TRƯỜNG THPT CHUYÊN – ĐHSP HÀ NỘI Đề số 18	ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG NĂM 2010 Môn thi: TOÁN Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

I. PHẦN CHUNG (7 điểm)

Câu I (2 điểm): Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại các điểm A và B thỏa mãn OA = 4OB.

Câu II (2 điểm):

1) Giải phương trình: $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + 2\tan 2x + \cos 2x = 0$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3y(1+y) + x^2y^2(2+y) + xy^3 - 30 = 0 \\ x^2y + x(1+y+y^2) + y - 11 = 0 \end{cases}$

Câu III (1 điểm): Tính tích phân: $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Câu IV (1 điểm): Cho lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có đáy ABC là tam giác vuông với AB = BC = a, cạnh bên AA′ = a$\sqrt{2}$. M là điểm trên AA′ sao cho $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$. Tính thể tích của khối tứ diện MA′BC′.

Câu V (1 điểm): Cho các số thực dương *a, b, c* thay đổi luôn thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b}{b+c} + \frac{b^2+c}{c+a} + \frac{c^2+a}{a+b} \ge 2.$$

II. PHẦN TỰ CHỌN (3 điểm)

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a (2 điểm):

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho điểm E(–1; 0) và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 16 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm E cắt (C) theo dây cung MN có độ dài ngắn nhất.

2) Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho 2 điểm A(0; 0; 4), B(2; 0; 0) và mặt phẳng (P): $2x + y - z + 5 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua O, A, B và có khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{5}{\sqrt{6}}$.

Câu VII.a (1 điểm): Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có mặt đúng ba lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần?

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b (2 điểm):

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy,* cho tam giác ABC cân tại A, biết phương trình đường thẳng AB, BC lần lượt là: $x + 2y - 5 = 0$ và $3x - y + 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC, biết rằng AC đi qua điểm $F(1;-3)$.

2) Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm A(1; 5; 0), B(3; 3; 6) và đường thẳng Δ: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$.

Tìm toạ độ điểm M trên Δ sao cho ΔMAB có diện tích nhỏ nhất.

Câu VII.b (1 điểm): Tìm tất cả các giá trị của tham số *a* để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\log_5(25^x - \log_5 a) = x$

============================

Hướng dẫn:

I. PHẦN CHUNG

Câu I: 2) Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_0;y_0)$ cắt Ox tại A và Oy tại B sao cho OA = 4OB.

Do ΔOAB vuông tại O nên: $\tan A = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.

Hệ số góc của d tại M là: $y'(x_0) = -\frac{1}{(x_0-1)^2} < 0 \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \ \left(y_0 = \frac{3}{2}\right) \\ x_0 = 3 \ \left(y_0 = \frac{5}{2}\right) \end{array}\right.$

Vậy có hai tiếp tuyến thoả mãn là: $y = -\frac{1}{4}(x+1) + \frac{3}{2}$ hoặc $y = -\frac{1}{4}(x-3) + \frac{5}{2}$

Câu II: 1) Điều kiện: $\cos 2x \neq 0$. PT $\Leftrightarrow -(\sin x + \cos x)^2 + 2\sin 2x + \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 2x - \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = 1 \quad (loại) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$.

2) Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)^2 + x^2y^2(x+y) = 30 \\ xy(x+y) + xy + x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)(x+y+xy) = 30 \\ xy(x+y) + xy + x + y = 11 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x+y = u \\ xy = v \end{cases}$. Hệ trở thành $\begin{cases} uv(u+v) = 30 \\ uv + u + v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(11-uv) = 30 & (1) \\ uv + u + v = 11 & (2) \end{cases}$. Từ (1) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} uv = 5 \\ uv = 6 \end{array}\right.$

- Với $uv = 5 \Rightarrow u + v = 6$. Giải ra ta được các nghiệm $(x;y)$ là: $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$ và $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$
- Với $uv = 6 \Rightarrow u + v = 5$. Giải ra ta được các nghiệm $(x;y)$ là: $(1;2)$ và $(2;1)$

Kết luận: Hệ PT có 4 nghiệm: $(1;2)$, $(2;1)$, $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$.

Câu III: Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2t.dt$. I = $2\int_0^1 \frac{t^3+t}{t+1}dt = 2\int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{1+t}\right)dt = \frac{11}{3} - 4\ln 2$.

Câu IV: Từ giả thiết suy ra ΔABC vuông cân tại B. Gọi H là trung điểm của AC thì BH ⊥ AC và BH ⊥ (ACC′A′).

Do đó BH là đường cao của hình chóp B.MA′C′ ⇒ BH = $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Từ giả thiết ⇒ MA′ = $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$, A′C′ = $a\sqrt{2}$.

Do đó: $V_{B.MA'C'} = \frac{1}{3}BH.S_{MA'C'} = \frac{1}{6}BH.MA'.A'C' = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu V: Ta có: $\frac{a^2+b}{b+c} = \frac{a(1-b-c)+b}{b+c} = \frac{a+b}{b+c} - a$.

Tương tự, BĐT trơt thành: $\frac{a+b}{b+c} - a + \frac{b+c}{c+a} - b + \frac{c+a}{a+b} - c \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3$

Theo BĐT Cô–si ta có: $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}.\frac{b+c}{c+a}.\frac{c+a}{a+b}} = 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

II. PHẦN TỰ CHỌN

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a: 1) (C) có tâm I(4; 2) và bán kính R = 6. Ta có IE = $\sqrt{29}$ < 6 = R ⇒ E nằm trong hình tròn (C).
Giả sử đường thẳng Δ đi qua E cắt (C) tại M và N. Kẻ IH ⊥ Δ. Ta có IH = d(I, Δ) ≤ IE.
Như vậy để MN ngắn nhất thì IH dài nhất ⇔ H ≡ E ⇔ Δ đi qua E và vuông góc với IE
Khi đó phương trình đường thẳng Δ là: $5(x+1) + 2y = 0 \Leftrightarrow 5x + 2y + 5 = 0$.

2) Giả sử (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

- Từ O, A, B ∈ (S) suy ra: $\begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1;b;2)$.
- $d(I,(P)) = \frac{5}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{|b+5|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -10 \end{array}\right.$

Vậy (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z = 0$ hoặc (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 20y - 4z = 0$

Câu VII.a: Gọi số cần tìm là: $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ $(a_1 \neq 0)$.

• Giả sử a_1 có thể bằng 0:

+ Số cách xếp vị trí cho hai chữ số 2 là: C_7^2

+ Số cách xếp vị trí cho ba chữ số 3 là: C_5^3

+ Số cách xếp cho 2 vị trí còn lại là: $2!\,C_8^2$

• Bây giờ ta xét $a_1 = 0$:

+ Số cách xếp vị trí cho hai chữ số 2 là: C_6^2

+ Số cách xếp vị trí cho ba chữ số 3 là: C_4^3

+ Số cách xếp cho 1 vị trí còn lại là: 7

Vậy số các số cần tìm là: $C_7^2.C_5^3.2!C_8^2 - C_6^2.C_4^3.7 = 11340$ (số).

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b: 1) Gọi VTPT của AB là $\vec{n}_1 = (1;2)$, của BC là $\vec{n}_2 = (3;-1)$, của AC là $\vec{n}_3 = (a;b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Do ΔABC cân tại A nên các góc B và C đều nhọn và bằng nhau.

Suy ra: $\cos B = \cos C \Rightarrow \dfrac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \dfrac{|\vec{n}_3.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_3|.|\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 22a^2 + 2b^2 - 15ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a = b \\ 11a = 2b \end{array}\right.$

• Với $2a = b$, ta có thể chọn $a = 1, b = 2 \Rightarrow \vec{n}_3 = (1;2) \Rightarrow$ AC // AB ⇒ không thoả mãn.

• Với $11a = 2b$, ta có thể chọn $a = 2,\ b = 11 \Rightarrow \vec{n}_3 = (2;11)$

Khi đó phương trình AC là: $2(x-1) + 11(y+3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 11y + 31 = 0$.

2) PTTS của Δ: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$. Gọi $M(-1+2t;1-t;2t) \in \Delta$.

Diện tích ΔMAB là $S = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right]\right| = \sqrt{18t^2 - 36t + 216} = \sqrt{18(t-1)^2 + 198} \geq \sqrt{198}$

Vậy Min S = $\sqrt{198}$ khi $t = 1$ hay M(1; 0; 2).

Câu VII.b: PT $\Leftrightarrow 25^x - \log_5 a = 5^x \Leftrightarrow 5^{2x} - 5^x - \log_5 a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5^x,\ t > 0 \\ t^2 - t - \log_5 a = 0 \qquad (*) \end{cases}$

PT đã cho có nghiệm duy nhất ⇔ (*) có đúng 1 nghiệm dương ⇔ $t^2 - t = \log_5 a$ có đúng 1 nghiệm dương.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t$ với $t \in [0; +\infty)$. Ta có: $f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$, $f(0) = 0$.

Dựa vào BBT ta suy ra phương trình $f(t) = \log_5 a$ có đúng 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 a \geq 0 \\ \log_5 a = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geq 1 \\ a = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}} \end{array}\right.$.

=====================