

Đây là câu hỏi của bạn hongminh18 tôi đọc trên diễn đàn của thư viện vật lý. Do không thể trả lời trực tiếp trên đó, nên tôi mượn đất này để đưa câu trả lời lên.

Lúc đầu có 5000 nguyên tử Mo bị phân rã theo pt :

$\text{Mo}(A=42;Z=101) \rightarrow \text{Tc}(A=43;Z=101) \rightarrow \text{Ru}(A=44;Z=101)$

(CÁC BẠN THÔNG CẢM MÌNH KHÔNG BIẾT GỒ KÍ HIỆU HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ)

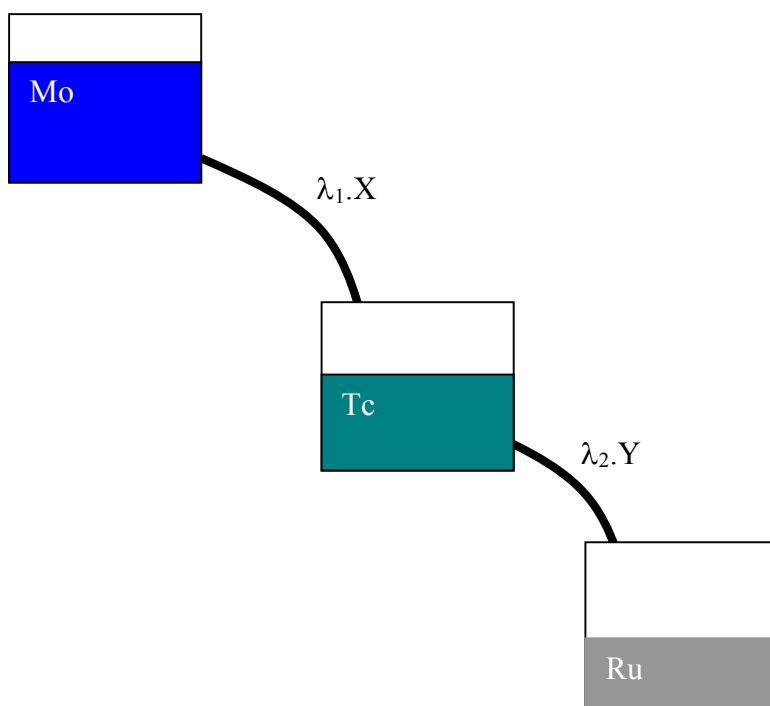
Cho chu kì bán rã của Mo là 14,6 phút, của Tc 14,3 phút. Hỏi có bao nhiêu nguyên tử Mo, Tc, Ru có mặt sau 14,6 phút?

Đáp số là 2500; 1720; 780

Bí quá_ Nhờ các bạn giải dùm

Lời giải:

Bạn có thể so sánh sự biến thiên số nguyên tử Mo, Tc và Ru giống như sự biến thiên số phân tử chất lỏng có trong 3 bình sau:



Gọi X là số nguyên tử Mo tại thời điểm t

Y.....Tc.....

Tốc độ phóng xạ của Mo ở thời điểm t là $\lambda_1.X$ (Nó được so sánh như tốc độ dòng chảy từ bình 1 sang bình 2)

Tốc độ phóng xạ của Tc ở thời điểm t là $\lambda_2.Y$.

Trong khoảng thời gian rất nhỏ dt, số hạt Tc được sinh ra là $\lambda_1.X.dt$ và số hạt Tc bị phân rã là $\lambda_2.Y.dt$.

Vậy, trong khoảng thời gian dt đó, độ biến thiên số hạt Tc là:

$$dY = (\lambda_1.X - \lambda_2.Y).dt$$

$$\text{Hay: } \frac{dY}{dt} = \lambda_1.X - \lambda_2.Y$$

$$\begin{aligned} \text{Hay } Y' &= \lambda_1.X - \lambda_2.Y \Leftrightarrow Y' + \lambda_2.Y = \lambda_1.X \\ \Leftrightarrow Y' + \lambda_2.Y &= \lambda_1.N_0.e^{-\lambda_1.t} \quad (\text{ Vì } X = N_0.e^{-\lambda_1.t}) \quad (*) \end{aligned}$$

Phương trình (*) là **phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất. Bạn hãy tìm hiểu thêm cách giải phương trình này trong các giáo trình toán cao cấp dành cho sinh viên !**

Ở đây tôi trình bày lời giải dành cho riêng phương trình này như sau :

Nhân hai vế của (*) với $e^{\lambda_2.t}$ ta được :

$$Y'.e^{\lambda_2.t} + \lambda_2.Y.e^{\lambda_2.t} = \lambda_1.N_0.e^{(\lambda_2-\lambda_1).t} (**).$$

Biểu thức (**) tương đương với :

$$(Y.e^{\lambda_2.t})' = \lambda_1.N_0.e^{(\lambda_2-\lambda_1).t}$$

$$\Leftrightarrow Y.e^{\lambda_2.t} = \int \lambda_1.N_0.e^{(\lambda_2-\lambda_1).t} + C = \frac{\lambda_1.N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1).t} + C \quad (\text{ với } C \text{ là hằng số})$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{\lambda_1.N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1.t} + C.e^{-\lambda_2.t}$$

Để xác định hằng số C, ta lưu ý là lúc $t = 0$ thì $Y = 0$. Vậy

$$0 = \frac{\lambda_1.N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} + C \Rightarrow C = -\frac{\lambda_1.N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Vậy số hạt Tc phụ thuộc vào thời gian theo quy luật :

$$Y = \frac{\lambda_1.N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1.t} - e^{-\lambda_2.t})$$

Đến đây, việc còn lại là thay số, bạn sẽ tính được $Y = 1720$

Lời bàn : Không biết có cách giải nào đơn giản hơn không ? Chứ nếu đề thi dành cho HSG máy tính Casio Cấp THPT như thế này thì là khó quá.

Ai có cách nào mà không phải giải phương trình vi phân thì đưa lên tôi tham khảo với. Xin cảm ơn trước !

Cám ơn bạn **hongminh18** đã cho tôi một dịp để ôn lại phương trình vi phân !