

<p>Trung tâm BDVH &amp; LTĐH <b>THÀNH ĐẠT</b> <b>Đề số 2</b></p>	<p><b>ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG NĂM 2010</b> <b>Môn thi: TOÁN – Khối A–B–D–V</b> Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)</p>
--	--

## I. PHẦN CHUNG (7 điểm)

**Câu I** (2 điểm): Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{8}{3}$  (1)

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
- 2) Lập phương trình đường thẳng  $d$  song song với trục hoành và cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân tại O (O là gốc toạ độ).

**Câu II** (2 điểm):

- 1) Giải phương trình:  $(1 - 4\sin^2 x)\sin 3x = \frac{1}{2}$
- 2) Giải phương trình:  $x^2 - 3x + 1 = -\tan \frac{\pi}{6} \sqrt{x^2 + x^2 + 1}$

**Câu III** (1 điểm): Tính tích phân:  $I = \int_{-2}^2 (x^5 + x^2) \sqrt{4 - x^2} dx$

**Câu IV** (1 điểm): Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng  $a$ , cạnh bên hợp với đáy góc  $60^\circ$ . Gọi M là điểm đối xứng với C qua D, N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

**Câu V** (1 điểm): Cho  $x, y, z$  là các số dương thoả mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Chứng minh:

$$P = \frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

## II. PHẦN TỰ CHỌN (3 điểm)

### 1. Theo chương trình chuẩn

**Câu VI.a** (2 điểm):

- 1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ  $Oxy$ , cho đường tròn (C):  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$  và đường thẳng  $d$ :  $x + y + m = 0$ . Tìm  $m$  để trên đường thẳng  $d$  có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) sao cho tam giác ABC vuông (B, C là hai tiếp điểm).
- 2) Trong không gian với hệ toạ độ  $Oxyz$ , viết phương trình mặt phẳng (P) qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q):  $x + y + z = 0$  và cách điểm M(1; 2; -1) một khoảng bằng  $\sqrt{2}$ .

**Câu VII.a** (1 điểm): Tìm hệ số của  $x^8$  trong khai triển nhị thức Niu-tơn của  $(x^2 + 2)^n$ , biết:

$$A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49 \quad (n \in \mathbb{N}, n > 3).$$

### 2. Theo chương trình nâng cao

**Câu VI.b** (2 điểm):

- 1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d$ :  $x - y - 1 = 0$  và hai đường tròn có phương trình:

$$(C_1): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 8, \quad (C_2): (x+5)^2 + (y-4)^2 = 32$$

Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc  $d$  và tiếp xúc ngoài với  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

- 2) Trong không gian với hệ toạ độ  $Oxyz$ , cho điểm A(3; -1; 1), đường thẳng  $\Delta$ :  $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$  và mặt phẳng (P):  $x - y + z - 5 = 0$ . Viết phương trình tham số của đường thẳng  $d$  đi qua A, nằm trong (P) và hợp với đường thẳng  $\Delta$  một góc  $45^\circ$ .

**Câu VII.b** (1 điểm): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy) \\ \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0 \end{cases}$$

## Hướng dẫn:

### I. PHẦN CHUNG

**Câu I:** 2) Giả sử phương trình đường thẳng d:  $y = m$ .

$$\text{PT hoành độ giao điểm của (C) và d: } \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{8}{3} = m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 8 - 3m = 0 \quad (1)$$

Để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho  $\Delta OAB$  cân tại O thì (1) phải có  $x_1, -x_1, x_2$  ( $x_1, -x_1$  là hoành độ của A, B)  $\Rightarrow x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình:  $(x^2 - x_1^2)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x_2x^2 - x_1^2x + x_1^2x_2 = 0 \quad (2)$

$$\text{Đồng nhất (1) và (2) ta được: } \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1^2 = 9 \\ x_1^2x_2 = 8 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 3 \\ x_2 = 3 \\ m = -\frac{19}{3} \end{cases} . \text{ Kết luận: d: } y = -\frac{19}{3} .$$

**Câu II:** 1) Nhận xét:  $\cos x = 0$  không phải là nghiệm của PT. Nhân 2 vế của PT với  $\cos x$ , ta được:

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2 \sin 3x (4 \cos^3 x - 3 \cos x) = \cos x \Leftrightarrow 2 \sin 3x \cdot \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \sin 6x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \vee x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}$$

$$2) \text{PT} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \quad (1)$$

$$\text{Chú ý: } x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1), \quad x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)$$

$$\text{Do đó: (1)} \Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} .$$

$$\text{Chia 2 vế cho } x^2 + x + 1 = \left( \sqrt{x^2 + x + 1} \right)^2 \text{ và đặt } t = \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}, t > 0$$

$$\text{Ta được: (1)} \Leftrightarrow 2t^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-3}{2\sqrt{3}} < 0 \\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 1 .$$

$$\text{Câu III: } I = \int_{-2}^2 (x^5 + x^2) \sqrt{4 - x^2} dx = \int_{-2}^2 x^5 \sqrt{4 - x^2} dx + \int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx = A + B.$$

$$\bullet \text{ Tính } A = \int_{-2}^2 x^5 \sqrt{4 - x^2} dx . \text{ Đặt } t = -x . \text{ Tính được: } A = 0 .$$

$$\bullet \text{ Tính } B = \int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx . \text{ Đặt } x = 2 \sin t . \text{ Tính được: } B = 2\pi .$$

**Câu IV:** Gọi  $P = MN \cap SD$ ,  $Q = BM \cap AD \Rightarrow P$  là trọng tâm  $\Delta SCM$ ,  $Q$  là trung điểm của  $MB$ .

$$\bullet \frac{V_{MDPQ}}{V_{MCNB}} = \frac{MD}{MC} \cdot \frac{MP}{MN} \cdot \frac{MQ}{MB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{DPQCNB} = \frac{5}{6} V_{MCNB}$$

$$\bullet \text{ Vì D là trung điểm của MC nên } d(M, (CNB)) = 2d(D, (CNB)) \Rightarrow V_{MCNB} = 2V_{DCNB} = V_{DCSB} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_{DPQCNB} = \frac{5}{12} V_{S.ABCD} \Rightarrow V_{SABNPQ} = \frac{7}{12} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_{SABNPQ}}{V_{DPQCNB}} = \frac{7}{5} .$$

**Câu V:** Từ giả thiết  $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 0 < x, y, z < 1$ .

$$\bullet \text{ Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương: } 2x^2, 1 - x^2, 1 - x^2 \text{ ta được:}$$

$$\frac{2x^2 + (1-x^2) + (1-x^2)}{3} \geq \sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2} \leq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x(1-x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{x}{y^2+z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \quad (1)$$

• Tương tự ta có:  $\frac{y}{z^2+x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2 \quad (2), \quad \frac{z}{x^2+y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}z^2 \quad (3)$

• Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow \frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

## II. PHẦN TỰ CHỌN

### 1. Theo chương trình chuẩn

**Câu VI.a:** 1) (C) có tâm I(1; -2), bán kính R = 3. Vì các tiếp tuyến AB, AC vuông góc nên ABIC là hình vuông có cạnh bằng 3  $\Rightarrow IA = 3\sqrt{2}$ . Giả sử A(x; -x-m)  $\in d$ .

$$IA^2 = 18 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (-m-x+2)^2 = 18 \Leftrightarrow 2x^2 - 2(3-m)x + m^2 - 4m - 13 = 0 \quad (1)$$

Để chỉ có duy nhất một điểm A thì (1) có 1 nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow \Delta' = -m^2 + 2m + 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = -5 \end{cases}$ .

2) PT mặt phẳng (P) qua O nên có dạng:  $Ax + By + Cz = 0$  (với  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ ).

• Vì (P)  $\perp$  (Q) nên:  $1.A + 1.B + 1.C = 0 \Leftrightarrow C = -A - B \quad (1)$

•  $d(M, (P)) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|A+2B-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow (A+2B-C)^2 = 2(A^2+B^2+C^2) \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta được:  $8AB + 5B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ 8A + 5B = 0 \end{cases} \quad (3) \quad (4)$

• Từ (3): B = 0  $\Rightarrow C = -A$ . Chọn A = 1, C = -1  $\Rightarrow$  (P):  $x - z = 0$

• Từ (4): 8A + 5B = 0. Chọn A = 5, B = -8  $\Rightarrow C = 3 \Rightarrow$  (P):  $5x - 8y + 3z = 0$ .

**Câu VII.a:** Ta có:  $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) - \frac{8n(n-1)}{2} + n = 49 \Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0 \Leftrightarrow n = 7$ .

$$(x^2 + 2)^n = (x^2 + 2)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k x^{2(7-k)} 2^k. \text{ Số hạng chứa } x^8 \Leftrightarrow 2(7-k) = 8 \Leftrightarrow k = 3.$$

$\Rightarrow$  Hệ số của  $x^8$  là:  $C_7^3 \cdot 2^3 = 280$ .

### 2. Theo chương trình nâng cao

**Câu VI.b:** 1) Gọi I, I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, R, R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub> lần lượt là tâm và bán kính của (C), (C<sub>1</sub>), (C<sub>2</sub>).

Giả sử I(a; a-1)  $\in d$ . (C) tiếp xúc ngoài với (C<sub>1</sub>), (C<sub>2</sub>) nên II<sub>1</sub> = R + R<sub>1</sub>, II<sub>2</sub> = R + R<sub>2</sub>  $\Rightarrow$  II<sub>1</sub> - R<sub>1</sub> = II<sub>2</sub> - R<sub>2</sub>

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2 + (a+3)^2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{(a-5)^2 + (a+5)^2} - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow I(0; -1), R = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$  Phương trình (C):  $x^2 + (y+1)^2 = 2$ .

2) Gọi  $\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta, \vec{n}_P$  lần lượt là các VTCP của d,  $\Delta$  và VTPT của (P). Giả sử  $\vec{u}_d = (a; b; c)$  ( $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ).

• Vì d  $\subset$  (P) nên  $\vec{u}_d \perp \vec{n}_P \Rightarrow a - b + c = 0 \Leftrightarrow b = a + c \quad (1)$

•  $(\widehat{d, \Delta}) = 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a+2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(a+2b+c)^2 = 9(a^2+b^2+c^2) \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta được:  $14c^2 + 30ac = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 15a + 7c = 0 \end{cases}$

• Với c = 0: chọn a = b = 1  $\Rightarrow$  PTTS của d:  $\begin{cases} x = 3+t; y = -1-t; z = 1 \end{cases}$

• Với 15a + 7c = 0: chọn a = 7, c = -15, b = -8  $\Rightarrow$  PTTS của d:  $\begin{cases} x = 3+7t; y = -1-8t; z = 1-15t \end{cases}$ .

**Câu VII.b:** Điều kiện:  $x > y > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Hệ PT} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + (\lg x + \lg y)^2 \\ \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg y(\lg x + \lg y) = 0 \\ \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lg y = 0 \\ \lg^2(x-y) = 0 \end{cases}^{(1)} \text{ hoặc } \begin{cases} \lg x + \lg y = 0 \\ \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0 \end{cases}^{(2)} \end{aligned}$$

$$\bullet (1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$\bullet (2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \lg^2\left(x - \frac{1}{x}\right) + \lg x \cdot \lg \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \lg^2\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) = \lg^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Kết luận: Hệ có nghiệm:  $(2; 1)$  và  $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

---

