Trường THPT Chuyên LƯƠNG VĂN CHÁNH
PHÚ YÊN
Đề số 14

ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG NĂM 2010
Môn thi: TOÁN – Khối A
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

I. PHẦN CHUNG (7 điểm)

Câu I (2 điểm): Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Câu II (2 điểm):

1) Giải phương trình: $\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right).\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4\cos^2 2x}{\tan x-\cot x}$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3}{x^2+y^2-1}+2\dfrac{y}{x}=1\\ x^2+y^2+4\dfrac{x}{y}=22\end{cases}$

Câu III (1 điểm): Tính tích phân: I = $I=\displaystyle\int_3^8\frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}dx$

Câu IV (1 điểm): Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có độ dài cạnh đáy bằng *a*, mặt bên tạo với mặt đáy góc 60^0. Mặt phẳng (P) chứa AB và đi qua trọng tâm tam giác SAC cắt SC, SD lần lượt tại M, N. Tính thể tích hình chóp S.ABMN theo *a*.

Câu V (1 điểm): Cho các số thực *a, b, c* thỏa mãn : $0<a\le 1;\quad 0<b\le 1;\quad 0<c\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{1}{abc}\right)(a+b+c)\ge 3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

II. PHẦN TỰ CHỌN (3 điểm)

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a (2 điểm):

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC có $A(-3;6)$, trực tâm $H(2;1)$, trọng tâm $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{7}{3}\right)$.
Xác định toạ độ các đỉnh B và C.

2) Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z-4=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z-3=0$. Xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α). Viết phương trình mặt cầu (S′) đối xứng với mặt cầu (S) qua mặt phẳng (α).

Câu VII.a (1 điểm): Một đội dự tuyển bóng bàn có 10 nữ, 7 nam, trong đó có danh thủ nam là Vũ Mạnh Cường và danh thủ nữ là Ngô Thu Thủy. Người ta cần lập một đội tuyển bóng bàn quốc gia từ đội dự tuyển nói trên. Đội tuyển quốc gia bao gồm 3 nữ và 4 nam. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội tuyển quốc gia sao cho trong đội tuyển có mặt chỉ một trong hai danh thủ trên.

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b (2 điểm):

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy,* cho tam giác ABC có đỉnh A thuộc đường thẳng *d*: x – 4y – 2 = 0, cạnh BC song song với *d*, phương trình đường cao BH: x + y + 3 = 0 và trung điểm của cạnh AC là M(1; 1). Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

2) Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hình thang cân ABCD với $A(3;-1;-2), B(1;5;1), C(2;3;3)$, trong đó AB là đáy lớn, CD là đáy nhỏ. Tìm toạ độ điểm D.

Câu VII.b (1 điểm): Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2^{3x+1}+2^{y-2}=3.2^{y+3x}\\ \sqrt{3x^2+1+xy}=\sqrt{x+1}\end{cases}$

==========================

Trần Sĩ Tùng

Hướng dẫn:

I. PHẦN CHUNG

Câu I: 2) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ $a \neq -2$ thuộc đồ thị (C) có phương trình:

$$y = \frac{4}{(a+2)^2}(x-a) + \frac{2a}{a+2} \Leftrightarrow 4x - (a+2)^2 y + 2a^2 = 0 \qquad (d)$$

Tâm đối xứng $I(-2;2)$. Ta có $d(I,d) = \frac{8|a+2|}{\sqrt{16+(a+2)^4}} \leq \frac{8|a+2|}{\sqrt{2.4.(a+2)^2}} = \frac{8|a+2|}{2|a+2|\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$d(I,d)$ lớn nhất $\Leftrightarrow (a+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-4 \end{array}\right.$

Từ đó suy ra có hai tiếp tuyến $y = x$ và $y = x+8$.

Câu II: 1) Điều kiện $\begin{cases} \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \neq 0; \qquad \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0; \qquad \tan x - \cot x \neq 0 \end{cases} \quad (*)$

Để ý rằng: $\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}-2x\right).\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -1$

Khi đó PT trở thành: $-1 = \frac{4\cos^2 2x}{\tan x - \cot x} \Leftrightarrow \cot x - \tan x = 4\cos^2 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\tan^2 x}{\tan x} = 4\frac{1}{1+\tan^2 2x} \Leftrightarrow \frac{2}{\tan 2x} = \frac{4}{1+\tan^2 2x} \Leftrightarrow (\tan 2x - 1)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow \tan 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + m\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$: Không thoả điều kiện (*).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2) Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0, x^2 + y^2 - 1 \neq 0$

Đặt $u = x^2 + y^2 - 1; v = \frac{x}{y}$. Hệ PT trở thành: $\begin{cases} \frac{3}{u} + \frac{2}{v} = 1 \\ u + 1 + 4v = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{u} + \frac{2}{v} = 1 & (1) \\ u = 21 - 4v & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được: $\frac{3}{21-4v} + \frac{2}{v} = 1 \Leftrightarrow 2v^2 - 13v + 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 3 \\ v = \frac{7}{2} \end{array}\right.$

- Nếu $v = 3$ thì $u = 9$, ta có Hệ PT: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 9 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$

- Nếu $v = \frac{7}{2}$ thì $u = 7$, ta có Hệ PT: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 7 \\ \frac{x}{y} = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x = \frac{7}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4\sqrt{\frac{2}{53}} \\ x = 14\sqrt{\frac{2}{53}} \end{cases} \vee \begin{cases} y = -4\sqrt{\frac{2}{53}} \\ x = -14\sqrt{\frac{2}{53}} \end{cases}$

So sánh điều kiện ta được 4 nghiệm của Hệ PT.

Câu III: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = 2\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow I = \left(2\sqrt{x+1}.\ln x\right)\Big|_3^8 - 2\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx = 6\ln 8 - 4\ln 3 - 2J$

- Tính $J = \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$. Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow J = \int_2^3 \frac{t}{t^2-1}.2tdt = 2\int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}dt = \int_2^3 \left(2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$$= \left(2t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_3^8 = 2 + \ln 3 - \ln 2$$

Từ đó $I = 20\ln 2 - 6\ln 3 - 4$.

Câu IV: Kẻ SO ⊥ (ABCD) thì O là giao điểm của AC và BD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD; G là trọng tâm ΔSAC.

Góc giữa mặt bên (SCD) và đáy (ABCD) là $\widehat{SJI} = 60^0 \Rightarrow$ ΔSIJ đều cạnh $a \Rightarrow$ G cũng là trọng tâm ΔSIJ.
IG cắt SJ tại K là trung điểm của SJ; M, N là trung điểm của SC, SD.

$$IK = \frac{\sqrt{3}a}{2}; S_{ABMN} = \frac{1}{2}(AB + MN)IK = \frac{3\sqrt{3}a^2}{8};\ SK \perp (ABMN); SK = \frac{a}{2}$$

Suy ra: $V = \frac{1}{3}S_{ABMN}.SK = \frac{\sqrt{3}a^3}{16}$.

Câu V: Vì $0 < a \le 1, 0 < b \le 1$ nên $(a-1)(b-1) \ge 0 \Rightarrow ab - a - b + 1 \ge 0 \ \Rightarrow 1 \ge a + b - ab \Rightarrow \frac{1}{ab} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1$ (1)

Tương tự : $\frac{1}{bc} \ge \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1$ (2), $\quad \frac{1}{ca} \ge \frac{1}{c} + \frac{1}{a} - 1$ (3)

Cộng các BĐT (1), (2), (3) vế theo vế ta được: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \ge 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3$ (4)

Sử dụng BĐT (4) và BĐT Cô–si ta có:

$$\left(1 + \frac{1}{abc}\right)(a+b+c) = a+b+c+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \ge a+b+c+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 3$$

$$\ge 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} + \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} - 3$$

Cũng theo BĐT Cô–si ta có : $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$

Do đó: $\left(1+\frac{1}{abc}\right)(a+b+c) \ge 6 + \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} - 3 = 3 + \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

II. PHẦN TỰ CHỌN

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a: 1) Gọi I là trung điểm của BC. Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$

Đường thẳng BC qua I vuông góc với AH có phương trình: $x - y - 3 = 0$

Vì $I\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của BC nên giả sử $B(x_B;y_B)$ thì $C(7-x_B;1-y_B)$ và $x_B - y_B - 3 = 0$

H là trực tâm của tam giác ABC nên $CH \perp AB$; $\overrightarrow{CH} = (-5 + x_B; y_B), \overrightarrow{AB} = (x_B + 3; y_B - 6)$

$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - y_B = 3 \\ (x_B - 5)(x_B + 3) + (y_B - 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_B = 6 \\ y_B = 3 \end{cases}$$

Vậy $B(1;-2), C(6;3)$ hoặc $B(6;3), C(1;-2)$

2) $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 25$ có tâm $I(1;-2;4)$ và R = 5.

Khoảng cách từ I đến (α) là: $d(I,(\alpha)) = 3 < R \quad \Rightarrow$ (α) và mặt cầu (S) cắt nhau.

Gọi J là điểm đối xứng của I qua (α). Phương trình đường thẳng IJ : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

Toạ độ giao điểm H của IJ và (α) thoả $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 4 + 2t \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(-1;-1;2)$

Vì H là trung điểm của IJ nên $J(-3;0;0)$.

Mặt cầu (S') có tâm J bán kính R' = R = 5 nên có phương trình: $(S'):(x+3)^2+y^2+z^2=25$

Câu VII.a: Có 2 trường hợp xảy ra:

- *Trường hợp 1*: Đội tuyển có Vũ Mạnh Cường, không có Ngô Thu Thuỷ

  Số cách chọn 3 nam còn lại là C_6^3.

  Số cách chọn 3 nữ không có Ngô Thu Thuỷ là C_9^3.

Suy ra số cách chọn trong trường hợp này là $C_6^3.C_9^3=1680$ (cách)

- *Trường hợp 2*: Đội tuyển có Ngô Thu Thuỷ, không có Vũ Mạnh Cường

  Số cách chọn 4 nam không có Vũ Mạnh Cường là C_6^4

  Số cách chọn 2 nữ còn lại là C_9^2

Suy ra số cách chọn trong trường hợp này là $C_6^4.C_9^2=540$ (cách)

Vậy số cách chọn đội tuyển bóng bàn Quốc gia là: 1680 + 540 = 2220 (cách)

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b: 1) Ta có AC vuông góc với BH và đi qua M(1; 1) nên có phương trình: $y = x$.

Toạ độ đỉnh A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x-4y-2=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$

Vì M là trung điểm của AC nên $C\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{8}{3}\right)$

Vì BC đi qua C và song song với d nên BC có phương trình: $y=\dfrac{x}{4}+2$

$BH \cap BC = B: \begin{cases} x+y+3=0 \\ y=\dfrac{x}{4}+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B(-4;1)$

2) Do ABCD là hình thang cân nên AD = BC = 3.

Gọi Δ là đường thẳng qua C và song song với AB, (S) là mặt cầu tâm A bán kính R = 3. Điểm D cần tìm là giao điểm của Δ và (S).

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(-2;6;3)$ nên có phương trình: $\begin{cases} x=2-2t \\ y=3+6t \\ z=3+3t \end{cases}$

Phương trình mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9$

Toạ độ điểm D thoả Hệ PT: $\begin{cases} x=2-2t \\ y=3+6t \\ z=3+3t \\ (x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9 \end{cases} \Rightarrow 49t^2+82t+33=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-\dfrac{33}{49} \end{array}\right.$

- Với t = – 1, thì D(4; – 3; 0) : không thoả vì AB = CD = 7
- Với $t=-\dfrac{33}{49} \Rightarrow D\left(\dfrac{164}{49};-\dfrac{51}{49};\dfrac{48}{49}\right)$ (nhận)

Câu VII.b: $\begin{cases} 2^{3x+1}+2^{y-2}=3.2^{y+3x} & (1) \\ \sqrt{3x^2+1+xy}=\sqrt{x+1} & (2) \end{cases}$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ 3x^2+1+xy=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x(3x+y-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x=0 \vee y=1-3x \end{cases}$

• Với $x = 0$ thay vào (1) ta được: $2+2^{y-2}=3.2^y \Leftrightarrow 8+2^y=12.2^y \Leftrightarrow 2^y=\frac{8}{11} \Leftrightarrow y=\log_2\frac{8}{11}$

• Với $\begin{cases} x\ge -1 \\ y=1-3x \end{cases}$ thay $y=1-3x$ vào (1) ta được : $2^{3x+1}+2^{-3x-1}=3.2 \quad (3)$

Đặt $t=2^{3x+1}$, vì $x\ge -1$ nên $t\ge -\frac{1}{4}$. Khi đó: (3) : $t+\frac{1}{t}=6 \Leftrightarrow t^2-6t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=3-2\sqrt{2} & (loại) \\ t=3+2\sqrt{2} & (thoả) \end{array}\right.$

Suy ra: $2^{3x+1}=3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\left[\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right)-1\right]$; $y=1-3x=2-\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right)$

Vậy Hệ PT đã cho có 2 nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=\log_2\frac{8}{11} \end{cases}$ và $\begin{cases} x=\frac{1}{3}\left[\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right)-1\right] \\ y=2-\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right) \end{cases}$

====================