vec{J}_d = \frac{d\vec{D}}{dt} \qquad (13\text{-}5)$$

Biểu thức (13-5) chứng tỏ: véc tơ mật độ dòng điện dịch bằng tốc độ biến thiên theo thời gian của véc tơ cảm ứng điện.

*Trong trường hợp tổng quát*, véc tơ cảm ứng điện $\vec{D} = \vec{D}(x, y, z, t)$ nhưng chỉ có điện trường biến đổi theo thời gian mới sinh ra từ trường, do đó:

$$\vec{J}_d = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad (13\text{-}6)$$

Mở rộng giả thuyết trên về dòng điện dịch cho trường hợp một dòng điện bất kỳ, Mawell đã đi tới giả thuyết tổng quát sau:

*Xét về phương diện sinh ra từ trường thì bất kỳ một điện trường nào biến đổi theo thời gian cũng giống như một dòng điện gọi là dòng điện dịch có véc tơ mật độ dòng bằng:*

$$\vec{J}_d = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

trong đó $\vec{D}$ là véc tơ cảm ứng điện tại điểm ta xét.

*b. Thiết lập phương trình Mawell -Ampe*

Theo Mawell từ trường do cả dòng điện dẫn và điện trường biến đổi theo thời gian tức dòng điện dịch sinh ra. Vì vậy Mawell đã đưa ra khái niệm dòng điện toàn phần bằng tổng dòng điện dẫn và dòng điện dịch. Do đó ta nói rằng từ trường do dòng điện toàn phần sinh ra. Mật độ của dòng điện toàn phần được tính theo công thức:

$$\vec{J}_{tp} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad (13\text{-}7)$$

Theo định lý về dòng điện toàn phần:

$$\oint_C \vec{H}d\vec{l} = I_{tp}$$

với: $$I_{tp} = \int_S \vec{J}d\vec{S} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S}$$

suy ra: $$\oint_C \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S} \qquad (13\text{-}8)$$

đó là phương trình Mawell -Ampe dưới dạng tích phân.

Vậy: *Lưu số của véc tơ cường độ từ trường dọc theo một đường cong kín bất kỳ thì bằng cường độ dòng điện toàn phần chạy qua diện tích giới hạn bởi đường cong đó.*

Ta cũng chứng minh được rằng:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (13\text{-}9)$$

đó là dạng vi phân của phương trình Mawell-Ampe, áp dụng được đối với từng điểm trong không gian.

*Ý nghĩa của phương trình (13-9) là*: nó cho phép ta tính được từ trường $\vec{H}$ nếu biết sự phân bố dòng điện dẫn quy luật biến đổi của điện trường theo thời gian.

## 13.3 Trường điện từ và hệ thống phương trình Mawell

### 13.3.1 Năng lượng trường điện từ

Điện trường và từ trường đồng thời tồn tại trong không gian tạo thành một trường thống nhất gọi là trường điện từ. Trường điện từ là một dạng vật chất đặc trưng cho tương tác giữa các hạt mang điện.

Mật độ năng lượng từ trường:

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \mu_0 \mu H^2) \qquad (13\text{-}10)$$

Năng lượng từ trường:

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \mu_0 \mu H^2) dV \quad (13\text{-}11)$$

### 13.3.2 Phương trình Mawell -Faraday

- Dạng tích phân:

$$\oint_{(C)} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{(S)} \vec{B} d\vec{S}\right) \qquad (13\text{-}12)$$

- Dạng vi phân: $\mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (13-13)

### 13.3.3 Phương trình Mawell -Ampe

- Dạng tích phân:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S} \qquad (13\text{-}14)$$

- Dạng vi phân:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (13\text{-}15)$$

### 13.3.4 Định lý Ostrogradski-Gauss (O-G) đối với điện trường:

- Dạng tích phân:

$$\int_S \vec{D}d\vec{S} = q \qquad (13\text{-}16)$$

- Dạng vi phân:

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad (13\text{-}17)$$

### 13.3.5 Định lý O-G đối với từ trường:

- Dạng tích phân:

$$\int_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \qquad (13\text{-}18)$$

- Dạng vi phân:

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad (13\text{-}19)$$

### 13.3.6 Các phương trình liên hệ các đại lượng đặc trưng cho trường

Trong các phương trình Mawell các đại lượng đặc trưng cho trường đều được xác định tại từng điểm trong không gian và nói chung đều là các đại lượng biến thiên theo thời gian:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t) \qquad \vec{D} = \vec{D}(x, y, z, t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t) \qquad \vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$$

*a. Điện trường tĩnh*

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) \qquad \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \vec{D}(x, y, z) \qquad \vec{H} = 0$$

hệ phương trình Mawell thành:

$$\oint_C \vec{E}d\vec{l} = 0 \text{ hay } \mathrm{rot}\vec{E} = 0$$

$$\int_S \vec{D}d\vec{S} = q \text{ hay } \mathrm{div}\vec{D} = \rho$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$$

*b. Từ trường không đổi*

$$\vec{E} = 0 \qquad \vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$$

$$\vec{D} = 0 \qquad \vec{H} = \vec{H}(x, y, z)$$

hệ phương trình Mawell thành:

$$\oint_C \vec{H}d\vec{l} = I \text{ hay } \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}$$

$$\int_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \text{ hay } \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$$

**c.** *Sóng điện từ*

$$\vec{E} = \vec{E}(x,y,z,t); \qquad \vec{D} = \vec{D}(x,y,z,t); \qquad \rho = 0$$

$$\vec{B} = \vec{B}(x,y,z,t); \qquad \vec{H} = \vec{H}(x,y,z,t); \qquad \vec{J} = 0$$

hệ phương trình Mawell thành:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0 \quad ; \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} \quad ; \quad \vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$$

*Ví dụ:* Chứng tỏ rằng trong chân không, véc tơ cảm ứng từ $\vec{B}$ thỏa mãn phương trình sau:

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

*Giải*

Trong giải tích véc tơ ta chứng minh được đẳng thức:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} \qquad (*)$$

Đối với chân không: $\vec{J} = 0$, $\rho = 0$ hệ phương trình Mawell thành:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad ; \quad \operatorname{div}\vec{D} = 0$$

Do đó: $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{E} = 0$

ta có: $\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

vế trái của (*) có dạng:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\vec{B}\right)$$

$$= -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right) = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

hay là: $\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$

## BÀI TẬP

7.2 Chứng minh rằng điện thế tĩnh điện φ thỏa mãn phương trình sau đây:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

7.3 Trong một thể tích hữu hạn có véc tơ cảm ứng từ $\vec{B}$ với các thành phần: $B_x=0$ ; $B_y=0$; $B_z=B_0+ax$, trong đó a là một hằng số và lượng ax luôn luôn nhỏ hơn so với $B_0$. Chứng minh rằng nếu trong thể tích đó không có điện trường và dòng điện thì từ trường ấy không thỏa mãn phương trình Mawell.

7.7 Một tụ điện có điện môi với hằng số điện môi ε=6 được mắc vào một hiệu điện thế xoay chiều $u = U_0\cos\omega t$ với $U_0$= 300V, chu kỳ T=0,01s. Tìm giá trị của mật độ dòng điện dịch biết rằng hai bản của tụ điện cách nhau 0,4cm.

*Đáp số*: $j_d=2{,}5.10^{-3}\sin 20\pi t(A/m^2)$

7.11 Cho một trường điện từ biến thiên trong chân không với các véc tơ cường độ trường $\vec{E}(0,0,E)$ và , trong đó $\vec{H}(H,0,0)$, trong đó $H = H_0\cos\omega(t-ay)$ với $a=\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}$ . Chứng minh rằng giữa các véc tơ cường độ trường có mối quan hệ sau đây:

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\mu_0\mu}\left|\vec{H}\right|$$