TRƯỜNG THPT CHUYÊN – ĐHSP HÀ NỘI Đề số 17	ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG NĂM 2010 Môn thi: TOÁN Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

I. PHẦN CHUNG (7 điểm)

Câu I (2 điểm): Cho hàm số $y = 2x^3 + 9mx^2 + 12m^2x + 1$ (*m* là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = -1$.

2) Tìm tất cả các giá trị của *m* để hàm số có cực đại tại $x_{CĐ}$, cực tiểu tại x_{CT} thỏa mãn: $x^2_{CĐ} = x_{CT}$.

Câu II (2 điểm):

1) Giải phương trình: $\sqrt{x+1} + 1 = 4x^2 + \sqrt{3x}$

2) Giải hệ phương trình: $5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - 9$

Câu III (1 điểm): Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \dfrac{x\ln(x^2+1) + x^3}{x^2+1}$

Câu IV (1 điểm): Cho hình chóp S.ABCD có SA = *x* và tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng *a*. Chứng minh rằng đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC). Tìm *x* theo *a* để thể tích của khối chóp S.ABCD bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu V (1 điểm): Cho các số thực không âm *a, b*. Chứng minh rằng: $\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$

II. PHẦN TỰ CHỌN (3 điểm)

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a (2 điểm):

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho ba đường thẳng: $d_1: 2x + y - 3 = 0$, $d_2: 3x + 4y + 5 = 0$, $d_3: 4x + 3y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d_1 và tiếp xúc với d_2 và d_3.

2) Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho điểm A(1;2; –1), đường thẳng (Δ): $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (P): $2x + y - z + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A, cắt đường thẳng (Δ) và song song với (P).

Câu VII.a (1 điểm): Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau, trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1?

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b (2 điểm):

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy,* cho đường thẳng (d): $\sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$ và đường tròn có phương trình $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Gọi I là tâm đường tròn (C). Tìm *m* sao cho (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Với giá trị nào của *m* thì diện tích tam giác IAB lớn nhất và tính giá trị đó.

2) Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm S(0;0;1), A(1;1;0). Hai điểm M(*m*; 0; 0), N(0; *n*; 0) thay đổi sao cho $m + n = 1$ và $m > 0$, $n > 0$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SMN). Từ đó suy ra mặt phẳng (SMN) tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Câu VII.b (1 điểm): Giải bất phương trình: $\left(4^x - 2.2^x - 3\right).\log_2 x - 3 > 4^{\frac{x+1}{2}} - 4^x$

===========================

Trần Sĩ Tùng

Hướng dẫn:

I. PHẦN CHUNG

Câu I: 2) $y' = 6x^2 + 18mx + 12m^2 = 6(x^2 + 3mx + 2m^2)$

Hàm số có CĐ và CT $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

Khi đó: $x_1 = \frac{1}{2}\left(-3m - |m|\right),\ x_2 = \frac{1}{2}\left(-3m + |m|\right)$. Dựa vào bảng xét dấu y' suy ra $x_{CĐ} = x_1,\ x_{CT} = x_2$

Do đó: $x^2{}_{CĐ} = x_{CT} \Leftrightarrow \left(\frac{-3m - |m|}{2}\right)^2 = \frac{-3m + |m|}{2} \Leftrightarrow m = -2$

Câu II: 1) Điều kiện $x \geq 0$. PT $\Leftrightarrow 4x^2 - 1 + \sqrt{3x} - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow (2x+1)(2x-1) + \frac{2x-1}{\sqrt{3x} + \sqrt{x+1}} = 0$

$\Leftrightarrow (2x-1)\left(2x + 1 + \frac{1}{\sqrt{3x} + \sqrt{x+1}}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

2) PT $\Leftrightarrow 10\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 14 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Câu III: Ta có: $f(x) = \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{x(x^2+1) - x}{x^2+1} = \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1} + x - \frac{x}{x^2+1}$

$\Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2}\int \ln(x^2+1)d(x^2+1) + \int xdx - \frac{1}{2}\int d\ln(x^2+1)$

$= \frac{1}{4}\ln^2(x^2+1) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

Câu IV: Do B và D cách đều S, A, C nên BD $\perp$ (SAC). Gọi O là tâm của đáy ABCD. Các tam giác ABD, BCD, SBD là các tam giác cân bằng nhau và có đáy BD chung nên OA = OC = OS. Do đó ΔASC vuông tại S.

Ta có: $V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2.\frac{1}{6}BO.SA.SC = \frac{1}{3}ax.\sqrt{AB^2 - OA^2} = \frac{1}{3}ax\sqrt{a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4}} = \frac{1}{6}ax\sqrt{3a^2 - x^2}$

Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6}ax\sqrt{3a^2 - x^2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = a\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu V: Ta có: $a^2 + b + \frac{3}{4} = a^2 - a + \frac{1}{4} + b + a + \frac{1}{2} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + a + b + \frac{1}{2} \geq a + b + \frac{1}{2}$

Tương tự: $b^2 + a + \frac{3}{4} \geq a + b + \frac{1}{2}$.

Ta sẽ chứng minh $\left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left((2b + \frac{1}{2}\right)$ (*)

Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab + a + b + \frac{1}{4} \geq 4ab + a + b + \frac{1}{4} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.

II. PHẦN TỰ CHỌN

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a: 1) Gọi tâm đường tròn là $I(t; 3-2t) \in d_1$.

Khi đó: $d(I, d_2) = d(I, d_3) \Leftrightarrow \frac{|3t + 4(3-2t) + 5|}{5} = \frac{|4t + 3(3-2t) + 2|}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 4 \end{array}\right.$

Vậy có 2 đường tròn thoả mãn: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{49}{25}$ và $(x-4)^2 + (y+5)^2 = \frac{9}{25}$.

2) (Δ) $: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$. (P) có VTPT $\vec{n} = (2;1;-1)$.

Gọi I là giao điểm của (Δ) và đường thẳng d cần tìm $\Rightarrow I(2+t;3t;-2+2t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = (1+t, 3t-2, -1+2t)$ là VTCP của d.

Do d song song mặt phẳng (P) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3t+1=0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow 3\overrightarrow{AI} = \left(2;-9;-5\right)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-9} = \dfrac{z+1}{-5}$.

Câu VII.a: Gọi số cần tìm là: x= $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

Vì không có mặt chữ số 1 nên còn 9 chữ số 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 để thành lập số cần tìm.

Vì phải có mặt chữ số 0 và $a_1 \neq 0$ nên số cách xếp cho chữ số 0 là 5 cách.

Số cách xếp cho 5 vị trí còn lại là : A_8^5.

Vậy số các số cần tìm là: 5. A_8^5 = 33.600 (số)

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b: 1) (C) có tâm I (1; –2) và bán kính R = 3.

(d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow d(I,d) < R \Leftrightarrow \left|\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}\right| < 3\sqrt{2+m^2}$

$\Leftrightarrow 1 - 4m + 4m^2 < 18 + 9m^2 \Leftrightarrow 5m^2 + 4m + 17 > 0 \Leftrightarrow m \in R$

Ta có: $S_{IAB} = \dfrac{1}{2} IA.IB \sin\widehat{AIB} \leq \dfrac{1}{2} IA.IB = \dfrac{9}{2}$

Vậy: S_{IAB} lớn nhất là $\dfrac{9}{2}$ khi $\widehat{AIB} = 90^0 \Leftrightarrow$ AB $= R\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow d(I,d) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow |1-2m| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+m^2} \Leftrightarrow 16m^2 - 16m + 4 = 36 + 18m^2 \Leftrightarrow 2m^2 + 16m + 32 = 0 \Leftrightarrow m = -4$

2) Ta có: $\overrightarrow{SM} = (m;0;-1)$, $\overrightarrow{SN} = (0;n;-1) \Rightarrow$ VTPT của (SMN) là $\vec{n} = (n;m;mn)$

Phương trình mặt phẳng (SMN): $nx + my + mnz - mn = 0$

Ta có: d(A,(SMN)) $= \dfrac{|n+m-mn|}{\sqrt{n^2+m^2+m^2n^2}} = \dfrac{|1-m.n|}{\sqrt{1-2mn+m^2n^2}} = \left|\dfrac{1-mn}{1-mn}\right| = 1$

Suy ra (SMN) tiếp xúc mặt cầu tâm A bán kính R=1 cố định.

Câu VII.b: BPT $\Leftrightarrow (4^x - 2.2^x - 3).\log_2 x - 3 > 2^{x+1} - 4^x \Leftrightarrow (4^x - 2.2^x - 3).(\log_2 x + 1) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{2x} - 2.2^x - 3 > 0 \\ \log_2 x + 1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{2x} - 2.2^x - 3 < 0 \\ \log_2 x + 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x > 3 \\ \log_2 x > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x < 3 \\ \log_2 x < -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \log_2 3 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x < \log_2 3 \\ 0 < x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \log_2 3 \\ 0 < x < \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

=====================