Trung tâm BDVH & LTĐH **THÀNH ĐẠT** **Đề số 2**	**ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG NĂM 2010** **Môn thi: TOÁN – Khối A–B–D–V** Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

I. PHẦN CHUNG (7 điểm)

Câu I (2 điểm): Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{8}{3}$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Lập phương trình đường thẳng *d* song song với trục hoành và cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân tại O (O là gốc toạ độ).

Câu II (2 điểm):

1) Giải phương trình: $(1 - 4\sin^2 x)\sin 3x = \frac{1}{2}$

2) Giải phương trình: $x^2 - 3x + 1 = -\tan\frac{\pi}{6}\sqrt{x^2 + x^2 + 1}$

Câu III (1 điểm): Tính tích phân: $\mathrm{I} = \int_{-2}^{2}(x^5 + x^2)\sqrt{4 - x^2}\,dx$

Câu IV (1 điểm): Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng *a*, cạnh bên hợp với đáy góc 60^0. Gọi M là điểm đối xứng với C qua D, N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Câu V (1 điểm): Cho *x, y, z* là các số dương thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh:

$$\mathrm{P} = \frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

II. PHẦN TỰ CHỌN (3 điểm)

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a (2 điểm):

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng *d*: $x + y + m = 0$. Tìm *m* để trên đường thẳng *d* có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) sao cho tam giác ABC vuông (B, C là hai tiếp điểm).

2) Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q): $x + y + z = 0$ và cách điểm M(1; 2; –1) một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

Câu VII.a (1 điểm): Tìm hệ số của x^8 trong khai triển nhị thức Niu–tơn của $\left(x^2 + 2\right)^n$, biết:

$$A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49 \text{ (n} \in \text{N, n > 3).}$$

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b (2 điểm):

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy,* cho đường thẳng *d*: $x - y - 1 = 0$ và hai đường tròn có phương trình:

$$(C_1): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 8, \quad (C_2): (x+5)^2 + (y-4)^2 = 32$$

Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc *d* và tiếp xúc ngoài với (C_1) và (C_2).

2) Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho điểm A(3; –1; 1), đường thẳng Δ: $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng (P): $x - y + z - 5 = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng *d* đi qua A, nằm trong (P) và hợp với đường thẳng Δ một góc 45^0.

Câu VII.b (1 điểm): Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy) \\ \lg^2(x-y) + \lg x.\lg y = 0 \end{cases}$

=============================

Trần Sĩ Tùng

Hướng dẫn:

I. PHẦN CHUNG

Câu I: 2) Giả sử phương trình đường thẳng d: y = m.

PT hoành độ giao điểm của (C) và d: $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{8}{3} = m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 8 - 3m = 0$ (1)

Để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB cân tại O thì (1) phải có x_1, $-x_1$, x_2 (x_1, $-x_1$ là hoành độ của A, B) ⇒ x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình: $(x^2 - x_1^2)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x_2x^2 - x_1^2x + x_1^2x_2 = 0$ (2)

Đồng nhất (1) và (2) ta được: $\begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1^2 = 9 \\ x_1^2x_2 = 8 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 3 \\ x_2 = 3 \\ m = -\frac{19}{3} \end{cases}$. Kết luận: d: $y = -\frac{19}{3}$.

Câu II: 1) Nhận xét: cosx = 0 không phải là nghiệm của PT. Nhân 2 vế của PT với cosx, ta được:

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2\sin 3x(4\cos^3 x - 3\cos x) = \cos x \Leftrightarrow 2\sin 3x.\cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \sin 6x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \ \vee \ x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}$$

2) PT $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$ (1)

Chú ý: $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$, $\quad x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$.

Chia 2 vế cho $x^2 + x + 1 = \left(\sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2$ và đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}, t > 0$

Ta được: (1) $\Leftrightarrow 2t^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{-3}{2\sqrt{3}} < 0 \\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 1$.

Câu III: I = $\int_{-2}^{2} (x^5 + x^2)\sqrt{4 - x^2}dx = \int_{-2}^{2} x^5\sqrt{4 - x^2}dx + \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4 - x^2}dx$ = A + B.

- Tính A = $\int_{-2}^{2} x^5\sqrt{4 - x^2}dx$. Đặt $t = -x$. Tính được: A = 0.
- Tính B = $\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4 - x^2}dx$. Đặt $x = 2\sin t$. Tính được: B = 2π.

Câu IV: Gọi P = MN ∩ SD, Q = BM ∩ AD ⇒ P là trọng tâm ΔSCM, Q là trung điểm của MB.

- $\frac{V_{MDPQ}}{V_{MCNB}} = \frac{MD}{MC}.\frac{MP}{MN}.\frac{MQ}{MB} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{DPQCNB} = \frac{5}{6}V_{MCNB}$
- Vì D là trung điểm của MC nên $d(M,(CNB)) = 2d(D,(CNB)) \Rightarrow V_{MCNB} = 2V_{DCNB} = V_{DCSB} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$

$\Rightarrow V_{DPQCNB} = \frac{5}{12}V_{S.ABCD} \Rightarrow V_{SABNPQ} = \frac{7}{12}V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_{SABNPQ}}{V_{DPQCNB}} = \frac{7}{5}$.

Câu V: Từ giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 0 < x, y, z < 1$.

- Áp dụng BĐT Cô–si cho 3 số dương: $2x^2, 1 - x^2 . 1 - x^2$ ta được:

$$\frac{2x^2+(1-x^2)+(1-x^2)}{3} \ge \sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2} \le \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x(1-x^2) \le \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{x}{y^2+z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \qquad (1)$$

- Tương tự ta có: $\frac{y}{z^2+x^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2$ (2), $\frac{z}{x^2+y^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}z^2$ (3)
- Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{x}{y^2+z^2}+\frac{y}{z^2+x^2}+\frac{z}{x^2+y^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

II. PHẦN TỰ CHỌN

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a: 1) (C) có tâm I(1; –2), bán kính R = 3. Vì các tiếp tuyến AB, AC vuông góc nên ABIC là hình vuông có cạnh bằng 3 $\Rightarrow$ IA = $3\sqrt{2}$. Giả sử A(x; –x – m) $\in$ d.

$$IA^2=18 \Leftrightarrow (x-1)^2+(-m-x+2)^2=18 \Leftrightarrow 2x^2-2(3-m)x+m^2-4m-13=0 \qquad (1)$$

Để chỉ có duy nhất một điểm A thì (1) có 1 nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = -m^2+2m+35=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=7 \\ m=-5 \end{array}\right.$.

2) PT mặt phẳng (P) qua O nên có dạng: $Ax+By+Cz=0$ (với $A^2+B^2+C^2 \ne 0$).

- Vì (P) $\perp$ (Q) nên: $1.A+1.B+1.C=0 \Leftrightarrow C=-A-B$ (1)
- $d(M,(P))=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|A+2B-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow (A+2B-C)^2=2(A^2+B^2+C^2)$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $8AB+5B^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} B=0 & (3) \\ 8A+5B=0 & (4) \end{array}\right.$

- Từ (3): B = 0 $\Rightarrow$ C = –A. Chọn A = 1, C = –1 $\Rightarrow$ (P): $x-z=0$
- Từ (4): 8A + 5B = 0. Chọn A = 5, B = –8 $\Rightarrow$ C = 3 $\Rightarrow$ (P): $5x-8y+3z=0$.

Câu VII.a: Ta có: $A_n^3-8C_n^2+C_n^1=49 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2)-\frac{8n(n-1)}{2}+n=49 \Leftrightarrow n^3-7n^2+7n-49=0 \Leftrightarrow n=7$.

$(x^2+2)^n=(x^2+2)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{2(7-k)}2^k$. Số hạng chứa $x^8 \Leftrightarrow 2(7-k)=8 \Leftrightarrow$ k = 3.

$\Rightarrow$ Hệ số của x^8 là: $C_7^3.2^3=280$.

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b: 1) Gọi I, I_1, I_2, R, R_1, R_2 lần lượt là tâm và bán kính của (C), (C_1), (C_2).

Giả sử I(a; a – 1) $\in$ d. (C) tiếp xúc ngoài với (C_1), (C_2) nên $II_1 = R + R_1$, $II_2 = R + R_2 \Rightarrow II_1 - R_1 = II_2 - R_2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2+(a+3)^2}-2\sqrt{2}=\sqrt{(a-5)^2+(a+5)^2}-4\sqrt{2} \Leftrightarrow$ a = 0 $\Rightarrow$ I(0; –1), R = $\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Phương trình (C): $x^2+(y+1)^2=2$.

2) Gọi $\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta, \vec{n}_P$ lần lượt là các VTCP của d, Δ và VTPT của (P). Giả sử $\vec{u}_d=(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2 \ne 0)$.

- Vì d $\subset$ (P) nên $\vec{u}_d \perp \vec{n}_P \Rightarrow a-b+c=0 \Leftrightarrow b=a+c$ (1)
- $\left(\widehat{d,\Delta}\right)=45^0 \Leftrightarrow \frac{|a+2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(a+2b+c)^2=9(a^2+b^2+c^2)$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $14c^2+30ac=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ 15a+7c=0 \end{array}\right.$

- Với c = 0: chọn a = b = 1 $\Rightarrow$ PTTS của d: $\{x=3+t;\ y=-1-t;\ z=1$
- Với 15a + 7c = 0: chọn a = 7, c = –15, b = –8 $\Rightarrow$ PTTS của d: $\{x=3+7t;\ y=-1-8t;\ z=1-15t$.

Trần Sĩ Tùng

Câu VII.b: Điều kiện: $x > y > 0$.

Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + (\lg x + \lg y)^2 \\ \lg^2(x-y) + \lg x.\lg y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg y(\lg x + \lg y) = 0 \\ \lg^2(x-y) + \lg x.\lg y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg y = 0 \\ \lg^2(x-y) = 0 \end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases} \lg x + \lg y = 0 \\ \lg^2(x-y) + \lg x.\lg y = 0 \end{cases}$ (2)

• (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

• (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ \lg^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right) + \lg x.\lg\dfrac{1}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ \lg^2\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right) = \lg^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Kết luận: Hệ có nghiệm: (2; 1) và $\left(\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

=====================