

I. PHẦN CHUNG (7 điểm)

Câu I (2 điểm): Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$ (1)

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.
- 2) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất.

Câu II (2 điểm):

1) Giải phương trình: $2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) - 4 \cos 4x - 15 \sin 2x = 21$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 4y^3 = 0 \\ \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y} = 2 \end{cases}$$

Câu III (1 điểm): Tính tích phân:
$$I = \int_{\ln 4}^{\ln 6} \frac{e^{2x}}{e^x + 6e^{-x} - 5} dx$$

Câu IV (1 điểm): Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, với $AB = 2AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), cạnh SC tạo với mặt đáy (ABCD) một góc 45° . Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB, mặt phẳng (GCD) cắt SA, SB lần lượt tại P và Q. Tính thể tích khối chóp S.PQCD theo a.

Câu V (1 điểm): Cho x và y là hai số dương thỏa mãn $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3 + y^2}{x^2} + \frac{x^2 + y^3}{y^2} + \frac{3}{2x} + \frac{3}{2y}$$

II. PHẦN TỰ CHỌN (3 điểm)

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a (2 điểm):

- 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi ABCD có cạnh bằng 5 đơn vị, biết tọa độ đỉnh $A(1; 5)$, hai đỉnh B, D nằm trên đường thẳng (d): $x - 2y + 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.
- 2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - y + z - 1 = 0$ và hai đường thẳng (d_1) : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$, (d_2) : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với mặt phẳng (P), vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt đường thẳng (d_2) tại điểm E có hoành độ bằng 3.

Câu VII.a (1 điểm): Trên tập số phức cho phương trình $z^2 + az + i = 0$. Tìm a để phương trình trên có tổng các bình phương của hai nghiệm bằng $-4i$.

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b (2 điểm):

- 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$ và đường thẳng (d): $3x + y - 3 = 0$. Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C), biết tiếp tuyến không đi qua gốc tọa độ và hợp với đường thẳng (d) một góc 45° .
- 2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng (d_1) : $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, (d_2) : $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$. Một đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(1; 2; 3)$, cắt đường thẳng (d_1) tại điểm B và cắt đường thẳng (d_2) tại điểm C. Chứng minh rằng điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC.

Câu VII.b (1 điểm): Tìm giá trị m để hàm số $y = \frac{x^2 + (m^2 - 1)x - m^2 + m}{x - 1}$ đồng biến trên các khoảng của tập xác định và tiệm cận xiên của đồ thị đi qua điểm $M(1; 5)$.

=====

Hướng dẫn:

I. PHẦN CHUNG

Câu I: 2) $y' = 4x^3 - 4(m^2 - m + 1)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{m^2 - m + 1} \end{cases}$.

Khoảng cách giữa các điểm cực tiểu: $d = 2\sqrt{m^2 - m + 1} = 2\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \Rightarrow \text{Mind} = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu II: 1) PT $\Leftrightarrow \sin^3 2x - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

2) $\begin{cases} x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 4y^3 = 0 & (1) \\ \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y} = 2 & (2) \end{cases}$. Ta có: $(1) \Leftrightarrow (x-y)^2(x-4y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 4y \end{cases}$

• Với $x = y$: $(2) \Rightarrow x = y = 2$

• Với $x = 4y$: $(2) \Rightarrow x = 32 - 8\sqrt{15}$; $y = 8 - 2\sqrt{15}$

Câu III: $I = 2 + 9\ln 3 - 4\ln 2$

Câu IV: Kẻ $SH \perp PD \Rightarrow SH \perp (PQCD) \Rightarrow V_{S.PQCD} = \frac{1}{3}S_{PQCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a^2\sqrt{14}}{9} \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{\sqrt{14}} = \frac{10\sqrt{5}}{27}a^3$

• Có thể dùng công thức tỉ số thể tích:

$$\begin{cases} \frac{V_{S.PQC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SP}{SA} \cdot \frac{SQ}{SB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.PQC} = \frac{4}{9}V_{S.ABC} = \frac{4\sqrt{5}}{27}a^3 \\ \frac{V_{S.PCD}}{V_{S.ACD}} = \frac{SP}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.PCD} = \frac{2}{3}V_{S.ACD} = \frac{2\sqrt{5}}{9}a^3 \end{cases} \Rightarrow V_{S.PQCD} = V_{S.PQC} + V_{S.PCD} = \frac{10\sqrt{5}}{27}a^3$$

Câu V: Ta có: $x > 0, y > 0, x + y = 2 \Rightarrow 0 < xy \leq 1$.

$$P = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 + \frac{3}{xy} \geq 2^2 + 3 = 7. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y = 1. \text{ Vậy, } \min P = 7.$$

II. PHẦN TỰ CHỌN

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a: 1) C đối xứng với A qua đường thẳng d $\Rightarrow C(3; 1)$.

$$\begin{cases} B, D \in d \\ AB = AD = 5 \end{cases} \Rightarrow B(-2; 1), D(6; 5).$$

2) $E \in (d_2) \Rightarrow E(3; 7; 6)$. $\begin{cases} \vec{a}_\Delta \perp \vec{n}_P \\ \vec{a}_\Delta \perp \vec{a}_{d1} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_\Delta = [\vec{n}_P, \vec{a}_{d1}] = -4(1; 1; -1) \Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 7 + t \\ z = 6 - t \end{cases}$

Câu VII.a: $z_1^2 + z_2^2 = -4i \Leftrightarrow a^2 = -2i \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - i \\ a = -1 + i \end{cases}$

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b: 1) (C): $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow$ Tâm $I(3; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Giả sử $(\Delta): ax + by + c = 0$ ($c \neq 0$). Từ: $\begin{cases} d(I, \Delta) = \sqrt{5} \\ \cos(d, \Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2, b = -1, c = -10 \\ a = 1, b = 2, c = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta: 2x - y - 10 = 0 \\ \Delta: x + 2y - 10 = 0 \end{cases}$

2) Lấy $B \in (d_1)$, $C \in (d_2)$. Từ: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow B$ là trung điểm của đoạn thẳng AC.

Ta có thể tính được $B(2; -1; 1)$, $C(3; -4; -1)$.

Câu VII.b: Tiệm cận xiên $(\Delta): y = x + m^2$. Từ $M(1; 5) \in (\Delta) \Rightarrow m = \pm 2$.

Kết hợp với: $y' = 1 - \frac{m}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1 \Rightarrow m = -2$.