TRƯỜNG THPT CHUYÊN – ĐHSP HÀ NỘI Đề số 19	ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG NĂM 2010 Môn thi: TOÁN Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

I. PHẦN CHUNG (7 điểm)

Câu I (2 điểm): Cho hàm số $y = x^4 + 2m^2x^2 + 1$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.

2) Chứng minh rằng đường thẳng $y = x + 1$ luôn cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

Câu II (2 điểm):

1) Giải phương trình: $2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \tan x$

2) Giải hệ phương trình: $2\log_3\left(x^2 - 4\right) + 3\sqrt{\log_3 (x+2)^2} - \log_3 (x-2)^2 = 4$

Câu III (1 điểm): Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{3 + \sin^2 x}} dx$

Câu IV (1 điểm): Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền AB = $2a$. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc mặt phẳng (ABC) lấy điểm S sao cho mp(SBC) tạo với mp(ABC) một góc bằng 60^0. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

Câu V (1 điểm): Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 5}{x^2 - 2x + 2}$

II. PHẦN TỰ CHỌN (3 điểm)

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a (2 điểm):

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho elíp (E) có tiêu điểm thứ nhất là $\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $M\left(1;\frac{4\sqrt{33}}{5}\right)$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh của (E).

2) Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho điểm A(0; 1; 3) và đường thẳng *d*: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$. Hãy tìm trên đường thẳng *d* các điểm B và C sao cho tam giác ABC đều.

Câu VII.a (1 điểm): Chứng minh: $1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + ... + n^2C_n^n = (n + n^2).2^{n-2}$, trong đó n là số tự nhiên, $n \geq 1$ và C_n^k là số tổ hợp chập k của n.

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b (2 điểm):

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy,* cho tam giác ABC có A(2; 7) và đường thẳng AB cắt trục *Oy* tại E sao cho $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$. Biết rằng tam giác AEC cân tại A và có trọng tâm là $G\left(2;\frac{13}{3}\right)$. Viết phương trình cạnh BC.

2) Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho đường thẳng *d*: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x + y - 2z + 2 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng *d* có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và đi qua điểm A(1; –1; 1).

Câu VII.b (1 điểm): Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$.

============================

Hướng dẫn:

I. PHẦN CHUNG

Câu I: 2) Xét PT hoành độ giao điểm: $x^4 + 2m^2x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^4 + 2m^2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^3 + 2m^2x - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = x^3 + 2m^2x - 1 = 0 \qquad (*) \end{array}\right.$$

Ta có: $g'(x) = 3x^2 + 2m^2 \ge 0$ (với mọi x và mọi m) $\Rightarrow$ Hàm số g(x) luôn đồng biến với mọi giá trị của m.

Mặt khác g(0) = –1 $\neq$ 0. Do đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất khác 0.

Vậy đường thẳng $y = x + 1$ luôn cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

Câu II: 1) Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$ (*).

PT $\Leftrightarrow 1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin^2 x - \tan\ x \Leftrightarrow 1 - \sin 2x = \tan x(\sin 2x - 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \tan x = -1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + l.\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k.\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + l.\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}$. (Thỏa mãn điều kiện (*)).

2) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ \log_3(x+2)^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ (x+2)^2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x \le -3 \end{array}\right.$ (**)

PT $\Leftrightarrow \log_3\left(x^2 - 4\right)^2 + 3\sqrt{\log_3(x+2)^2} - \log_3(x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \log_3(x+2)^2 + 3\sqrt{\log_3(x+2)^2} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\log_3(x+2)^2} + 4\right)\left(\sqrt{\log_3(x+2)^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\log_3(x+2)^2} = 1 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 3 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$

Kiểm tra điều kiện (**) chỉ có $x = -2 - \sqrt{3}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là: $x = -2 - \sqrt{3}$

Câu III: Đặt $t = \sqrt{3 + \sin^2 x} = \sqrt{4 - \cos^2 x}$. Ta có: $\cos^2 x = 4 - t^2$ và $dt = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{3 + \sin^2 x}}dx$.

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{3 + \sin^2 x}}.dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x\sqrt{3 + \sin^2 x}}dx = \int_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}} \frac{dt}{4 - t^2} = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}} \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2}\right)dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{15}+4}{\sqrt{15}-4}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\sqrt{15}+4\right) - \ln\left(\sqrt{3}+2\right)\right).$$

Câu IV: Ta có SA $\perp$ (ABC) $\Rightarrow$ SA $\perp$ AB; SA $\perp$ AC..

Tam giác ABC vuông cân cạnh huyền AB $\Rightarrow$ BC $\perp$ AC $\Rightarrow$ BC $\perp$ SC. Hai điểm A,C cùng nhìn đoạn SB dưới góc vuông nên mặt cầu đường kính SB đi qua A,C. Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC cũng chính là mặt cầu đường kính SB. Ta có CA = CB = AB sin 45^0 = a $\sqrt{2}$; $\widehat{SCA} = 60^0$ là góc giữa mp(SBC) và mp(ABC).

SA = AC.tan60^0 = $a\sqrt{6}$. Từ đó $SB^2 = SA^2 + AB^2 = 10a^2$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là: S = πd^2 = π .SB^2 = $10\pi a^2$.

Câu V: Tập xác định: D = R .

Ta có: $f(x) = x^2 - 2x + 2 + \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \ge 2$ (BĐT Cô–si). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy: min $f(x)$ = 2 đạt được khi x = 1.

II. PHẦN TỰ CHỌN

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a: 1) Ta có $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{3};0\right)$ là hai tiêu điểm của (E).

Theo định nghĩa của (E) suy ra : $2a = MF_1 + MF_2 = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{33}}{5}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{33}}{5}\right)^2} = 10$

$\Rightarrow$ a = 5. Mặt khác: c = $\sqrt{3}$ và $a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 22$

Vậy tọa độ các đỉnh của (E) là: A_1(–5; 0) ; A_2(5; 0) ; B_1(0; $-\sqrt{22}$) ; B_2 (0; $\sqrt{22}$).

2) d có VTCP $\vec{u}_d = (-1;2;0)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d.

Giả sử $H(1-t;\ 2+2t;3) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (1-t;1+2t;0)$

Mà AH $\perp$ d nên $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_d \Rightarrow -1(1-t) + 2(1+2t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{5} \Rightarrow H\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5};3\right) \Rightarrow$ AH = $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Mà ΔABC đều nên BC = $\frac{2AH}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$ hay BH = $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Giả sử $B(1-s;2+2s;3)$ thì $\left(-\frac{1}{5}-s\right)^2 + \left(\frac{2}{5}+2s\right)^2 = \frac{15}{25} \Leftrightarrow 25s^2 + 10s - 2 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{5}$

Vậy: $B\left(\frac{6-\sqrt{3}}{5};\frac{8+2\sqrt{3}}{5};3\right)$ và $C\left(\frac{6+\sqrt{3}}{5};\frac{8-2\sqrt{3}}{5};3\right)$

hoặc $B\left(\frac{6+\sqrt{3}}{5};\frac{8-2\sqrt{3}}{5};3\right)$ và $C\left(\frac{6-\sqrt{3}}{5};\frac{8+2\sqrt{3}}{5};3\right)$

Câu VII.a: Xét khai triển: $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + x^3C_n^3 + ... + x^nC_n^n$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được: $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + ... + nx^{n-1}C_n^n$

Nhân 2 vế cho x, rồi lấy đạo hàm lần nữa, ta được:

$$n\left[(1+x)^{n-1} + x(n-1)(1+x)^{n-2}\right] = 1^2C_n^1 + 2^2xC_n^2 + 3^2x^2C_n^3 + ... + n^2x^{n-1}C_n^n$$

Cho x = 1 ta được đpcm.

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b: 1) Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow$ M(2; 3). Đường thẳng EC qua M và có VTPT $\overrightarrow{AG} = \left(0;-\frac{8}{3}\right)$ nên có PT: $y = 3 \Rightarrow$ E(0; 3) $\Rightarrow$ C(4; 3). Mà $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$ nên B(–1; 1).

$\Rightarrow$ Phương trình BC: $2x - 5y + 7 = 0$.

2) Gọi I là tâm của (S). I $\in d \Rightarrow I(1+3t;-1+t;t)$. Bán kính R = IA = $\sqrt{11t^2 - 2t + 1}$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) nên: $d(I,(P)) = \frac{|5t+3|}{3} = R \Leftrightarrow 37t^2 - 24t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 0 & \Rightarrow R = 1 \\ t = \frac{24}{37} & \Rightarrow R = \frac{77}{37} \end{array}\right.$.

Vì (S) có bán kính nhỏ nhất nên chọn t = 0, R = 1. Suy ra I(1; –1; 0).

Vậy phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$.

Câu VII.b: $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x & (1) \\ 1 + y^2 = 5(1+x^2) & (2) \end{cases}$

Từ (2) suy ra $y^2 - 5x^2 = 4$ (3). Thế vào (1) được: $x^3 + \left(y^2 - 5x^2\right).y = y^3 + 16x \Leftrightarrow x^3 - 5x^2y - 16x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 - 5xy - 16 = 0$

• Với $x = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$.

• Với $x^2 - 5xy - 16 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 16}{5x}$ (4). Thế vào (3) được: $\left(\frac{x^2-16}{5x}\right)^2 - 5x^2 = 4$

$\Leftrightarrow\ x^4 - 32x^2 + 256 - 125x^4 = 100x^2 \Leftrightarrow 124\ x^4 + 132x^2 - 256 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & (y = -3) \\ x = -1 & (y = 3) \end{array}\right.$.

Vậy hệ có 4 nghiệm: (x; y) = (0; 2) ; (0; –2); (1; –3); (–1; 3)

=====================