Trung tâm BDVH & LTĐH **QUANG MINH** **Đề số 9**	**ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG NĂM 2010** **Môn thi: TOÁN** Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

I. PHẦN CHUNG (7 điểm)

Câu I (2 điểm): Cho hàm số $y = \dfrac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = -1$.
2) Tìm m để đồ thị của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = x$.

Câu II (2 điểm):

1) Giải phương trình: $2 - \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 4\cos^2 3x$
2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

Câu III (1 điểm): Tính tích phân: $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3}dx$

Câu IV (1 điểm): Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A′B′C′có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, A′M ⊥ (ABC), A′M = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (M là trung điểm cạnh BC). Tính thể tích khối đa diện ABA′B′C.

Câu V (1 điểm): Cho các số thực x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\mathrm{P} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} + |x - 4|$$

II. PHẦN TỰ CHỌN (3 điểm)

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a (2 điểm):

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho elip (E): $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$. Tìm các điểm M ∈ (E) sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 120^0$ (F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E)).
2) Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho 3 điểm A(3; 1; 1), B(7; 3; 9), C(2; 2; 2) và mặt phẳng (P) có phương trình: $x + y = z + 3 = 0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Câu VII.a (1 điểm): Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau: $(x+1)^{10}(x+2) = x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + \ldots + a_{11}$. Tìm hệ số a_5.

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b (2 điểm):

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy,* cho đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 35$ và điểm A(5; 5). Tìm trên (C) hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.
2) Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho điểm M(2; 1; 2) và đường thẳng *d*: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{1}$. Tìm trên *d* hai điểm A, B sao cho tam giác ABM đều.

Câu VII.b (1 điểm): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_{2010}\left(\dfrac{2y}{x}\right) = x - 2y \\ \dfrac{x^3 + y^3}{xy} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

============================

Hướng dẫn:

I. PHẦN CHUNG

Câu I: 2) TXĐ: D = R \ {1}.

Để đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = x$ thì: $\begin{cases} \dfrac{(2m-1)x - m^2}{x-1} = x & (*) \\ \dfrac{(m-1)^2}{(x-1)^2} = 1 & (**) \end{cases}$

Từ (**) ta có $(m-1)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = 2-m \end{array}\right.$

- Với $x = m$, thay vào (*) ta được: $0m = 0$ (thoả với mọi m). Vì $x \neq 1$ nên $m \neq 1$.
- Với $x = 2 - m$, thay vào (*) ta được: $(2m-1)(2-m) - m^2 = (2-m)(2-m-1) \Leftrightarrow 4(m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$
  $m = 1 \Rightarrow x = 1$ (loại)

Vậy với $m \neq 1$ thì đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = x$.

Câu II: 1) PT $\Leftrightarrow \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}\sin 2x = \cos 6x \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{5\pi}{6} - 2x\right) = \cos 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{48} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = -\dfrac{5\pi}{24} + l\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases}$. Điều kiện: $x + y > 0$.

(1) $\Leftrightarrow (x+y)^2 - 1 - 2xy\left(1 - \dfrac{1}{x+y}\right) = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x^2+y^2+x+y) = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$

(vì $x + y > 0$ nên $x^2 + y^2 + x + y > 0$)

Thay $x = 1 - y$ vào (2) ta được: $1 = x^2 - (1-x) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & (y = 0) \\ x = -2 & (y = 3) \end{array}\right.$

Vậy hệ có 2 nghiệm: (1; 0), (–2; 3).

Câu III: Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx$. Ta có I = $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(\sin t + \cos t)^3}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^3}dx$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^3}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}dx$$

$= \dfrac{1}{2}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Vậy: I $= \dfrac{1}{2}$.

Câu IV: Vì ABB′A′ là hình bình hành nên ta có: $V_{C.ABB'} = V_{C.AB'A'}$. Mà $V_{C.ABB'} = \dfrac{1}{3}.A'M.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$

Vậy, $V_{C.ABB'A'} = 2V_{C.ABB'} = 2\dfrac{a^3}{8} = \dfrac{a^3}{4}$.

Câu V: Ta có: P = $\sqrt{x^2 + (2-y)^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2} + |x-4|$

Xét $\vec{a} = (x; 2-y), \vec{b} = (x, y+2)$. Ta có: $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| \Rightarrow \sqrt{x^2 + (2-y)^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2} \geq \sqrt{4x^2 + 16} = 2\sqrt{x^2 + 4}$

Suy ra: P $\geq 2\sqrt{x^2 + 4} + |x - 4|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng hay $y = 0$.

Mặt khác, áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có: $\left(2\sqrt{3} + x\right)^2 \leq (3+1)(4 + x^2) \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 4} \geq |2\sqrt{3} + x|$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Do đó: P $\geq \left|2\sqrt{3}+x\right|+\left|4-x\right| \geq \left|2\sqrt{3}+4\right| = 2\sqrt{3}+4$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}, y=0$.

Vậy MinP = $2\sqrt{3}+4$ khi $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}, y=0$.

II. PHẦN TỰ CHỌN

1. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a: 1) Ta có: $a=10, b=5 \Rightarrow c=5\sqrt{3}$. Gọi M(x; y) $\in$ (E). Ta có: $MF_1 = 10-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x, MF_2 = 10+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

Ta có: $F_1F_2^{\,2} = MF_1^{\,2}+MF_2^{\,2}-2MF_1.MF_2.\cos\widehat{F_1MF_2}$

$\Leftrightarrow \left(10\sqrt{3}\right)^2 = \left(10-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(10+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2-2\left(10-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(10+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x=0\ (y=\pm 5)$

Vậy có 2 điểm thoả YCBT: $M_1(0; 5)$, $M_2(0; -5)$.

2) Gọi I là điểm thoả: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Rightarrow I\left(\dfrac{23}{6};\dfrac{13}{6};\dfrac{25}{6}\right)$

Ta có: T = $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right| = \left|\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right| = \left|6\overrightarrow{MI}\right| = 6\left|\overrightarrow{MI}\right|$

Do đó: T nhỏ nhất $\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I trên (P).

Ta tìm được: $M\left(\dfrac{13}{9};-\dfrac{2}{9};\dfrac{16}{9}\right)$.

Câu VII.a: Ta có: $(x+1)^{10} = C_{10}^0x^{10}+C_{10}^1x^9+...+C_{10}^9x+C_{10}^{10} \Rightarrow (x+1)^{10}(x+2) = ...+\left(C_{10}^5+2C_{10}^4\right)x^6+...$

$\Rightarrow a_5 = C_{10}^5+2C_{10}^4 = 672$.

2. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b: 1) (C) có tâm I(3; 4).

- Ta có: $\begin{cases} AB=AC \\ IB=IC \end{cases} \Rightarrow$ AI là đường trung trực của BC. ΔABC vuông cân tại A nên AI cũng là phân giác của $\widehat{BAC}$.

Do đó AB và AC hợp với AI một góc 45^0.

- Gọi *d* là đường thẳng qua A và hợp với AI một góc 45^0. Khi đó B, C là giao điểm của *d* với (C) và AB = AC.

Vì $\overrightarrow{IA}=(2;1) \neq (1;\ 1), (1;\ -1)$ nên *d* không cùng phương với các trục toạ độ $\Rightarrow$ VTCP của *d* có hai thành phần đều khác 0. Gọi $\vec{u}=(1;a)$ là VTCP của *d*. Ta có:

$$\cos\left(\overrightarrow{IA},\vec{u}\right) = \frac{|2+a|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{2^2+1}} = \frac{|2+a|}{\sqrt{5}\sqrt{1+a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|2+a| = \sqrt{5}\sqrt{1+a^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

- Với *a* = 3, thì $\vec{u}=(1;3) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng *d*: $\begin{cases} x=5+t \\ y=5+3t \end{cases}$.

Ta tìm được các giao điểm của *d* và (C) là: $\left(\dfrac{9+\sqrt{13}}{2};\dfrac{7+3\sqrt{13}}{2}\right), \left(\dfrac{9-\sqrt{13}}{2};\dfrac{7-3\sqrt{13}}{2}\right)$

- Với $a=-\dfrac{1}{3}$, thì $\vec{u}=\left(1;-\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng *d*: $\begin{cases} x=5+t \\ y=5-\dfrac{1}{3}t \end{cases}$.

Ta tìm được các giao điểm của *d* và (C) là: $\left(\dfrac{7+3\sqrt{13}}{2};\dfrac{11-\sqrt{13}}{2}\right), \left(\dfrac{7-3\sqrt{13}}{2};\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$

- Vì AB = AC nên ta có hai cặp điểm cần tìm là: $\left(\dfrac{7+3\sqrt{13}}{2};\dfrac{11-\sqrt{13}}{2}\right), \left(\dfrac{9+\sqrt{13}}{2};\dfrac{7+3\sqrt{13}}{2}\right)$

và $\left(\dfrac{7-3\sqrt{13}}{2};\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right), \left(\dfrac{9-\sqrt{13}}{2};\dfrac{7-3\sqrt{13}}{2}\right)$

2) Gọi H là hình chiếu của M trên *d*. Ta có: MH = $d(M,d)=\sqrt{2}$.

Tam giác ABM đều, nhận MH làm đường cao nên: MA = MB = AB = $\dfrac{2MH}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

Do đó, toạ độ của A, B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{1} \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \dfrac{8}{3} \end{cases}$.

Giải hệ này ta tìm được: $A\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{3};\dfrac{\sqrt{2}}{3};3+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $B\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{3};-\dfrac{\sqrt{2}}{3};3-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

Câu VII.b: $\begin{cases} \log_{2010}\left(\dfrac{2y}{x}\right) = x - 2y & (1) \\ \dfrac{x^3+y^3}{xy} = x^2 + y^2 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $xy > 0$. Từ (2) ta có: $x^3 + y^3 = xy(x^2+y^2) > 0 \Rightarrow x > 0, y > 0$.

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{2y}{x} = 2010^{x-2y} \Leftrightarrow x.2010^x = 2y.2010^{2y}$.

Xét hàm số: $f(t) = t.2010^t$ $(t > 0)$. Ta có: $f'(t) = 2010^t\left(1+\dfrac{t}{\ln 2010}\right) > 0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến khi $t > 0$ $\Rightarrow f(x) = f(2y) \Leftrightarrow x = 2y$

Thay $x = 2y$ vào (2) ta được: $y\left(5y - \dfrac{9}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = 0 & (loại) \\ y = \dfrac{9}{10} & \left(x = \dfrac{9}{5}\right) \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ là: $\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{9}{10}\right)$.

====================